А.Б. Будак
Б.М. Щедрин

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Руководство для поступающих в вузы



Учебно-научный центр
довузовского образования

А.Б. БУДАК

Б.М. ЩЕДРИН

Элементарная математика

Руководство

для поступающих в вузы

Москва
2001

УДК 373
ББК 22.1я729
Б 90

А.Б. Будак, Б.М. Щедрин

Элементарная математика. Руководство для поступающих в вузы. Изд. 3-е, перераб. и доп. — М. Издат. отдел УНЦ ДО, 2001 — 690 с. ISBN 5-88800-132-5

В данной книге содержатся: программа вступительных экзаменов по математике для поступающих в МГУ; методические указания к ответам на теоретические вопросы билетов устного экзамена по математике. Анализ характерных ошибок абитуриентов проводится на примерах вариантов письменных экзаменов предыдущих лет (1993—2000 гг.). Разбор конкретных погрешностей проводится на основе материалов письменных экзаменов 1993—1996 гг. Для самостоятельного разбора и решения предлагаются варианты тех же лет. Задачи устных экзаменов для самостоятельного разбора и решения подобраны за 1989—2000 гг. Более полные данные по материалам вступительных экзаменов 1997—2000 гг. можно найти в сборниках "Задачи вступительных экзаменов по математике (1997—1998 гг.), (1999 г.), (2000 г.) (под общей редакцией Е.А. Григорьева).

В третьем издании книги исправленны замеченные опечатки второго издания. Расширены разделы основных формул элементарной математики, ответов на теоретические вопросы билетов устного экзамена, список цитируемой литературы, задач, предлагавшихся на устном экзамене. Упрощены решения некоторых задач и ответы на некоторые теоретические вопросы.

Книга будет полезна поступающим в вузы, слушателям подготовительных курсов, подготовительных отделений, преподавателям, учащимся старших классов, школьным учителям.

Авторы выражают благодарность всем своим коллегам и учащимся за высказанные замечания по предыдущим изданиям книги.

Рецензенты:
д. ф.-м. н., проф. Потапов М.К.,
к. ф.-м. н., доц. Федотов М.В.

ISBN 5-88800-132-5

© А.Б. Будак, Б.М. Щедрин, 2001
© Учебно-научный центр довузовского образования, 2001
© Обложка. Алмазова Е.Е., Шваров В.В., 2001

ВВЕДЕНИЕ

Исторически сложилось так, что вступительные экзамены по математике в МГУ на различные факультеты курируют три подразделения:

механико-математический факультет,

факультет вычислительной математики и кибернетики

и кафедра математики физического факультета.

Факультет вычислительной математики и кибернетики проводит экзамены по математике на четырех факультетах: ВМиК, геологическом, экономическом и институте стран Азии и Африки. Причем на первых двух письменный и устный, а на двух последних письменный.

Поскольку материал этой книги подготовлен сотрудниками факультета ВМиК, то он основан на материалах и опыте факультета вычислительной математики и кибернетики. Однако, материал книги полезен для школьников, собирающихся поступать не только на другие факультеты МГУ, но и в иные учебные заведения.

Данная книга, в частности, содержит такие материалы, являющиеся основой для подготовки к письменному и устному экзаменам по математике, как примеры вариантов письменных экзаменов с решениями и для самостоятельного решения, анализ характерных ошибок, часто допускаемых абитуриентами на письменном экзамене, примеры задач устного экзамена также с подробными решениями и для самостоятельного решения, методические указания к ответам на теоретические вопросы билетов устного экзамена по математике, как готовиться к вступительным экзаменам по математике и другие важные материалы.

Следует отметить, что в книге параллельно используются принятая в настоящее время школьная терминология типа "отрезок AB равен 5", "угол BAC равен 30°" и т.п., а также — терминология типа "длина отрезка AB равна 5", "мера (величина) угла равна 30°" и т.п., которые подразумевают одно и то же. Однако вторая из этих терминологий математически более корректна, ибо та или иная геометрическая фигура и ее числовая характеристика — разные понятия.

Нумерация рисунков в книге обновляется в разделе III и пп. 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 и 3 раздела IV.

В книге также встречаются ссылки на ту или иную книгу из приведенного на стр. 249 — 250 списка литературы, например, см. в книге [1] или см. в учебнике [5] и т.п.. Это соответственно означает, что указанный материал можно найти в книге, указанной в этом списке под номером 1, или — в учебнике, указанного в этом списке под номером 5.

Варианты письменных экзаменов, приведенных в этой книге, подготовили: В.Б. Алексеев, А.Б. Будак, В.К. Власов, С.А. Волошин, В.П. Воронин, В.Я. Галкин, В.М. Говоров, В.Н. Денисов, И.Н. Иновенков, И.С. Ломов, В.В. Морозов, В.С. Панферов, М.М. Потапов, В.И. Родин, А.А. Сапоженко, А.Н. Соколихин, Н.В. Соснин, Д.Ю. Сычугов, В.Г. Ушаков, М.В. Федотов, Б.М. Щедрин при участии А.А. Васина, Н.Л. Григоренко, Е.А. Григорьева, В.А. Ильина, В.Ю. Королева, Д.П. Костомарова, В.М. Круглова.

Решения отдельных задач письменных экзаменов (с нашей точки зрения лучше, чем авторские) предложили Т.А. Леонтьева, Д.Ю. Сычугов и некоторые учащиеся.

Часть материалов, набранных на компьютере в LATEXe, авторам предоставили И.Н. Иновенков и М.М. Потапов.

Большую часть чертежей, выполненных на компьютере в PAINTBRUSHe, предоставил авторам М.А. Гладченко.

В составлении вариантов выездных экзаменов, включенных в эту книгу, приняли участие и сотрудники механико-математического факультета МГУ: И.Н. Сергеев, О.Ю. Черкасов, А.Г. Якушев.

Методические указания к ответам на вопросы билетов устного экзамена подготовил А.Б. Будак при участии Б.М. Щедрина. Ценные замечания высказали В.И. Родин и В.Г. Ушаков.

В подготовке задач устных экзаменов принимали участие В.Б. Алексеев, А.Б. Будак, С.А. Волошин, В.П. Воронин, В.Я. Галкин, В.М. Говоров, И.Н. Иновенков, Л.В. Крицков, И.С. Ломов, Ал.В. Лукшин, В.С. Панферов, В.С. Серов, Н.В. Соснин, В.Г. Сушко, В.Г. Ушаков, М.В. Федотов, Б.М. Щедрин.

Авторы надеются, что изучение материалов данной книги будет способствовать повышению общего уровня математической подготовки поступающих в вузы России и других стран, что в свою очередь крайне необходимо для успешного обучения в высшей школе во имя приобретения высокой квалификации в выбранной специальности.

РАЗДЕЛ I

1. ПРОГРАММА ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В МГУ им. М.В. ЛОМОНОСОВА (2001 год)

Настоящая программа действует с 1993 года на вступительных экзаменах по математике на всех факультетах МГУ, где эти экзамены проводятся. Она состоит из трех разделов.

В первом разделе перечислены основные математические понятия, которыми должен владеть поступающий как на письменном, так и на устном экзамене.

Второй раздел представляет собой перечень вопросов теоретической части устного экзамена. При подготовке к письменному экзамену целесообразно познакомиться с формулировками утверждений этого раздела.

В третьем разделе указано, какие навыки и умения требуются от поступающего на письменном и устном экзаменах.

Объем знаний и степень владения материалом, описанным в программе, соответствует курсу математики средней школы. Поступающий может пользоваться всем арсеналом средств из этого курса, включая и начала анализа. Однако для решения экзаменационных задач достаточно уверенного владения лишь теми понятиями и их свойствами, которые перечислены в настоящей программе. Объекты и факты, не изучаемые в общеобразовательной школе, также могут использоваться поступающим, но при условии, что он способен их пояснять и доказывать.

В связи с обилием учебников и регулярным их переизданием отдельные утверждения второго раздела могут в некоторых учебниках называться иначе, чем в программе, или даваться в виде задач, или вовсе отсутствовать. Такие случаи не освобождают поступающего от необходимости знать эти утверждения.

1.1. Основные понятия

1. Натуральные числа. Делимость. Простые и составные числа. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.
2. Целые, рациональные и действительные числа. Проценты. Модуль числа, степень, корень, арифметический корень, логарифм. Синус, косинус, тангенс, котангенс числа (угла). Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс числа.
3. Числовые и буквенные выражения. Равенства и тождества.
4. Функция, ее область определения и область значений. Возрастание, убывание, периодичность, четность, нечетность. Наибольшее и наименьшее значения функции. График функции.
5. Линейная, квадратичная, степенная, показательная, логарифмическая и тригонометрические функции.
6. Уравнение, неравенство, система. Решения (корни) уравнения, неравенства, системы. Равносильность.
7. Арифметическая и геометрическая прогрессии.
8. Прямая на плоскости. Луч, отрезок, ломаная, угол.
9. Треугольник. Медиана, биссектриса, высота.
10. Выпуклый многоугольник. Квадрат, прямоугольник, параллелограмм, ромб, трапеция. Правильный многоугольник. Диагональ.
11. Окружность и круг. Радиус, хорда, диаметр, касательная, секущая. Дуга окружности и круговой сектор. Центральные и вписанные углы.
12. Прямая и плоскость в пространстве. Двугранный угол.
13. Многогранник. Куб, параллелепипед, призма, пирамида.
14. Цилиндр, конус, шар и сфера.
15. Равенство и подобие фигур. Симметрия.
16. Параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей. Скрещивающиеся прямые. Угол между прямыми, плоскостями, прямой и плоскостью.
17. Касание. Вписанные и описанные фигуры на плоскости и в пространстве. Сечение фигуры плоскостью.
18. Величина угла. Длина отрезка, окружности и дуги окружности. Площадь многоугольника, круга и кругового сектора. Площадь поверхности и объем многогранника, цилиндра, конуса, шара.
19. Координатная прямая. Числовые промежутки. Декартовы координаты на плоскости и в пространстве. Векторы.

1.2. Содержание теоретической части устного экзамена

1.2.1. Алгебра

1. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10.
2. Свойства числовых неравенств.
3. Формулы сокращенного умножения.
4. Свойства линейной функции и ее график.
5. Формула корней квадратного уравнения. Теорема о разложении квадратного трехчлена на линейные множители. Теорема Виета.
6. Свойства квадратичной функции и ее график.
7. Неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел. Неравенство для суммы двух взаимно обратных чисел.
8. Формулы общего члена и суммы n первых членов арифметической прогрессии.
9. Формулы общего члена и суммы n первых членов геометрической прогрессии.
10. Свойства степеней с натуральными и целыми показателями. Свойства арифметических корней n-й степени. Свойства степеней с рациональными показателями.
11. Свойства степенной функции с целым показателем и ее график.
12. Свойства показательной функции и ее график.
13. Основное логарифмическое тождество. Логарифмы произведения, степени, частного. Формула перехода к новому основанию.
14. Свойства логарифмической функции и ее график.
15. Основное тригонометрическое тождество. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Формулы приведения, сложения, двойного и половинного аргумента, суммы и разности тригонометрических функций. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента. Преобразование произведения синусов и косинусов в сумму. Преобразование выражения $a\sin x + b\cos x$ с помощью вспомогательного аргумента.
16. Формулы решений простейших тригонометрических уравнений.
17. Свойства тригонометрических функций и их графики.

1.2.2. *Геометрия*

1. Теоремы о параллельных прямых на плоскости.
2. Свойства вертикальных и смежных углов.
3. Свойства равнобедренного треугольника.
4. Признаки равенства треугольников.
5. Теорема о сумме внутренних углов треугольника. Теорема о внешнем угле треугольника. Свойства средней линии треугольника.
6. Теорема Фалеса. Признаки подобия треугольников.
7. Признаки равенства и подобия прямоугольных треугольников. Пропорциональность отрезков в прямоугольном треугольнике. Теорема Пифагора.
8. Свойство серединного перпендикуляра к отрезку. Свойство биссектрисы угла.
9. Теоремы о пересечении медиан, пересечении биссектрис и пересечении высот треугольника.
10. Свойство отрезков, на которые биссектриса треугольника делит противоположную сторону.
11. Свойство касательной к окружности. Свойство касательных, проведенных из одной точки к окружности. Теоремы о вписанных углах. Теорема об угле, образованном касательной и хордой. Теоремы об угле между двумя пересекающимися хордами и об угле между двумя секущими, выходящими из одной точки. Равенство произведений отрезков двух пересекающихся хорд. Равенство квадрата касательной произведению секущей на ее внешнюю часть.
12. Свойство четырехугольника, вписанного в окружность. Свойство четырехугольника, описанного около окружности.
13. Теорема об окружности, вписанной в треугольник. Теорема об окружности, описанной около треугольника.
14. Теоремы синусов и косинусов для треугольника.
15. Теорема о сумме внутренних углов выпуклого многоугольника.
16. Признаки параллелограмма. Свойства параллелограмма.
17. Свойства средней линии трапеции.
18. Формула для вычисления расстояния между двумя точками на координатной плоскости. Уравнение окружности.
19. Теоремы о параллельных прямых в пространстве. Признак параллельности прямой и плоскости. Признак параллельности плоскостей.
20. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Теорема об общем перпендикуляре к двум скрещивающимся прямым. Признак перпендикулярности плоскостей. Теорема о трех перпендикулярах.

1.3. Требования к поступающему

На экзамене по математике поступающий должен уметь:
1) выполнять (без калькулятора) действия над числами и числовыми выражениями; преобразовывать буквенные выражения; проводить операции над векторами (сложение, умножение на число, скалярное произведение); переводить одни единицы измерения величин в другие;
2) сравнивать числа и находить их приближенные значения (без калькулятора); доказывать тождества и неравенства для буквенных выражений;
3) решать уравнения, неравенства, системы (в том числе с параметрами) и исследовать их решения;
4) исследовать функции; строить графики функций и множества точек на координатной плоскости, заданные уравнениями и неравенствами;
5) изображать геометрические фигуры на чертеже; делать дополнительные построения; строить сечения; исследовать взаимное расположение фигур; применять признаки равенства, подобия фигур и их принадлежности к тому или иному виду;
6) пользоваться свойствами чисел, векторов, функций и их графиков, свойствами арифметической и геометрической прогрессий;
7) пользоваться свойствами геометрических фигур, их характерных точек, линий и частей, свойствами равенства, подобия и взаимного расположения фигур;
8) пользоваться соотношениями и формулами, содержащими модули, степени, корни, логарифмические, тригонометрические выражения, величины углов, длины, площади, объемы;
9) составлять уравнения, неравенства и находить значения величин, исходя из условия задачи;
10) излагать и оформлять решение логически правильно, полно и последовательно, с необходимыми пояснениями;

На устном экзамене поступающий должен дополнительно уметь:

11) давать определения, формулировать и доказывать утверждения (формулы, соотношения, теоремы, признаки, свойства и т.п.), указанные во втором разделе настоящей программы;
12) анализировать формулировки утверждений и их доказательства;
13) решать задачи на построение циркулем, линейкой; находить геометрические места точек.

2. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ТЕОРЕМЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

2.1. Используемые обозначения

Данный перечень обозначений имеет цель познакомить абитуриентов с общепринятой в математике терминологией, широко применяемой для сокращения многих записей. Обозначения, применяемые в данной книге, для понятий и в формулах элементарной математики в дальнейшем будут постоянно применяться во всех курсах высшей математики, изучаемых в МГУ и других вузах. Поэтому знакомство с ними на стадии обучения на ПО представляется весьма целесообразным. Приводимый далее в п. 2.2. перечень формул и фактов представляет определенный их набор по разделам "Алгебра", "Геометрия", "Тригонометрия". Он охватывает большое количество используемых при решении задач формул, содержит, в частности, формулы, традиционно не включаемые в опубликованные ранее справочники, брошюры, памятки и т.п. для поступающих в вузы, особенно в разделе "Тригонометрия". Ряд формул, например, для модуля числа и некоторые другие приводятся в нетрадиционном, но достаточно емком виде. Отметим еще, что основной упор в списке формул делается на использование обозначений, чертежей и т.п. и весьма незначительного количества слов. В дополнение к материалу этого раздела можно использовать, например, справочные пособия [13] — [16].

2.1.1. Алгебра и некоторые формулы векторной алгебры

X — множество ; ОДЗ — область допустимых значений ;
$\{a\}$ — множество, состоящее из одного элемента a ;
$\cup$ — объединение, $\cap$ — пересечение, $\varnothing$ — пустое множество ;
$\in$ — знак принадлежности, $\notin$ — не принадлежит ;
$\subset$, $\subseteq$ — знаки включения, $\supset$, $\supseteq$ — знаки "содержит" ;
$\forall$ — "любой", "для любого" ; $\exists$ — "существует",
$\nexists$ — "не существует", $\exists!$ — "существует единственный" ;
$\Rightarrow$ — следует, $\Leftrightarrow$ или $\Longleftrightarrow$ — "имеет место тогда и только тогда" ;
$\overset{df}{—}$ "есть по определению", $\overset{df}{=}$ — "равно по определению" ;
$D[f]$ — область определения функции $y = f(x)$;
$E[f]$ — область изменения (значений) функции $y = f(x)$;
$\vee$ — "сравнить", $\leftrightarrow$ — знак взаимно однозначного соответствия ; *

* Если любому из элементов первого из двух множеств поставлен в соответствие единственный элемент второго из этих множеств, причем каждый элемент второго множества соответствует хотя бы одному элементу первого множества, разным элементам первого множества соответствуют разные элементы второго множества, то говорят, что между этими множествами установлено взаимно однозначное соответствие.

$\div$ — знак арифметической прогрессии ;

$\div\!\div$ — знак геометрической прогрессии ;

$$N = \{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \dots\ ,\ n\ ,\ \dots\}\ ,\quad N \cup \{0\} = N_0\ ;$$

$$Z = \{\dots\ ,\ -n\ ,\ \dots\ ,\ -3\ ,\ -2\ ,\ -1\} \cup N_0\ ;$$

$$Q = \left\{ \frac{p}{q},\ p \in Z,\ q \in Z \quad (q \neq 0) \right\}\ ;$$

$\vdots$ — деление нацело: пусть $m, n \in Z,\ n \neq 0$

$$m \vdots n \overset{df}{\Longleftrightarrow} \text{ если } \exists p \in Z \quad m = p \cdot n,$$

Н.О.Д.$(m; n)$ — наибольший общий делитель чисел m и n, где $m, n \in N$;

Н.О.К.$(m; n)$ — наименьшее общее кратное чисел m и n, где $m, n \in N$;

$R = \{0 = 0,00\dots0\dots;\ \ +a_0, a_1a_2a_3\dots a_n\dots,\ \ -a_0, a_1a_2\dots a_n\dots:$
$a_0 \in N_0,\quad \forall k \in N\ a_k \in N_0,\ a_k \leqslant 9$ и $\exists a_{k_0} \neq 0,\ \ k_0 \in N_0\}$;

$\pm$ — первое $+$, второе $-$; $a = \pm a_0, a_1a_2a_3\dots a_n\dots,\quad \exists a_{k_0} \neq 0$ — не равная нулю десятичная дробь, если перед числом a стоит знак " $+$ " или не стоит знак, то a — положительное число $(a > 0)$,
а если перед a стоит знак " $-$ ", a — отрицательное число $(a < 0)$;

$$a = \pm a_0, a_1a_2\dots a_ka_{k+1}a_{k+2}\dots a_{k+l}a_{k+1}a_{k+2}\dots a_{k+l}\dots =$$

$= \pm a_0, a_1a_2\dots a_k(a_{k+1}a_{k+2}\dots a_{k+l}) \overset{df}{\Longleftrightarrow}$ периодическая десятичная дробь, т.е. $\exists k \in N_0,\ l \in N :\ \forall i > k \Rightarrow a_i = a_{i+l}$,

$a_0, (9) = (a_0 + 1), (0)$; если $\exists a_k \leqslant 8,\ \ k \in N$, то

$a_0, a_1a_2\dots a_k(9) = a_0, a_1a_2\dots(a_k + 1)(0) = a_0, a_1a_2\dots(a_k + 1)$ — конечная десятичная дробь;

если $\forall k \in N_0,\ l \in N \quad \exists i_0 > k :\ a_{i_0+l} \neq a_{i_0}$, то

$\pm a_0, a_1a_2\dots a_n\dots \overset{df}{\Longleftrightarrow}$ непериодическая десятичная дробь ;

если $a_0 = \overline{b_{m-1}b_{m-2}\dots b_1b_0}$ — m - значное число, то

$$\pm a_0, a_1a_2\dots a_k(a_{k+1}\dots a_{k+l}) =$$

$$= \pm \frac{\overline{b_{m-1}\dots b_0a_1\dots a_ka_{k+1}\dots a_{k+l}} - \overline{b_{m-1}\dots b_0a_1\dots a_k}}{\underbrace{99\dots9}_{l}\underbrace{00\dots0}_{k}}\ —$$

формула перевода периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь

$\{x_n\}$ или $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — последовательность,

x_n $(n \in N)$ — ее n - й член $(x_n \in R)$.

$\pi = 3,14159...$ — иррациональное число, равное отношению длины окружности к диаметру, постоянное для любой окружности.

"$\{$" — пересечение, система (и) ;

"$[$" — объединение, совокупность (или) .

$\gtrless$ — больше, или меньше, или равно ; $\gneqq$ — больше, или меньше (то есть не равно) ; $\neq$ — не равно .

$\equiv$ — знак тождественного равенства выражений или совпадения точек, прямых, плоскостей и т.п.

$\%$ — процент ; S — сумма , , Π — произведение ,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_n \ , \ \Pi_n = \prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n \ , \ n \in N \ ,$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^{1} x_i = x_1 = \prod_{i=1}^{1} x_i = \Pi_1 \ ;$$

$|x|$, $x \in R$ — модуль или абсолютная величина действительного числа ;

$\{x \in X : \ P(x)\}$ — совокупность элементов x из множества X, для которых выполнено свойство $P(x)$.

Числовая ось

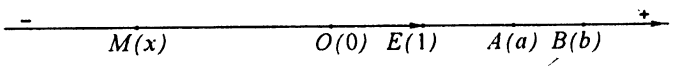


рис. 1

M—$M(x)$, $x \in R$ — координата точки M на числовой оси;

O—$O(0)$ — начало координат;

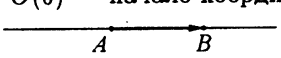


рис. 2

$\overline{AB}$— направленный отрезок, он же — вектор $\overrightarrow{AB}$.

A — начальная точка (начало) или точка приложения вектора, B — конечная точка (конец) вектора. Если точки A и B различные, то вектор характеризуется направлением (от начала к концу).

E—$E(1)$: $\overline{OE}$ — масштабный отрезок;

$$|AB| = |b - a| = |\overline{AB}| = |\overrightarrow{AB}|$$

— длина направленного отрезка $\overline{AB}$ или длина вектора $\overrightarrow{AB}$, $|OE| = 1$;

$$AB = b - a \quad A\text{—}A(a), \ B\text{—}B(b)$$

— величина направленного отрезка $\overline{AB}$, который лежит или параллелен числовой (координатной) оси.

Если точки B и A совпадают, то отрезок AA и вектор $\overrightarrow{AA}$ называются нулевыми. Их длины равны нулю. Величина нулевого отрезка равна нулю. Направления нулевого отрезка и нулевого вектора считаются неопределенными. $\vec{0}$ — обозначение нулевого вектора.

Числовые промежутки

1) $[a,b] \stackrel{df}{=} \{x \in R: \quad a \leqslant x \leqslant b\}$; 2) $(a,b] \stackrel{df}{=} \{x \in R: \quad a < x \leqslant b\}$;

3) $[a,b) \stackrel{df}{=} \{x \in R: \quad a \leqslant x < b\}$; 4) $(a,b) \stackrel{df}{=} \{x \in R: \quad a < x < b\}$;

5) $[a,+\infty) \stackrel{df}{=} \{x \in R: \quad x \geqslant a\}$; 6) $(a,+\infty) \stackrel{df}{=} \{x \in R: \quad x > a\}$;

7) $(-\infty,a] \stackrel{df}{=} \{x \in R: \quad x \leqslant a\}$; 8) $(-\infty,a) \stackrel{df}{=} \{x \in R: \quad x < a\}$;

9) $(-\infty,+\infty) \stackrel{df}{=} R$.

1) $\stackrel{df}{—}$ отрезок или сегмент ; 2) , 3) $\stackrel{df}{—}$ полуотрезки, или полусегменты, или полуинтервалы ; 4) $\stackrel{df}{—}$ интервал ;

5) , 7) $\stackrel{df}{—}$ замкнутые лучи или замкнутые полупрямые ;

6) , 8) $\stackrel{df}{—}$ открытые лучи или открытые полупрямые ;

9) — числовая прямая (множество действительных чисел).

1) — 4) $\stackrel{df}{—}$ конечные или ограниченные числовые промежутки ;

5) — 9) $\stackrel{df}{—}$ бесконечные или неограниченные числовые промежутки.

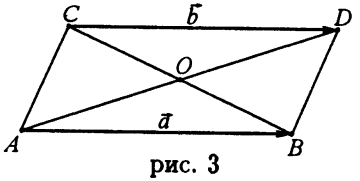


рис. 3

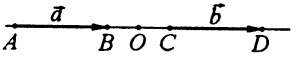


рис. 4

Ненулевые $\vec{a} = \overrightarrow{AB} \stackrel{df}{=} \overrightarrow{CD} = \vec{b}$, если совпадают середины отрезков AD и BC. Нулевые векторы по определению считаются равными.

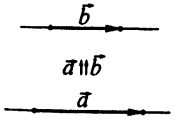


рис. 5

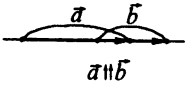


рис. 6

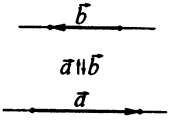


рис. 7

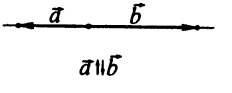


рис. 8

$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, если эти векторы ненулевые, лежат на одной прямой или на параллельных прямых (коллинеарны) и имеют совпадающие направления;

$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, если эти векторы ненулевые, лежат на одной прямой или на параллельных прямых (коллинеарны) и имеют противоположные направления.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Для любых трех точек A, B, C $\overrightarrow{AC} \stackrel{df}{=} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$;

$$\vec{c} \stackrel{df}{=} \vec{a} - \vec{b}, \quad \text{если} \quad \vec{c} + \vec{b} = \vec{a}.$$

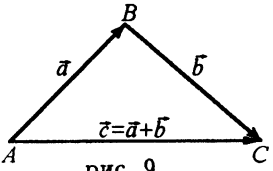


рис. 9

$\vec{c} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$ — сумма двух векторов по правилу треугольника;

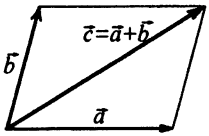


рис. 10

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ — сумма двух векторов по правилу параллелограмма;

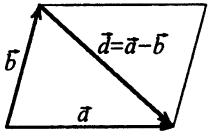


рис. 11

$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ — разность двух векторов

Пусть $\vec{a}$ — ненулевой, $\vec{b} \stackrel{df}{=} \alpha \cdot \vec{a}$ — произведению действительного числа α на вектор $\vec{a}$, если $|\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$, $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ при $\alpha > 0$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ при $\alpha < 0$. По определению считают: $\forall \vec{a} \quad 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ — нулевому вектору; $\forall \alpha \in R \quad \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$. В обоих этих случаях (то есть при $\alpha = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$) имеет место равенство $|\alpha \cdot \vec{a}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$.

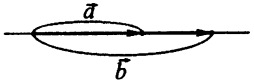


рис. 12

$\vec{b} = \alpha\vec{a}, \quad \alpha > 0$

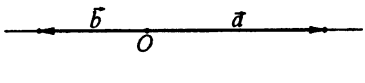


рис. 13

$\vec{b} = \alpha\vec{a}, \quad \alpha < 0$

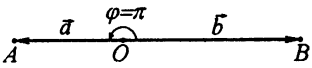


рис. 14 а)

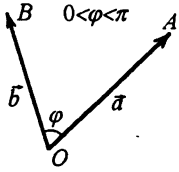


рис. 14 б)

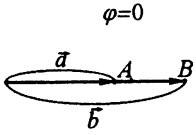


рис. 14 в)

Если векторы $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ имеют одно и то же начало и ненулевые, то $\varphi = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ — величина угла между этими векторами, которая по определению есть величина угла между лучами OA и OB, причем $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$;

$(\vec{a}, \vec{b}) \stackrel{df}{=} |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi$ — скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, то угол между этими векторами считается неопределенным, а $(\vec{a}, \vec{b}) \stackrel{df}{=} 0$.

Декартова прямоугольная система координат Oxy

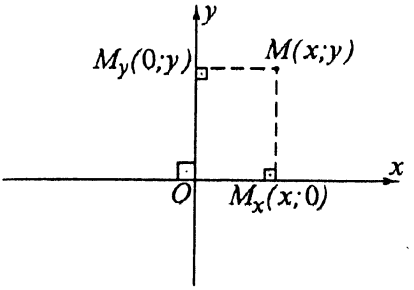
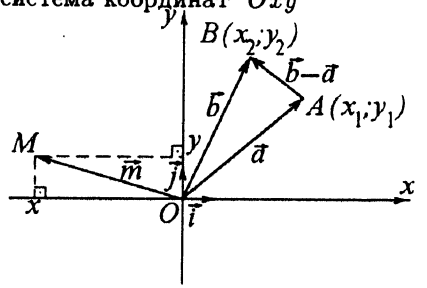


рис. 15



A — $A(x_1; y_1)$; B — $B(x_2; y_2)$

рис. 16

M—$M(x; y)$ x — абсцисса точки M, y — ордината точки M,
$(x; y)$ — координаты точки M в прямоугольной системе координат,

O—$O(0; 0)$ — начало координат ,

Ox; Oy — координатные оси абсцисс и ординат соответственно;
$\{x; y\}$ — координаты вектора $\vec{m} = \overrightarrow{OM}$,
$\overrightarrow{OM}$—$\overrightarrow{OM}\{x; y\} = \{x; y\} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\vec{0} = \{0; 0\}$,
где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — единичные векторы (то есть $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$), направленные в положительном направлении оси Ox и соответственно оси Oy.

Пусть $\begin{array}{l} \vec{a} = \overrightarrow{OA} = \{x_1; y_1\} , \\ \vec{b} = \overrightarrow{OB} = \{x_2; y_2\} ; \end{array}$ $\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = x_2 , \\ y_1 = y_2 ; \end{cases}$

$\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$; $\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$;

$\forall \alpha \in R \qquad \alpha\overrightarrow{OM} = \alpha\vec{m} = \{\alpha x; \alpha y\}; \qquad |\overrightarrow{OM}| = |\vec{m}| = \sqrt{x^2 + y^2}$;

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} ;$$

прямая $\ell \in Oxy$: $ax + by = c$, $a \neq 0$ или $b \neq 0$ $a, b, c \in R$;

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 ;$$

если $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, то $\varphi = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \arccos \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$.

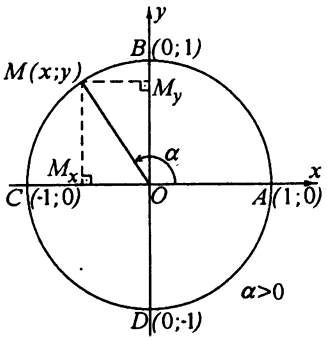


рис. 17

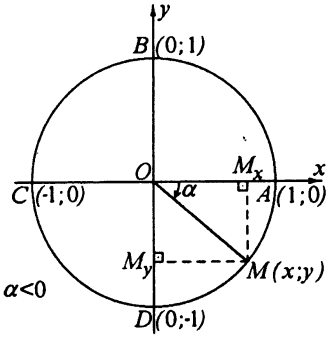


рис. 18

$$\sin\alpha \stackrel{df}{=} y = OM_y \quad ; \quad \cos\alpha \stackrel{df}{=} x = OM_x$$

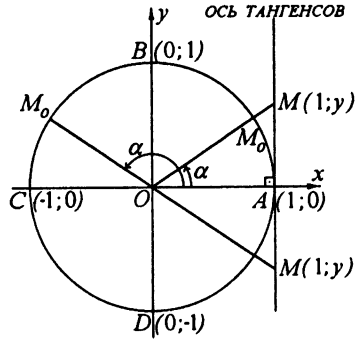


рис. 19

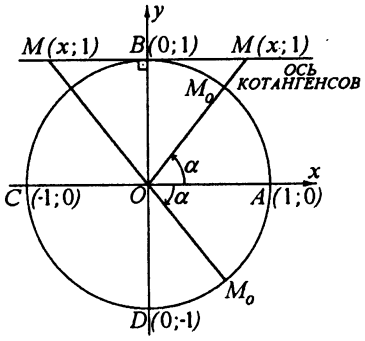


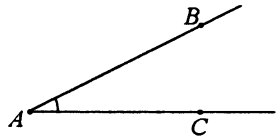
рис. 20

$$\mathrm{tg}\alpha \stackrel{df}{=} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = AM = y \quad ; \quad \mathrm{ctg}\alpha \stackrel{df}{=} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = BM = x$$



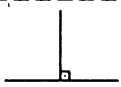
AB — отрезок;

рис. 21



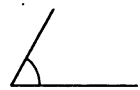
$\angle BAC$ — угол;

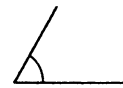
рис. 22



— прямой угол;

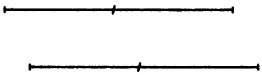
рис. 23





— равные углы;

рис. 24



— равные отрезки;

рис. 25

$\angle$ — знак угла; $\triangle$ — знак треугольника; $\#$ — знак параллелограмма;
$\|$ — параллельность, $\perp$ — перпендикулярность, $\sim$ — подобие;
$a = |AB|$ — длина отрезка; $\alpha = \angle BAC$ или $\alpha = \widehat{BAC}$ — мера (величина) угла;
$(O; R)$ — окружность или сфера с центром в точке O радиуса R;
$|AB| \stackrel{df}{=} \rho(A; B)$ — расстояние между точками A и B ;
$\rho(A; a)$ $(\rho(A; \alpha))$ — расстояние от точки A до прямой a (плоскости α),
$\rho(A; a)$ $(\rho(A; \alpha)) \stackrel{df}{=} |AA_0|$, где $A_0 \in a$ $(A_0 \in \alpha)$, $AA_0 \perp a$ $(AA_0 \perp \alpha)$;
h_a — длина высоты треугольника, проведенной к его стороне длины a;
l_b — длина биссектрисы треугольника, проведенной к его стороне длины b;
m_c — длина медианы треугольника, проведенной к его стороне длины ;
P — периметр; p — полупериметр; S — площадь; V — объем;
C — длина окружности; R или r — радиус окружности;
$S_\triangle$ — площадь треугольника; $S_\#$ — площадь параллелограмма;
$V_{\text{пр}}$ — объем призмы; $V_{\text{пир}}$ — объем пирамиды;
$V_{\text{ц}}$ — объем цилиндра; $V_{\text{к}}$ — объем конуса;

ГМТ (геометрическое место точек) — множество точек на прямой, на плоскости или в пространстве, каждая из которых обладает одним и тем же свойством, и любая точка, не принадлежащая этому множеству, этим свойством не обладает.

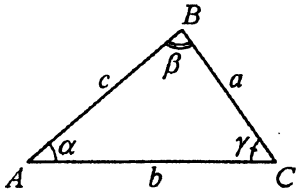


рис. 26

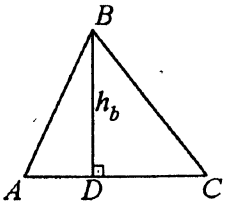


рис. 27

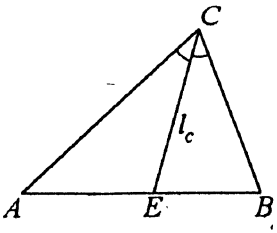


рис. 28

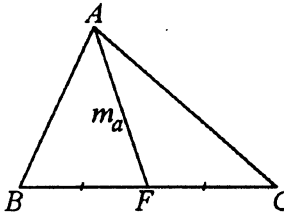


рис. 29

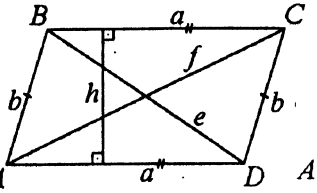


рис. 30

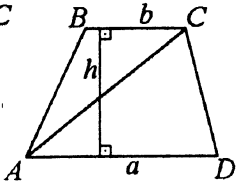


рис. 31

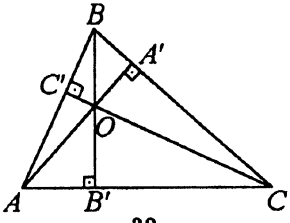


рис. 32

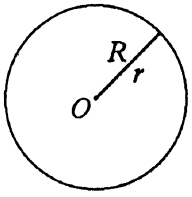


рис. 33

h — длина высоты плоской фигуры, опущенной на ее основание;
H — длина высоты тела, опущенной на его основание;
$r = r_{вп}$ — радиус вписанной в плоскую фигуру окружности или вписанной в пространственное тело сферы;
$R = R_{оп}$ — радиус описанной около плоской фигуры окружности или описанной около пространственного тела сферы;
$S = S_б$ — площадь боковой поверхности пространственного тела, она равна сумме площадей боковых граней тела;
$S = S_о$ — площадь основания пространственного тела (площадь грани основания);
$S = S_п = S_о + S_б$ — площадь полной поверхности пространственного тела.

2.2. Формулы и факты элементарной математики

2.2.1. Алгебра

$$a = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + 10 \cdot a_1 + a_0 \in N,$$
$$a_j \in N_0,\ a_j \leqslant 9,\ j = 0; 1; \ldots; n\ \ (a_n \neq 0)\ .$$

$$a_0 = 0; 2; 4; 6; 8 \iff a \vdots 2\ ;\ a_0 = 0 \iff a \vdots 10\ ;\ a_0 = 0; 5 \iff a \vdots 5\ ;$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) \vdots 3 \iff a \vdots 3\ ;\ \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) \vdots 9 \iff a \vdots 9\ .$$

$$\forall a\ ,\ b\ ,\ x\ \in R$$

$$x \geqslant 0 \Rightarrow |x| = x\ ;\ x \leqslant 0 \Rightarrow |x| = -x\ ;\ |a \pm b| \leqslant |a| + |b|\ ;\ ||a| - |b|| \leqslant |a - b|\ ;$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|\ ;\ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}\ ,\ b \neq 0\ ;\quad |f(x)| = \left[\begin{array}{ll} f(x), & \forall x \in D[f] : f(x) \geqslant 0\ ; \\ -f(x), & \forall x \in D[f] : f(x) \leqslant 0\ . \end{array}\right.$$

$$\forall n \in N$$

$$\exists\ \sqrt[2n]{f(x)} \in R \iff f(x) \geqslant 0\ ;\ \exists\ \sqrt[2n-1]{f(x)} \in R \iff f(x) \gtrless 0\ ;$$

$$\exists\ \frac{g(x)}{h(x)} \text{ и } \exists\ \log_a |h(x)| \iff h(x) \gtrless 0\ ,\ \text{то есть } h(x) \neq 0\ (0 < a \neq 1)\ .$$

$$\forall a, b, c, d \in R$$

$$a + b = b + a\ ,\ (a + b) + c = a + (b + c)\ ,\ a + 0 = a\ ,\ a + (-a) = 0\ ,$$

$$a \cdot b = b \cdot a\ ,\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c\ ,\ a \cdot 1 = a\ ,\ a \cdot 0 = 0\ ,\ a \cdot \frac{1}{a} = 1\ (a \neq 0)\ ,$$

$$(a \pm b) \cdot c = a \cdot c \pm b \cdot c\ ,\ c \stackrel{df}{=} a - b\ ,\ \text{если } c + b = a\ ,$$

$$d \stackrel{df}{=} \frac{a}{b}\ ,\ b \neq 0,\ \text{если } d \cdot b = a\ ,\quad a, b \in Z\ ,\ b \neq 0\ \ a \vdots b\ ,\ \text{если } \exists d \in Z\ :\ d \cdot b = a\ ;$$

$$a > b \iff b < a\ ;\ \left[\begin{array}{l} a = b\ ; \\ a > b \end{array}\right. \stackrel{df}{\iff} a \geqslant b \iff b \leqslant a \stackrel{df}{\iff} \left[\begin{array}{l} a = b\ ; \\ b < a \end{array}\right.\ ;$$

$$a \cdot d = b \cdot c \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}\ , \quad b \neq 0\ ,\ d \neq 0\ ;$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}\ ;\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}\ ,\ b \neq 0, d \neq 0\ ;$$

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}\ , c \neq 0\ ;\ \frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}\ ,\ b, c \neq 0\ ;\ (a-b)(c-d) \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b\ ; \\ c = d\ ; \\ \left\{\begin{array}{l} a > b\ , \\ c > d\ ; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a < b\ , \\ c < d\ ; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > bc\ ,\ b > 0, d > 0\ ;\ \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}\ ,\ b, c, d \neq 0\ ;$$

$$\max(a; b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}\ ;\ \min(a; b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}\ ;$$

$$\forall a \in Z\ ,\ b \in N \quad \exists!\ q \in Z\ , r \in N_0,\ 0 \leqslant r \leqslant b - 1\ :\ a = bq + r\ .$$

$$y = ax + b \perp y = -\frac{1}{a} \cdot x + c\ \ (a \neq 0)\ ;\ y = ax + c \parallel y = ax + d\ \ (c \neq d)\ ;$$

$$y = b \perp x = a\ ;\ x = c \parallel x = d\ \ (c \neq d)\ .$$

$$a_j, b_j, c_j\ (j = 1; 2)\ ,\ x, y\ \in R\ ^*$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y = c_1\ , \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \triangle \cdot x = \triangle_x\ , \\ \triangle \cdot y = \triangle_y\ ; \end{array}\right.$$

$$\triangle = \left|\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array}\right| \stackrel{df}{=} a_1 b_2 - a_2 b_1 \text{ — определитель матрицы } \left(\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array}\right)\ ,$$

$$\triangle_x = \left|\begin{array}{cc} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{array}\right| = c_1 b_2 - c_2 b_1\ ,\ \ \triangle_y = \left|\begin{array}{cc} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{array}\right| = a_1 c_2 - a_2 c_1\ .$$

$$\text{I.}\quad \triangle \neq 0\ \Rightarrow\ \exists!\ (x_0; y_0)\ :\ \left\{\begin{array}{ll} a_1 x_0 + b_1 y_0 = c_1\ , & x_0 = \dfrac{\triangle_x}{\triangle}\ ; \\ a_2 x_0 + b_2 y_0 = c_2\ , & y_0 = \dfrac{\triangle_y}{\triangle}\ ; \end{array}\right.$$

* На самом деле $a_j, b_j, c_j\ (j = 1; 2)$, x, y могут быть и комплексными числами, которые изучаются в курсе математики на подготовительном отделении МГУ.

геометрический смысл: $\begin{matrix}\ell_1 : a_1x+b_1y=c_1\,,\\ \ell_2 : a_2x+b_2y=c_2\,,\end{matrix} \Rightarrow \ell_1 \cap \ell_2 = \{M_0(x_0;y_0)\}\,.$

II. $\left\{\begin{array}{l}\Delta = 0\,,\\ \left[\begin{array}{l}\Delta_x \neq 0\,;\\ \Delta_y \neq 0\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \nexists\,(x_0;y_0) : \left\{\begin{array}{l}a_1x_0+b_1y_0=c_1\,,\\ a_2x_0+b_2y_0=c_2\,;\end{array}\right.$

геометрический смысл: если $\begin{matrix}\ell_1 : a_1x+b_1y=c_1\,,\\ \ell_2 : a_2x+b_2y=c_2\,,\end{matrix} \Rightarrow \ell_1 \parallel \ell_2\,.$

III. $\left\{\begin{array}{l}\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0\,,\\ \left[\begin{array}{l}a_1 \neq 0\,;\\ b_1 \neq 0\,;\\ a_2 \neq 0\,;\\ b_2 \neq 0\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \exists\,(x_t;y_t) : \left\{\begin{array}{l}a_1x_t+b_1y_t=c_1\,,\\ a_2x_t+b_2y_t=c_2\,;\end{array}\right.$

$a_j \neq 0$: $y_t = t\,;$ $\quad$ $b_j \neq 0$: $x_t = t\,;$

$(j = 1$ или $2)$ $x_t = \dfrac{c_j - b_jt}{a_j}$; $\quad$ $(j = 1$ или $2)$ $y_t = \dfrac{c_j - a_jt}{b_j}$ $\forall t \in R\,;$

геометричеєкий смысл: если $\begin{matrix}\ell_1 : a_1x+b_1y=c_1\,,\\ \ell_2 : a_2x+b_2y=c_2\,,\end{matrix} \Rightarrow \ell_1 \equiv \ell_2\,.$

$$\forall a,b,c,x \in R$$

$$\exists\, f(x) = ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} \quad (a \neq 0)\,,$$

$$D = b^2-4ac\,,$$

$$f(x) = 0 \iff \left[\begin{array}{l}x = x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}\,;\\ x = x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}\end{array}\right. \quad (D \geqslant 0)\,;$$

$$x_1+x_2 = -\frac{b}{a}\,, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}\,;$$

при $a > 0$, $D > 0$

$$f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty) ,$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty) ,$$

$$f(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [x_1, x_2] , \ f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (x_1, x_2) ;$$

при $a > 0$, $D = 0$

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in (-\infty, +\infty), \ x \neq -\frac{b}{2a} , \ f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in R ,$$

$$f(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} , \ f(x) < 0 \quad — \quad \varnothing ;$$

при $a > 0$, $D < 0$

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in (-\infty, +\infty) ,$$

$$f(x) \leqslant 0 \quad — \quad \varnothing .$$

$$\forall x \in R, \ x \neq 0 \ \Rightarrow \ \left|x + \frac{1}{x}\right| = |x| + \frac{1}{|x|} \geqslant 2, \quad \left|x + \frac{1}{x}\right| = 2 \ \Leftrightarrow \ |x| = 1 ;$$

$$\forall a, b \in R, \ a, b \geqslant 0 \ \Rightarrow \ a + b \geqslant 2\sqrt{a \cdot b}, \quad a + b = 2\sqrt{a \cdot b} \ \Leftrightarrow \ a = b .$$

$$\forall a, b, x, y \in R , \ a, b > 0$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x ; \ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} ; \ a^{x+y} = a^x \cdot a^y ;$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} ; \ (a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x .$$

$$\forall a,b,c,\alpha \in R, \quad a,b>0\ ,\ 0<c\neq 1$$
$$c^{\log_c a}=a\ ;\ \log_c c=1\ ;\ \log_c 1=0\ ;$$

$$\log_c(ab)=\log_c a+\log_c b\ ,\ \forall a,b\in R,\ \ ab>0\ \Rightarrow\ \log_c ab=\log_c|a|+\log_c|b|\ ;$$

$$\log_c\left(\frac{a}{b}\right)=\log_c a-\log_c b\ ,\ \forall a,b\in R,\ \ ab>0\ \Rightarrow\ \log_c\frac{a}{b}=\log_c|a|-\log_c|b|\ ;$$

$$\log_c a^{\alpha}=\alpha\cdot\log_c a\ ,\quad \forall a\neq 0\ ,\ \forall n\in Z\ \Rightarrow\ \log_c a^{2n}=2n\cdot\log_c|a|\ ;$$

$$\log_{c^{\alpha}} a=\frac{1}{\alpha}\cdot\log_c a\quad(\alpha\neq 0)\ ;$$

$$\forall c\neq 0, c\neq\pm 1\ ,\ \forall n\in Z\ ,\ n\neq 0\quad \log_{c^{2n}} a=\frac{1}{2n}\cdot\log_{|c|} a\ ;$$

$$\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}\quad(b\neq 1)\ ;\ \log_b a=\frac{1}{\log_a b}\quad(a\neq 1\ ,\ b\neq 1)\ .$$

$$\log_{g(x)} f(x)\ \geqslant 0\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l} g(x)>1\ ,\\ f(x)\geqslant 1\ ;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} 0<g(x)<1\ ,\\ 0<f(x)\leqslant 1\ ;\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\log_{g(x)} f(x)\ <0\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l} g(x)>1\ ,\\ 0<f(x)<1\ ;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l} 0<g(x)<1\ ,\\ f(x)>1\ .\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\forall x\in R,\ \forall n,k\in N\qquad \sqrt[n]{x^n}=\left[\begin{array}{ll} x, & n=2k-1\ ;\\ |x|, & n=2k\ .\end{array}\right.$$

$$\forall a,b\in R\ ,\quad \forall n\in N$$

$$a^{2n}-b^{2n}=(a^n+b^n)(a^n-b^n)=$$
$$=(a-b)(a^{2n-1}+a^{2n-2}b+a^{2n-3}b^2+\ldots+ab^{2n-2}+b^{2n-1})\ ,$$

$$a^{2n+1}\pm b^{2n+1}=$$
$$=(a\pm b)(a^{2n}\mp a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2\mp\ldots\mp ab^{2n-1}+b^{2n})\ ,$$

$$[a+(\pm b)]^n = a^n + na^{n-1}(\pm b) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}(\pm b)^3 + \ldots + na(\pm b)^{n-1} + (\pm b)^n \ .$$

$\{a_n\} \overset{df}{—} \div$ если $\exists d \in R \ \forall n \in N \Rightarrow a_{n+1} = a_n + d$,

$\forall n \in N \ a_n = a_1 + d(n-1)$, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) n = \frac{(2a_1 + d(n-1))n}{2}$,

$\{a_n\} — \div \iff \forall n \in N, \ n \geqslant 2 \Rightarrow 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$;

$\{b_n\} \overset{df}{—} \div\div$ если $\exists q \in R \ \forall n \in N \ b_{n+1} = b_n \cdot q$,

$\forall n \in N \ b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$,* $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i = \frac{b_{n+1} - b_1}{q-1} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1} \quad (q \neq 1)$,

$S_n = nb_1 \quad (q = 1)$, $S = \frac{b_1}{1-q} \quad (|q| < 1, \ S_n \to S$ при $n \to +\infty)$,

$\{b_n\} — \div\div \iff \forall n \in N, \ n \geqslant 2 \Rightarrow b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

$\triangle\%$ от числа a — $a \cdot \frac{\triangle}{100} = a \cdot 0,01\triangle = a \cdot (\triangle\% : 100\%)$,

$a(1 + 0,01\triangle_1)(1 + 0,01\triangle_2)\ldots(1 + 0,01\triangle_n)$ — сложный процент ,

$\triangle_i > -100 \qquad i = 1; \ 2; \ \ldots n$,

$a(1 + 0,01\triangle)^n \quad (\triangle_i = \triangle = const \quad i = 1; \ 2; \ \ldots; n)$.

$\forall x \in D[f] \Rightarrow -x \in D[f] \quad \left[\begin{array}{l} f(x) = f(-x) \ \overset{df}{—} \text{ четная функция ;} \\ g(x) = -g(-x) \ \overset{df}{—} \text{ нечетная функция} \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \forall \ h(x) = f(x) + g(x), \quad \left[\begin{array}{l} f(x) = \frac{h(x) + h(-x)}{2} \ , \ f(-x) = f(x) \ ; \\ g(x) = \frac{h(x) - h(-x)}{2} \ , \ g(-x) = -g(x) \ ; \end{array}\right.$

$\exists \, T \neq 0 \ : \ \forall x \in D[f] \quad x \pm T \ \in D[f]$,

$f(x) = f(x + T) \ \overset{df}{—}$ периодическая функция .

---

* Если $q = 0$, то это равенство верно $\forall n \in N$, $n \geqslant 2$.

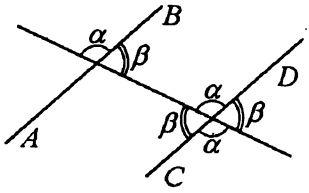


рис. 34

$\alpha + \beta = \pi$
$AB \parallel CD$

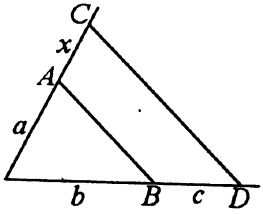


рис. 35

$AB \parallel CD$
$a : b = x : c$

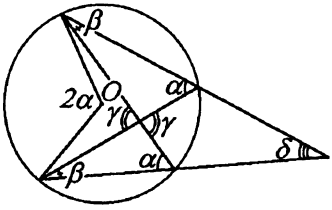


рис. 36

$\gamma = \alpha + \beta$
$\delta = \alpha - \beta$

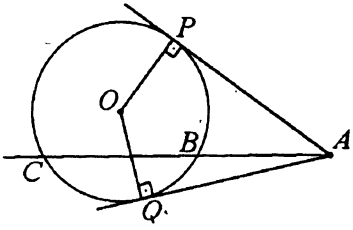


рис. 37

$|AP| = |AQ|$
$|AP|^2 = |AB| \cdot |AC|$

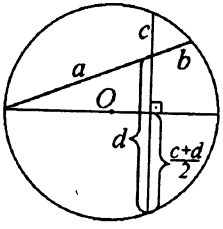


рис. 38

$a \cdot b = c \cdot d$

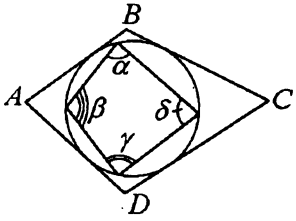


рис. 39

$\alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi$
$|AD| + |BC| = |AB| + |DC|$

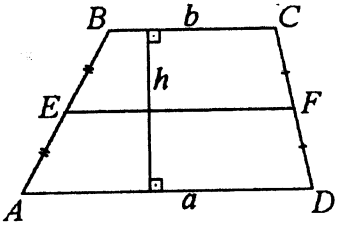


рис. 40

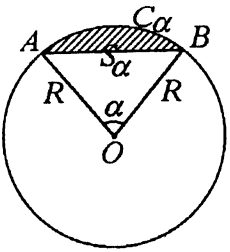


рис. 41.

$AD \parallel BC$,
$\widehat{A} + \widehat{B} = \pi$, $\widehat{D} + \widehat{C} = \pi$,
$|EF| = \dfrac{a+b}{2}$, $S_{\text{▱}} = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$

$C = 2\pi R, S = \pi R^2, C_\alpha = R\alpha$,
$2S_\alpha = R^2\alpha$,
$2S_{\text{◓}} = R^2(\alpha - \sin\alpha) = 2(S_\alpha - S_{\triangle OAB})$

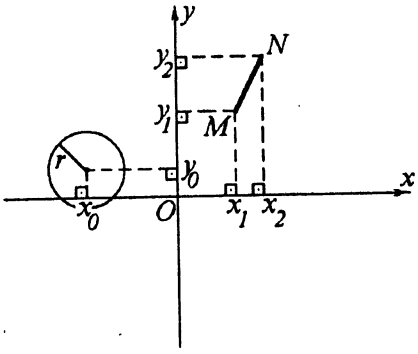


рис. 42

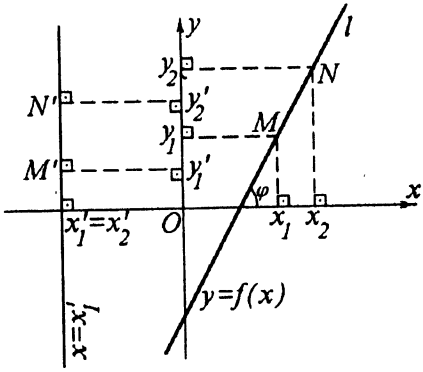


рис. 43

(см. рис. 42) $M(x_1; y_1)$ $N(x_2; y_2)$ $|MN| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

(см. рис. 42) $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$

$(x_1 \neq x_2)$ $y = f(x) = x\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} + \dfrac{y_2 x_1 - y_1 x_2}{x_1 - x_2}$, $(x_1' = x_2')$ $x = x_1'$ $(y$—$\forall)$

(см. рис. 43)

прямая $l \in Oxy$: $\overbrace{y = kx + b}$ $(k, b \in R)$, $\Rightarrow$ $k = \operatorname{tg}\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $\varphi \neq \pi/2$,
$\varphi = (l$; " + " направление $Ox)$, $\varphi = \pi/2 \Leftrightarrow l \in Oxy$: $x = a$ $(a \in R)$

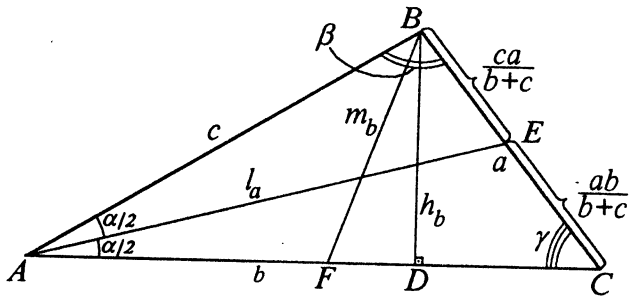


рис. 44

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi;\quad p=\frac{a+b+c}{2};\quad \alpha>\beta \iff a>b;$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma\quad(\cos\gamma=0\Rightarrow c^2=a^2+b^2);$$

$$h_b{}^2\leqslant l_b{}^2\leqslant m_b{}^2;$$

$$m_b=\frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2};$$

$$2R=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma};$$

$$l_a{}^2=bc\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right];$$

$$2S=2rp=bh_b=2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=ab\sin\gamma=ab\sin(\alpha+\beta)=\frac{abc}{2R}$$

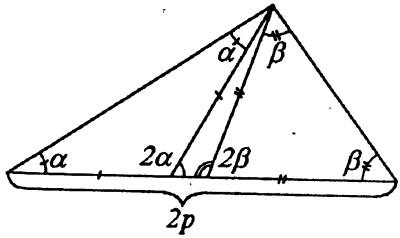


рис. 45

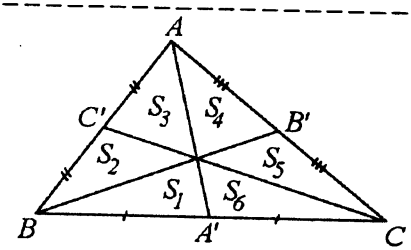


рис. 46

$$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6=\frac{S}{6}$$

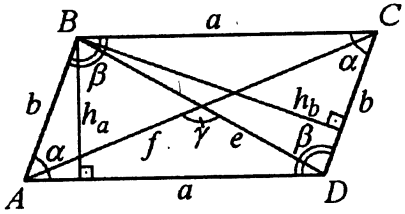


рис. 47

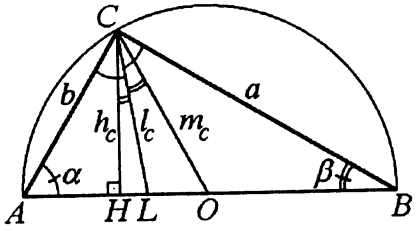


рис. 48

$\alpha + \beta = \pi$

$2a^2 + 2b^2 = |AC|^2 + |BD|^2 = e^2 + f^2;$

$2m_c = c = \sqrt{a^2 + b^2} = |AB|;$

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2};$

$S_{\#} = ab\sin\alpha = ab\sin\beta = \frac{ef\sin\gamma}{2} = ah_a = bh_b;$

$h_c = \sqrt{|AH| \cdot |HB|};$

$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad S = ab = \frac{ef\sin\gamma}{2}\,.$

$\angle\, HCL = \angle\, LCO\,.$

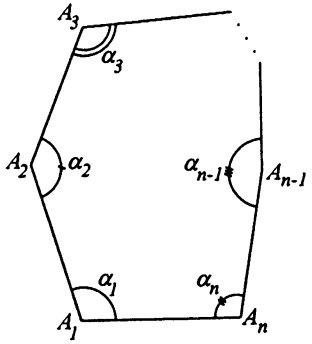


рис. 49

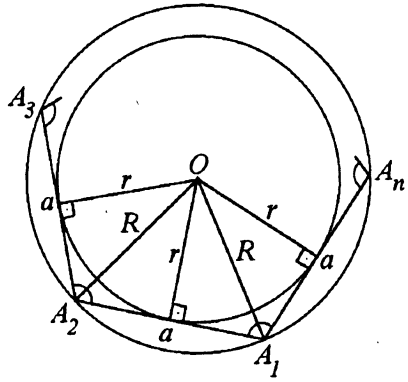


рис. 50

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2)\pi$$

$P = na\,,\ a = 2r\mathrm{tg}\frac{\pi}{n} = 2R\sin\frac{\pi}{n}\,;$

$$S = \frac{na^2}{4}\mathrm{ctg}\frac{\pi}{n} = nr^2\mathrm{tg}\frac{\pi}{n} = \frac{nR^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\,.$$

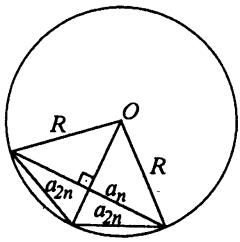


рис. 51

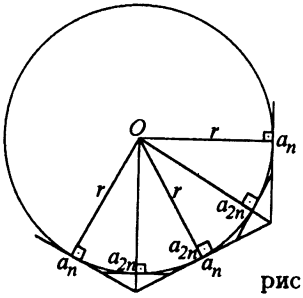


рис. 52

$$a_{2n}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}$$

$$a_{2n} = \frac{2ra_n}{\sqrt{4r^2 + a_n^2} + 2r}$$

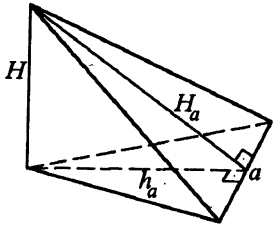


рис. 53

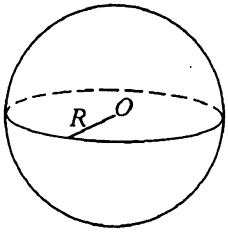


рис. 54

$$H_a \perp a \iff h_a \perp a$$

$$S = 4\pi R^2 \ ; \ V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

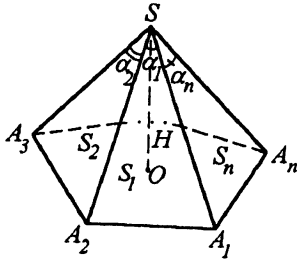


рис. 55

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < 2\pi \ ; \qquad S_{\text{б}} = \sum_{i=1}^{n} S_i \ ; \quad V_{\text{пир}} = V = \frac{1}{3} S_{A_1 A_2 \ldots A_n} \cdot H = \frac{1}{3} S_{\text{п}} \cdot r_{\text{вп}}$$

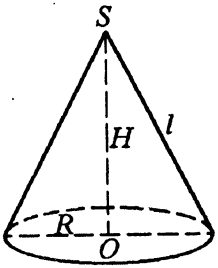


рис. 56

$l^2 = H^2 + R^2$; $S_б = \pi Rl$;

$V_к = V = \frac{1}{3}S_о H = \frac{1}{3}\pi R^2 H$;

$S_п = \pi RL + \pi R^2$; $S_о = \pi R^2$;

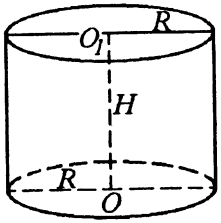


рис. 57

$S_б = 2\pi RH$;

$V_ц = V = S_о H = \pi R^2 H$;

$S_п = 2\pi RH + 2\pi R^2$

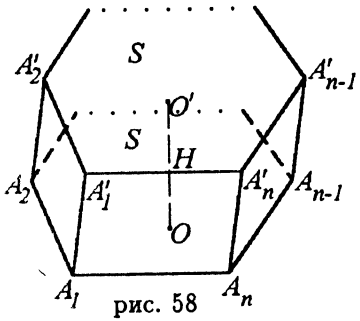


рис. 58

$V = SH$

$V = V_{пр}$; $S = S_о$

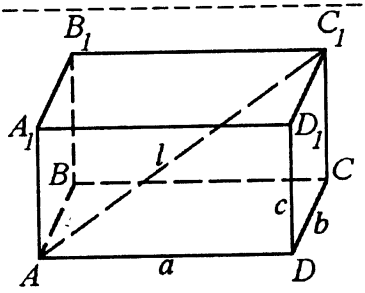


рис. 59

$l^2 = a^2 + b^2 + c^2$; $V = abc$

Формулы для частей шара:

шаровой сегмент $V = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H)$; $S = 2\pi RH$;

шаровой сектор $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$; $S = \pi R(2H + \sqrt{2RH - H^2})$;

шаровой слой $V = \frac{1}{6}\pi H^3 + \frac{1}{2}\pi(R_1^2 + R_2^2)H$; $S = 2\pi RH$

к рис. 60 $V = \frac{1}{3}\pi H(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)$; $S_б = \pi(R_1 + R_2)L$;

$S_п = \pi(R_1 + R_2)L + \pi(R_1^2 + R_2^2)$

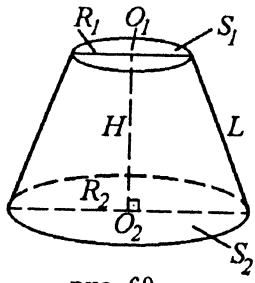


рис. 60

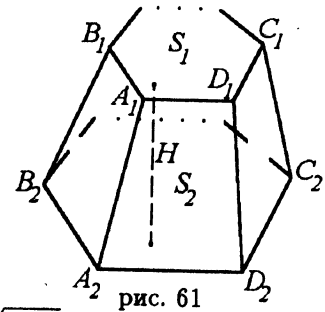


рис. 61

$$V = \frac{1}{3}H(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$$

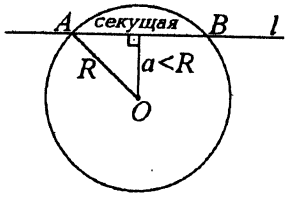


рис. 62

$l \cap (O;R) = \{A\} \cup \{B\}$

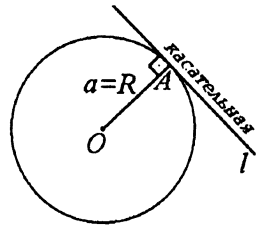


рис. 63

$l \cap (O;R) = \{A\}$

$a = \rho(O;l)$

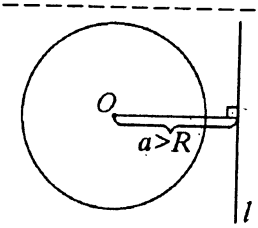


рис. 64

$l \cap (O;R) = \varnothing$

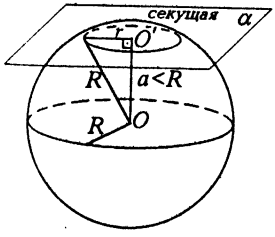


рис. 65

$\alpha \cap (O;R) = (O';r)$,

$r = \sqrt{R^2 - a^2}$,

$(O;R)$ — сфера,

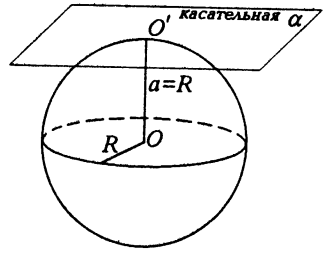


рис. 66

$\alpha \cap (O;R) = \{O'\}$

$(O';r)$ — окружность,

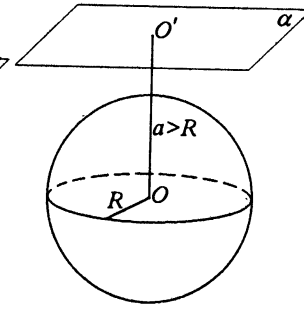


рис. 67

$\alpha \cap (O;R) = \varnothing$

$a = \rho(O;\alpha) = |OO'|$.

2.2.3. Тригонометрия

$$\forall \alpha, \beta \in R, \quad \forall n \in Z$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 ;$$

$$\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin \alpha ; \quad \cos(\alpha + 2\pi n) = \cos \alpha ;$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha ; \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha ;$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta ; \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta ;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \sin \alpha ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos \alpha ;$$

$$\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos \alpha ; \quad \sin(\pi \mp \alpha) = \pm \sin \alpha ;$$

$$\sin(\alpha + \pi n) = (-1)^n \sin \alpha ; \quad \cos(\alpha + \pi n) = (-1)^n \cos \alpha ;$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) ;$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) ;$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) ;$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} ;$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} ;$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2} ;$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha ;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha ;$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha ;$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha ;$$

$$\operatorname{tg}\alpha \overset{df}{=} \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ , & \text{если } \cos\alpha \neq 0\ ; \\ \nexists\ , & \text{если } \cos\alpha = 0\ ; \end{cases} \qquad \operatorname{ctg}\alpha \overset{df}{=} \begin{cases} \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ , & \text{если } \sin\alpha \neq 0\ ; \\ \nexists\ , & \text{если } \sin\alpha = 0\ ; \end{cases}$$

$$\sec\alpha \overset{df}{=} \begin{cases} \dfrac{1}{\cos\alpha}\ , & \text{если } \cos\alpha \neq 0\ ; \\ \nexists\ , & \text{если } \cos\alpha = 0\ ; \end{cases} \qquad \operatorname{cosec}\alpha \overset{df}{=} \begin{cases} \dfrac{1}{\sin\alpha}\ , & \text{если } \sin\alpha \neq 0\ ; \\ \nexists\ , & \text{если } \sin\alpha = 0\ ; \end{cases}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\ ;\quad \sin\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}\ ;\quad \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1 \quad (\cos\alpha \neq 0,\ \sin\alpha \neq 0)\ ;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \mp \alpha\right) = \pm\operatorname{ctg}\alpha \quad (\alpha \neq \pi k \ \ \forall k \in Z)\ ;$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\operatorname{tg}\alpha \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \ \ \forall k \in Z\right)\ ;$$

$$\forall n \in Z$$

$$\operatorname{tg}(\pi n \pm \alpha) = \pm\operatorname{tg}\alpha \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \ \ \forall k \in Z\right)\ ;$$

$$\operatorname{ctg}(\pi n \pm \alpha) = \pm\operatorname{ctg}\alpha \quad (\alpha \neq \pi k \ \ \forall k \in Z)\ ;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad (\cos(\alpha \pm \beta) \neq 0,\quad \cos\alpha \neq 0,\quad \cos\beta \neq 0)\ ;$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha} \qquad (\sin(\alpha \pm \beta) \neq 0,\quad \sin\alpha \neq 0,\quad \sin\beta \neq 0)\ ;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \qquad (\cos 2\alpha \neq 0,\quad \cos\alpha \neq 0)\ ;$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} \qquad (\sin\alpha \neq 0,\quad \cos\alpha \neq 0)\ ;$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \qquad (\cos\alpha \neq 0\ ,\ \cos\beta \neq 0)\ ;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta} \qquad (\sin\alpha \neq 0\ ,\ \sin\beta \neq 0)\ ;$$

$$\forall \alpha \in R$$

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \quad ; \quad \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \; ;$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}, & \text{если } \sin\dfrac{\alpha}{2} \geqslant 0 \; ; \\ -\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}, & \text{если } \sin\dfrac{\alpha}{2} \leqslant 0 \; ; \end{cases}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}, & \text{если } \cos\dfrac{\alpha}{2} \geqslant 0 \; ; \\ -\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}, & \text{если } \cos\dfrac{\alpha}{2} \leqslant 0 \; ; \end{cases}$$

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \qquad (\alpha \neq \pi + 2\pi k, \quad \forall k \in Z) \; ;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, & \text{если } \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} \geqslant 0 \; ; \\ -\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, & \text{если } \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} \leqslant 0 \end{cases} \qquad (\alpha \neq \pi + 2\pi k, \quad \forall k \in Z) \; ;$$

$$\left|\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} \qquad (\alpha \neq 2\pi k, \quad \forall k \in Z) \; ;$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}, & \text{если } \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} \geqslant 0 \; ; \\ -\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}, & \text{если } \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} \leqslant 0 \end{cases} \qquad (\alpha \neq 2\pi k, \quad \forall k \in Z) \; ;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \quad (\alpha \neq \pi + 2\pi k \quad \forall k \in Z) \; ;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (\alpha \neq \pi k \quad \forall k \in Z) \; ;$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} \quad (\alpha \neq 2\pi k \quad \forall k \in Z) \; ;$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (\alpha \neq \pi k \quad \forall k \in Z) \; ;$$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \quad (\alpha \neq \pi + 2\pi k \quad \forall k \in Z) ;$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \quad (\alpha \neq \pi + 2\pi k \quad \forall k \in Z) ;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \quad (2\alpha \neq \pi k \quad \forall k \in Z \ , \ k \neq 4m \ \ \forall m \in Z) ;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \quad (\alpha \neq \pi k \quad \forall k \in Z) ;$$

$$\forall \alpha \in R$$

$$|\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \ ; \ \sin\alpha = \left[\begin{array}{l} \sqrt{1-\cos^2\alpha} \ , \ \text{если} \quad \sin\alpha \geqslant 0 \ ; \\ -\sqrt{1-\cos^2\alpha} \ , \ \text{если} \quad \sin\alpha \leqslant 0 \ ; \end{array} \right.$$

$$|\cos\alpha| = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \ ; \ \cos\alpha = \left[\begin{array}{l} \sqrt{1-\sin^2\alpha} \ , \ \text{если} \quad \cos\alpha \geqslant 0 \ ; \\ -\sqrt{1-\sin^2\alpha} \ , \ \text{если} \quad \cos\alpha \leqslant 0 \ ; \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha + 1 \ , \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \forall k \in Z \ ;$$

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\alpha + 1 \ , \qquad \alpha \neq \pi k \quad \forall k \in Z \ ;$$

$$|\cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}} \ , \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \forall k \in Z \ ;$$

$$|\sin\alpha| = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}} \ , \quad \alpha \neq \pi k \quad \forall k \in Z \ ; \ .$$

$$\cos\alpha = \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}} \ , \quad \text{если} \quad \cos\alpha > 0 \ ; \\ -\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}} \ , \quad \text{если} \quad \cos\alpha < 0 \ ; \end{array} \right.$$

$$\sin\alpha = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}}, & \text{если} \quad \sin\alpha > 0; \\ -\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}}, & \text{если} \quad \sin\alpha < 0; \end{cases}$$

$$\sin\alpha = \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}}, & \text{если} \quad \cos\alpha > 0; \\ -\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}}, & \text{если} \quad \cos\alpha < 0; \end{cases}$$

$$\cos\alpha = \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}}, & \text{если} \quad \sin\alpha > 0; \\ -\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}}, & \text{если} \quad \sin\alpha < 0; \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}, & \text{если} \quad \cos\alpha > 0; \\ -\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}, & \text{если} \quad \cos\alpha < 0; \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}, & \text{если} \quad 0 \leqslant \sin\alpha < 1; \\ -\dfrac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}, & \text{если} \quad -1 < \sin\alpha \leqslant 0; \end{cases}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \begin{cases} \dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}, & \text{если} \quad \sin\alpha > 0; \\ -\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}, & \text{если} \quad \sin\alpha < 0; \end{cases}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha}, & \text{если} \quad 0 \leqslant \cos\alpha < 1; \\ -\dfrac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha}, & \text{если} \quad -1 < \cos\alpha \leqslant 0. \end{cases}$$

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\psi)\ ,$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\sin\psi \quad ; \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\psi\ .$$

α°	-90°	-60°	-45°	-30°	0°
α	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0
$\sin\alpha$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0
$\cos\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\operatorname{tg}\alpha$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	0	$-\sqrt{3}/3$	-1	$-\sqrt{3}$	$\nexists$

α°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
α	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
$\sin\alpha$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\cos\alpha$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$-\sqrt{3}/3$	-1	$-\sqrt{3}$	$\nexists$

a	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\arcsin a$	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\arccos a$	π	$5\pi/6$	$3\pi/4$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0

a	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} a$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\operatorname{arcctg} a$	$5\pi/6$	$3\pi/4$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$

$$\sin x = a \iff x = (-1)^k \arcsin a + \pi k \quad \forall k \in Z \quad (\forall a \in R,\ |a| \leqslant 1)$$

$$(\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k\ ,\ \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k\ ,$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k\ , \quad \forall k \in Z)\ ;$$

$$\cos x = a \iff x = \pm\arccos a + 2\pi k \quad \forall k \in Z \quad (\forall a \in R,\ |a| \leqslant 1)$$

$$(\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi k\ ,\ \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k\ ,$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k\ , \quad \forall k \in Z)\ ;$$

$$\operatorname{tg} x = a \iff x = \operatorname{arctg} a + \pi k \quad \forall k \in Z \quad (\forall\, a \in R)\ ;$$

$$\operatorname{ctg} x = a \iff x = \operatorname{arcctg} a + \pi k \quad \forall k \in Z \quad (\forall\, a \in R)\ .$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin a \leqslant \frac{\pi}{2}\ ;$$

$$0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi\ ;$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2}\ ;$$

$$0 < \operatorname{arcctg} a < \pi\ .$$

$$\forall x \in R\ :\quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x\ , \text{если } 0 < x < \dfrac{\pi}{2}\ , \\ \operatorname{tg} x < x < \sin x < 0\ , \text{если } -\dfrac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 0 < |\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|$$

$$\sin(\arcsin a) = \cos(\arccos a) = a \quad (\forall a \in R,\ |a| \leqslant 1)\ ;$$

$$\sin(\arccos a) = \cos(\arcsin a) = \sqrt{1-a^2} \quad (\forall a \in R,\ |a| \leqslant 1)\ ;$$

$$\cos(\operatorname{arctg} a) = \sin(\operatorname{arcctg} a) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \quad \forall a \in R\ ;$$

$$\sin(\operatorname{arctg} a) = \cos(\operatorname{arcctg} a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \quad \forall a \in R\ ;$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin a) = \operatorname{ctg}(\arccos a) = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \quad (\forall a \in R,\ |a| < 1)\ ;$$

$$\operatorname{ctg}(\arcsin a) = \operatorname{tg}(\arccos a) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \quad (\forall a \in R,\ 0 < |a| \leqslant 1)\ ;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a \quad \forall a \in R\ ;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} a) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} a) = \frac{1}{a} \quad (\forall a \in R,\ a \neq 0)\ ;$$

$$\arcsin a + \arcsin(-a) = 0 \quad (\forall a \in R,\ |a| \leqslant 1)\ ;$$

$$\arccos a + \arccos(-a) = \pi \quad (\forall a \in R,\ |a| \leqslant 1)\ ;$$

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2} \quad (\forall a \in R,\ |a| \leqslant 1)\ ;$$

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg}(-a) = 0 \quad \forall a \in R\ ;$$

$$\operatorname{arcctg} a + \operatorname{arcctg}(-a) = \pi \quad \forall a \in R\ ;$$

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2} \quad \forall a \in R\ ;$$

$$\arcsin(\sin a) = a - 2\pi n \quad \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) ;$$

$$\arcsin(\sin a) = \pi - a + 2\pi n \quad \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant a \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) ;$$

$$\arccos(\cos a) = a - 2\pi n \quad (2\pi n \leqslant a \leqslant \pi + 2\pi n) ;$$

$$\arccos(\cos a) = -a + 2\pi n \quad (-\pi + 2\pi n \leqslant a \leqslant 2\pi n) ;$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} a) = a - \pi n \quad \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n < a < \frac{\pi}{2} + \pi n\right) ;$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} a) = a - \pi n \quad (\pi n < a < \pi + \pi n) ;$$

$$n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \ldots \quad .$$

$$\arcsin |a| = \arccos \sqrt{1 - a^2} \quad (\forall a \in R,\ |a| \leqslant 1) ;$$

$$\arcsin a = \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} \quad (\forall a \in R,\ |a| < 1) ;$$

$$\arcsin |a| = \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1 - a^2}}{|a|} \quad (\forall a \in R,\ 0 < |a| \leqslant 1) ;$$

$$\arccos |a| = \arcsin \sqrt{1 - a^2} \quad (\forall a \in R,\ |a| \leqslant 1) ;$$

$$\arccos |a| = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - a^2}}{|a|} \quad (\forall a \in R,\ 0 < |a| \leqslant 1) ;$$

$$\arccos a = \operatorname{arcctg} \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} \quad (\forall a \in R,\ |a| < 1) ;$$

$$\operatorname{arctg} a = \arcsin \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} \quad \forall a \in R ;$$

$$\operatorname{arctg} |a| = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \quad \forall a \in R ;$$

$$\operatorname{arctg} |a| = \operatorname{arcctg} \frac{1}{|a|} \quad \forall a \in R,\ a \neq 0 ;$$

$$\operatorname{arcctg} |a| = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \quad \forall a \in R ;$$

$$\operatorname{arcctg} a = \arccos \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} \quad \forall a \in R ;$$

$$\operatorname{arcctg} |a| = \operatorname{arctg} \frac{1}{|a|} \quad \forall a \in R,\ a \neq 0 .$$

РАЗДЕЛ II

1. КАК ГОТОВИТЬСЯ К ВСТУПИТЕЛЬНЫМ ЭКЗАМЕНАМ ПО МАТЕМАТИКЕ

Экзамены проводятся строго в соответствии с программой по математике для поступающих в МГУ, которая действует с 1993 г.

Прежде всего необходимо внимательно ознакомиться с программой (ее вводной частью и всеми тремя разделами).

В 1994 г. в эту программу (в раздел 1.1) было внесено два дополнения, а затем в 1996 году в текст программы в целом были внесены редакторские исправления и в ее разделы 1.2 и 1.3 также были внесены незначительные дополнения. После этого текст этой программы не изменялся. Поэтому последний вариант программы следует смотреть в справочнике для поступающих в МГУ "Московский университет" 2001 г. или в начале данной книги.

В последующие годы не исключены новые незначительные дополнения в эту программу, которые сразу же будут отражены в справочнике для поступающих в Московский университет очередного года.

Целесообразно сочетать самостоятельную подготовку к вступительным экзаменам по математике с обучением на одном из потоков подготовительных курсов при МГУ, посещением лектория для школьников старших классов при МГУ, так как в этом случае подготовка проходит под контролем опытных преподавателей.

1.1. О ПОРЯДКЕ ПРОВЕДЕНИЯ ПИСЬМЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ И О МАТЕРИАЛАХ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К НЕМУ

На письменном экзамене поступающему предлагается вариант, содержащий определенное количество задач по различным разделам программы вступительных экзаменов по математике, как правило, по возрастающей трудности (конечно, с точки зрения экзаменаторов). Среди них бывают как стандартные задачи обычного школьного курса математики, так и задачи повышенной трудности. Для решения всех этих задач не требуется знаний, выходящих за рамки упомянутой выше программы. Однако на письменном экзамене проверяется четкое знание основных вопросов обычного школьного курса математики, уверенное владение техникой алгебраических и тригонометрических преобразований, умение решать геометрические задачи (планиметрические и стереометрические). Особое внимание уделяется

умению последовательно логически правильно и исчерпывающе проводить решение любых задач, строить те или иные доказательства, а также четко излагать свои рассуждения в письменной форме. Очень важно следить за использованием всех фактов, заданных в условии задачи.

Так, например, в алгебраических и тригонометрических задачах следует объяснять выкладки (что, из чего и каким образом получается), указывать ограничения, возникающие как из условий задачи, так и в ходе преобразований. В текстовых задачах необходимо объяснять все обозначения, каким образом из условий задачи появляются те или иные соотношения, а затем из них — искомые величины. В геометрических задачах необходимо аккуратно и четко выполнять чертежи и объяснять все обозначения, причем все они в тексте решения должны соответствовать указанным на чертеже, следует также строго доказывать используемые геометрические утверждения (перпендикулярность каких-либо прямых, параллельность каких-либо плоскостей и т.п.), необходимо в процессе рассуждений называть ту или иную теорему или формулу (из основного текста программы), если она применяется.

Если используется теорема или положение, не включенные в программу, то необходимо привести его доказательство или хотя бы полную схему доказательства.

Следует помнить, что задача считается решенной (правильно, полностью, безукоризненно и т.п.), если верный ответ получен путем построения логически верной цепочки рассуждений с обоснованием всех промежуточных этапов (приведены все обоснования, ссылки на соответствующие положения программы, теоремы; проведено доказательство вне программных положений). При наличии даже незначительных арифметических ошибок, ошибочных промежуточных рассуждениях, отсутствии обоснования каких-либо переходов или отсутствии доказательства даже правильно сформулированных положений, не включенных в программу, задача не может быть засчитана как решенная. Необходимо очень тщательно контролировать и проверять ход решения каждой задачи, а не только ответ. Следует заметить, что правильный ответ может быть получен случайно при ошибочных промежуточных рассуждениях или выкладках.

В качестве основы для подготовки к письменному экзамену можно использовать, например, сборники конкурсных задач для поступающих в МГУ Ю.В. Нестеренко, С.Н. Олехника и М.К. Потапова изданий 1983, 1986, 1992 и 1995 гг.; сборник вариантов вступительных экзаменов по математике за 1983—91 гг.; книгу И.И. Мельникова, И.Н. Сергеева "Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах" издательства Московского университета 1990 г. и УНЦ ДО 1994 г.; сборники "Задачи

вступительных экзаменов по математике (1997—1998 гг.), (1999 г.), (2000 г.)" (под общей редакцией Е.А. Григорьева) и "Задачи вступительных собеседований и выпускных экзаменов по математике на подготовительном отделении МГУ (1990—1999 гг.)" (под общей редакцией А.Б. Будака); справочники для поступающих в МГУ; журналы "Квант" и "Математика в школе" за несколько последних лет и другие источники. В следующем п. 1.2. приводятся примеры и справочной литературы. Тем поступающим, которым предстоит сдавать даже только письменный вступительный экзамен, весьма целесообразно ознакомиться со всеми фактами, изложенными в компактной форме в указанных книгах.

Для приобретения навыков в решении задач целесообразно отрабатывать их по темам.

1. Решение линейных и квадратных уравнений, соответствующих неравенств (в том числе и с модулем), а также аналогичных систем.
2. Решение иррациональных уравнений, неравенств и их систем.
3. Решение показательных, логарифмических, степенных уравнений, неравенств и их систем.
4. Решение задач на доказательство тождеств и доказательство неравенств (алгебраических и тригонометрических).
5. Решение тригонометрических уравнений, неравенств и их систем.
6. Решение задач на прогрессии.
7. Решение "текстовых" задач, включая их редукцию к алгебраическим и тригонометрическим.
8. Решение задач с параметрами.
9. Решение геометрических задач (планиметрия, стереометрия), включая их редукцию к тригонометрическим и алгебраическим.

Причем весь этот материал можно черпать из задач вступительных экзаменов всех факультетов МГУ, где проводится экзамен по математике (письменно).

Необходима тренировка по времени (время — не более 4 астрономических часов) решения вариантов письменных экзаменов выбранного для учебы факультета, причем начинать тренировку надо с более простых вариантов других факультетов.

Схема проведения письменного экзамена выглядит следующим образом: после захода абитуриентов в аудиторию и инструктажа старшего в аудитории экзаменатора каждому (лицом вниз) выдается листок с условиями задач и номером варианта. После общей команды "приступить к работе" на выполнение всей работы отводится 240 минут (4 часа) времени. По истечении этого времени дается команда "прекратить работу" и вся

данная абитуриенту бумага вместе с вложенным в нее вариантом сдается экзаменаторам.

Результаты письменного экзамена, как во время олимпиад МГУ в апреле — мае, так и во время вступительных испытаний в июле, как правило, объявляются через 3 — 4 дня. При отсутствии устного экзамена объявляются все оценки, при этом каждый абитуриент *в день объявления оценок и в указанное время* имеет право посмотреть свою работу с выставленной за нее оценкой и замечаниями экзаменаторов.

При наличии устного экзамена объявляются только двойки и положительные оценки тех абитуриентов, которые затем не допускаются до сдачи этого экзамена. В этот день в отведенное время получивший оценку "2" или объявленную положительную оценку может в присутствии экзаменатора посмотреть свою работу. Все остальные оценки абитуриенты, которые собираются сдавать устный экзамен, узнают по окончании устного экзамена по математике.

Следует особо отметить, что выставляемая за письменный экзамен оценка хоть и зависит от количества решенных задач, тем не менее критерий выставления той или иной оценки заранее не известен и вырабатывается в процессе проверки всех работ. Но в любом случае для получения как можно более высокой оценки на письменном экзамене необходима достаточно большая практика в решении задач как стандартного типа, что в общем гарантируется знанием и владением "азами" школьного курса математики, так и задач повышенной трудности, что также достигается наличием достаточной практики в решении таких задач, определенной математической культурой, сообразительностью и, конечно же, хорошими знаниями и уверенным владением той частью школьного курса математики, которая включена в "Программу по математике для поступающих в МГУ". При этом никаких знаний сверх этой программы, конечно, не требуется.

Не следует, однако, считать, что стать студентом можно лишь решив все предлагаемые на экзаменах задачи. Зачисление в университет происходит по результатам сдачи всех вступительных экзаменов.

Необходимо быть хорошо подготовленным и психологически, причем как на письменном, так и на устном экзаменах: уметь оптимально распределять свое время на выполнение того или иного задания, внимательно и тщательно проверять все выкладки и рассуждения.

1.2. О ПОРЯДКЕ ПРОВЕДЕНИЯ УСТНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ И О МАТЕРИАЛАХ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К НЕМУ

Традиционно на устном экзамене поступающий должен подготовить ответ на два теоретических вопроса билета (из второго раздела программы по математике: один из подраздела "Алгебра", другой из подраздела "Геометрия"), а затем ответить, как правило, на 1—3 дополнительных вопроса, формулируемых в виде задач, хотя могут задаваться и теоретические вопросы по ходу ответа на билет. На устном экзамене особое внимание уделяется тому, в какой мере поступающий умеет логически рассуждать. Значительное внимание уделяется четкому и глубокому знанию теории. Все это имеет важное значение для успешного усвоения в будущем курсов высшей математики.

При подготовке теоретических вопросов необходимо помнить (см. также упоминание в программе по математике для поступающих в МГУ о дополнительных навыках на устном экзамене), что их *надо знать с доказательством и приводить эти доказательства.* В то же время весьма желательно прежде, чем формулируется и доказывается та или иная теорема, дать четкое определение соответствующего объекта, свойства (например, определение треугольника, равных треугольников, синуса, косинуса числа и т.п.).

При подготовке ответа на вопрос о свойствах той или иной функции, следует проводить исследования (с доказательством этих свойств) по следующему плану:

1) область определения,
2) область значений (изменения),
3) наибольшее и наименьшее значения функции,
4) четность или нечетность,
5) периодичность,
6) нули функции, промежутки знакопостоянства,
7) участки монотонности,
8) график функции, иногда и ее поведение на границах области определения.

В качестве приобретения навыков в решении задач, которые предлагаются на устном экзамене, можно рекомендовать, например, сборник задач устных экзаменов В.П.Моденова; задачи из учебников А.П.Киселева (по геометрии), особенно задачи на построение; задачи из п. 3 раздела IV данной книги; задачи устных экзаменов, приведенные в упомянутых выше, в п. 1.1, книгах под общей редакцией Е.А. Григорьева и другие книги.

В качестве литературы для подготовки теоретического материала можно использовать:

— по алгебре и тригонометрии: материал раздела IV, п. 2.1, 2.2 и 2.4 данной книги ; М.К. Потапов и др. "Алгебра и анализ элементарных функций", М., "Наука", 1980, М., АО "Столетие", 1996, 1998 ; книги справочного характера, например, "Алгебра в таблицах" (7—11 классы) Л.И. Звавича и А.Р. Рязановского, М., "Дрофа", 2000 ; "Нагладный справочник по алгебре и началам анализа с примерами", авторы Л.Э. Генденштейн, А.П. Ершова, А.С. Ершова ;

— по математике в целом: Г.В. Дорофеев и др. "Пособие по математике для поступающих в вузы", М., "Наука", 1976, М., "Дрофа", 1995 ;

— по геометрии: материал раздела IV, п. 2.3 данной книги, а также учебники А.П. Киселева для 6–10 кл. (I и II части); учебники Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова и др. для 7—9 кл. и 10—11 кл. (издания соответственно 1991 г. и позднее и 1992 г. и позднее); учебник А.В. Погорелова для 7—11 кл. (издания не ранее 1990 г.) ; переизданный в 1995 г. издательским домом "Дрофа" в двух книгах учебник и задачник А.П. Киселева и Н.А. Рыбкина "Геометрия", планиметрия для 7—9 кл., стереометрия для 10—11 кл.; изданную в 1980, 1989 и 1996 годах в издательстве "Просвещение" единую книгу А.П. Киселева "Элементарная геометрия" с предисловием академика А.Н. Тихонова ; книги справочного характера, например, "Геометрия в таблицах" (7—11 классы) Л.И. Звавича и А.Р. Рязановского, М., "Дрофа", 2000 ; "Нагладный справочник по геометрии", авторы
Л.Э. Генденштейн, А.П. Ершова.

Однако при этом надо учитывать, что в каждом учебнике или цикле учебников своя логическая структура изложения материала. Возможны отдельные неточности в формулировках определений, теорем, формул как в учебниках так и в справочных книгах. Конечно, следует понимать, что выполнение всех указанных рекомендаций не дает гарантии успешной сдачи вступительных экзаменов, но закладывает базу для подготовки к ним.

Схема проведения устного экзамена выглядит следующим образом. Заход в аудиторию, например, в 10.00, получение билета, начало подготовки на ответ билета примерно 10.05. В билете содержатся два теоретических вопроса из второго раздела "Программы по математике": один из них из подраздела "Алгебра", второй из подраздела "Геометрия". При этом либо вместе с билетом сразу выдается задача, тогда на подготовку к ответу дается не более 60 минут; либо задача билета дается позднее. Поскольку на решение каждой из задач отводится не более 15 минут, время на подготовку ответов на вопросы билета при этом сократится. Опрос абитуриента ведется двумя экзаменаторами. По окончании ответа на билет абитуриенту, как

правило, дается дополнительно 2-3 задачи (обычно даются из тех разделов "Программы по математике", которые непосредственно не вошли в билет, в целях наиболее полно выяснить знания и навыки абитуриента). Время выдачи каждой из задач фиксируется экзаменаторами. Выставляемая на устном экзамене оценка зависит от качества ответа на теоретические вопросы и решения задач.

По ходу ответа на теоретические вопросы билета или при решении задач экзаменаторы могут задавать уточняющие вопросы теоретического и практического характера (например, сформулировать или уточнить то или иное определение или теорему, доказать какое-нибудь несложное утверждение и т.п.). При этом ответы на эти вопросы, естественно, также могут повлиять на выставление оценки. Поэтому во избежание таких вопросов следует давать правильные и четкие формулировки определений и теорем, полные, исчерпывающие и правильные доказательства теорем, при необходимости доказывать используемые при решении задач промежуточные утверждения, особенно при нестандартном ее решении, геометрических построениях и т.п.

Общая продолжительность устного экзамена (с момента получения билета до окончания опроса, как правило, не превышает 120 мин. (2 часа)). Начало и окончание опроса абитуриента также фиксируются экзаменаторами. Пример: начало опроса в 11.05, время опроса 30 мин., 11.35 — время выдачи первой дополнительной задачи, 11.50 — время выдачи 2-й дополнительной задачи, 12.00 — окончание опроса. По завершении ответов на все вопросы устного экзамена абитуриенту показывается его письменная работа с выставленной за нее оценкой и замечаниями проверявших ее экзаменаторов (обычно их также двое), а затем объявляется оценка за устный экзамен.

РАЗДЕЛ III

1. О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ИЗЛОЖЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ И ПРОВЕДЕНИЯ ПИСЬМЕННЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ В 1993—2000 ГОДАХ

В этом разделе приводятся примеры вариантов вступительных письменных экзаменов в 1993, 1994, 1995 и 1996 годах на факультетах ВМиК, экономическом, геологическом и ИСАА, причем как с решениями (в которых отдельные выкладки или рассуждения могут быть опущены и учащиеся должны провести их сами), так и без решений, снабженных ответами, для самостоятельной проработки. Материалы, касающиеся задач вступительных экзаменов и олимпиад 1997—2000 годов, можно найти в сборниках "Задачи вступительных экзаменов по математике (1997—1998 гг.), (1999 г.), (2000 г.)" (под общей редакцией Е.А. Григорьева). Проводится анализ характерных ошибок, допущенных абитуриентами на письменных экзаменах. Естественно, что уровень сложности этих вариантов различен на указанных факультетах. Различно и количество предлагаемых задач на разных факультетах в различные годы, например, на экономическом факультете и ИСАА в 1993—1997 годах предлагалось по 6 задач, а в 1998—2000 годах — по 7 задач; на факультете ВМиК в 1993—2000 годах и на геологическом факультете в 1993 году — по 6 задач.

Приводятся также варианты для самостоятельного решения, снабженные ответами, выездных письменных экзаменов по математике, которые проводились в марте - апреле - мае 1995 и 1996 годов в городах Обнинске Калужской обл., Якутске, Надыме, Элисте, Пангоды, Нефтекамске, Магнитогорске, Челябинске, Архангельске, Мурманске, Саяногорске, Петропавловске-Камчатском.

В 1994 — 1997 годах на факультетах ВМиК и геологическом вступительные экзамены (письменный и устный) проводились как в апреле - мае (пробные экзамены), так и в июле (основные экзамены). В 1998 — 2000 годах на этих факультетах в апреле - мае проводились олимпиады в виде письменных и устных испытаний по математике, а экзамены в июле носили название вступительных испытаний.

При этом в 1994 г. на геологическом факультете был проведен эксперимент, связанный с увеличением количества предлагаемых задач (по 8 задач в мае и по 10 задач в июле). Решение задач оценивалось по бальной системе (от одного до трех баллов в мае и от одного до четырех баллов в июле). Большим количеством баллов оценивались задачи с соответственно большим порядковым номером. В 1995 г. на геологическом факультете предлагалось по 9 задач на предварительном письменном экзамене в мае и по 8 задач на основном письменном экзамене в июле, а с 1996 года и на всех письменных экзаменах на этом факультете предлагалось по 8 задач.

2. ХАРАКТЕРНЫЕ ОШИБКИ, ДОПУЩЕННЫЕ АБИТУРИЕНТАМИ НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ ПО МАТЕМАТИКЕ (ПИСЬМЕННО) В МГУ НА ФАКУЛЬТЕТЫ ВМиК, ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ, ЭКОНОМИЧЕСКИЙ, ИСАА и ВЫЕЗДНЫХ ЭКЗАМЕНАХ

2.1. Общие замечания об ошибках, допущенных абитуриентами в 1993 — 2000 годах.

Прежде всего хотелось бы отметить, что основная часть абитуриентов неправильно распределяет время при выполнении письменной работы (или вообще его не планирует).

При проверке работ убеждаешься, что некоторые поступающие лихорадочно хватаются за отдельные задачи по принципу "лишь бы не геометрия", избегая также текстовых задач на смеси, целочисленную арифметику и задач с параметрами. В итоге убеждаешься, что ничего в работе нет.

Решение варианта следует начинать с внимательного прочтения последовательно всех предложенных задач, упорядочивая их по сложности. Конечно, составители вариантов письменных работ уже позаботились о том, чтобы самые легкие задачи были в начале, и они следовали в порядке возрастания трудности их решения, но это для "среднего абитуриента" с учетом опыта предыдущих экзаменов.

Однако для каждого из вас эта ранжировка может оказаться неверной. Вы должны сами распределить время с наибольшей пользой для себя.

Это означает, что сначала надо выделить наиболее простые на Ваш взгляд задачи и приступить к их решению в черновом варианте, причем с обязательной проверкой разумности полученного решения. Это особенно необходимо, так как из года в год падает умение выполнять даже простейшие арифметические действия.

Если три — пять задач (в зависимости от их количества в варианте) решены, то следует оформить их *полное* описание в чистовике. Обратите внимание на слово "полное". Очень мало абитуриентов выполняет требования программы. Получение правильного ответа на дает решение задачи, так как Вы должны обоснованно получить правильный ответ. Если при решении задачи используются положения из школьного курса математики, включенные в первый или второй разделы Программы по математике для поступающих в вузы и, в частности, в МГУ, то должна быть дана их четкая формулировка. Если Вы пользуетесь положениями, выходящими за рамки как указанных программ, так и школьного курса, то должно быть приведено доказательство соответствующего положения. Лишь при наличии

соответствующих описаний в тексте решения оно может быть признано верным.

Вот теперь можно приступить к выполнению остальных задач (или новой порции более сложных задач). Самую сложную для Вас задачу желательно решать в последнюю очередь.

Следует отметить, что первая характерная ошибка, допускаемая абитуриентами, состоит в том, что нет этого планирования выполнения работы. В итоге масса ошибок из-за описок, неправильного прочтения ранее выполненных действий, ошибок в формулах (на уровне описок) и т.п.

Вот некоторые характерные примеры. Для решения квадратного неравенства необходимо отыскать корни квадратного трехчлена. Они найдены решающим задачу, и он понимает, что теперь задача принципиально решена. Решение этой задачи брошено, и осуществлен переход к решению другой задачи. Но квадратное неравенство так и осталось не решенным, и о нем уже забыто. В конце экзамена просмотр текста и дополнительные пометки приводят, как правило, лишь к новым неточностям.

При решении системы или уравнения делается замена переменных $t = \sin x$ и относительно t выполняется решение (условие $|t| \leqslant 1$ при этом нигде в черновике не указывается). Естественно, что в конце экзамена это уже забыто, не говоря уже о заменах типа $t = |\sin x|$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, $t = a^x$ $(t > 0)$ и т.д. При решении правильно выписано ОДЗ и получено решение соответствующего уравнения. Для завершения решения задачи надо найти их пересечение. Но это в черновике не сделано, а затем просто забыто. Кстати, в последних случаях проверка разумности решения могла бы помочь найти ошибки.

Как уже указывалось, одним из наиболее запущенных разделов школьной программы является геометрия. Часть абитуриентов даже не пытается решать геометрические задачи, в лучшем случае пытаясь дать лишь чертеж. При этом какие мысли у человека, какая логика ... трудно понять. Так в задаче N 3 из варианта экономического факультета 1995 года, где в трапеции заданы две боковые стороны, верхнее основание и один из углов при верхнем основании (тупой) дается чертеж, предполагающий единственность построения трапеции, хотя, на самом деле, их может быть две. Аналогичная ситуация была с задачей о трапеции, пересекаемой отрезком, параллельным ее основаниям и делящимся диагоналями трапеции на три равные части. Те, кто брался за ее решение, чертили одну секущую (кто ближе к меньшему основанию, а кто — к большему) и, если получали ответ, то только один из возможных. Все это связано с тем, что построение выполняется без анализа и обоснования.

Как при решении геометрических задач, так алгебраических текстовых задач у значительной части абитуриентов обнаруживается неумение выявить те неизвестные, относительно которых следует составить систему соответствующих уравнений. Так, например, в 1993 году соответствующие задачи из вариантов факультета ВМиК решило примерно 27% поступающих. Еще хуже обстояло дело с решением задачи N 5 в июле 1995 года.

К решению стереометрических задач вообще приступает менее 5% абитуриентов, а доводят до конца единицы (правда, это не относится к задачам из июльских экзаменов факультета ВМиК 1998, 1999 и 2000 годов, где такого рода задачи шли под номером 4 из шести задач).

Ниже рассмотрены конкретные примеры допущенных ошибок при решении задач в 1993 — 1996 годах абитуриентами, поступавшими на факультеты ВМиК, экономический, геологический и ИСАА, а также на выездных экзаменах.

2.2. Ошибки, допущенные абитуриентами на вступительных письменных экзаменах по математике в 1993 г.

Плохое знание курса геометрии (что подтвердилось и на устных экзаменах) и слабое умение выполнить геометрические построения привело к тому, что на геологическим факультете даже те, кто построил как-то чертеж (без анализа и обоснования), не смогли найти подобные треугольники или обосновать подобие их, что связано с измерением вписанных углов. Даже те, кто решил соответствующие задачи, практически не умели обосновать решение. Многие, например, на экономическом факультете даже не пытались решать геометрическую задачу.

Очень много ошибок в решении задач связано со слабым представлением о тригонометрических функциях и соотношениях, что приводило к открытию новых (неверных) формул и соответствующему результату. Так, при решении четвертой задачи варианта экономического факультета большинство абитуриентов продемонстрировало незнание основных свойств обратных тригонометрических функций (область определения, область значений), а при решении второй задачи оказалось, что даже решение уравнения $\cos\alpha = \sin\beta$ является сложной задачей.

Многие абитуриенты (вариант ВМиК, задача 2) неправильно решали неравенство $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geqslant 0$. Используя выражение $\sin x$ через $\cos x$ (вариант геологического факультета, задача 2), забывали про модуль, то есть $|\sin x| = \sqrt{1 - \cos^2 x}$, а если даже получали уравнение типа $|\sin x| = t$, то его решали с многочисленными ошибками, не учитывая, что

$0 \leqslant t \leqslant 1$ или что это уравнение эквивалентно $\sin x = t$ или $\sin x = -t$, то есть $x = \pm \arcsin t + \pi k$ и т.д.

Много ошибок связано с утратой представлений о процентах (см. экономический факультет, задача 5), об арифметической прогрессии (см. ИСАА, задача 2), о простейших преобразованиях (см. геологический факультет, задача 1).

Часть абитуриентов допускала ошибки при работе с логарифмами (задача 1, вариант ВМиК; задача 4, вариант геологов; задача 1, вариант экономистов; задача 4, вариант ИСАА). Основная часть ошибок связана с основанием логарифма: одни просто не задумывались над вопросом об ОДЗ; другие считали, что основание всегда > 1; иные рассматривали для основания оба интервала, но считали, что функция всегда монотонно возрастающая (или просто не знали как связать аргументы функции, если логарифмы связаны соответствующим знаком неравенства). Часть абитуриентов забыла о том, что аргумент логарифма не может быть отрицательным.

В отдельных работах встречались ошибочные формулы для перехода к новому основанию, для логарифма произведения и т.п.

Много ошибок связано с неумением решать уравнения и неравенства: ошибки в решении квадратных неравенств и интерпретации области решений (например, отбор корней или запись области существования решения); ошибки при решении уравнений и неравенств с модулем (потеря ряда промежутков); ошибки при исследовании неравенств типа $x^2 - 4x + 7 \leqslant 3^x$, либо забывали указать ОДЗ, либо не учитывали ее при записи решения задачи; теряли изолированную точку (см. задачу 3 варианта ВМиК или задачу 3 варианта экономистов); ошибки при пересечении областей решений; ошибки из-за того, что при возведении в квадрат не учитывали область, где одна из частей исходного уравнения меньше нуля.

Во всех вариантах при решении текстовых задач значительная часть абитуриентов показала неумение проводить редукцию задач к системе алгебраических уравнений. Нет полного использования условий задачи, неудачно выбираются неизвестные и т.п.

Подробный анализ ошибок, допущенных на экзамене по математике поступающими на экономический факультет в 1993 г., приводится в заметке об этом экзамене, опубликованной в журнале "Математика в школе", $N1$, стр. 50—52 за 1994 год.

2.3. Ошибки, допущенные абитуриентами на вступительных письменных экзаменах по математике в 1994 г.

2.3.1. Факультет ВМиК

При решении первой задачи варианта пробного экзамена не все абитуриенты подмечали, например, что $(x-1)^2 = |x-1|^2$, а это приводит к естественной замене $t = |x-1| \Rightarrow t \geqslant 0$. Данное обстоятельство приводило к усложнению решения и подчас из-за арифметических ошибок — к неверным ответам.

При решении первой задачи варианта основного экзамена, даже сведя уравнение к квадратному относительно t (где $t = \sin 5x$) и получив решения $t = t_1 = -3-\sqrt{13}$ и $t = t_2 = -3+\sqrt{13}$, забывали, что $|\sin 5x| \leqslant 1$, и поэтому не отбрасывали случай $t = t_1$, хотя на множестве действительных чисел $\arcsin(-3-\sqrt{13})$ не определен.

При решении второй задачи варианта пробного экзамена наблюдалось нечеткое знание формул тригонометрии или выбирался неудачный путь решения, что иногда, быть может, и приводило к правильному ответу, но без учета всех возможных случаев, например, в одном из вариантов при выражении синуса и косинуса через котангенс рассматривался только случай положительного синуса и отрицательного косинуса, но не рассматривался случай отрицательного синуса и положительного косинуса.

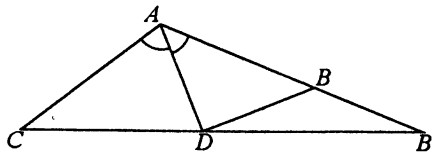
При решении второй задачи варианта основного экзамена очень часто сразу неравенство почленно возводилось в квадрат без исследования знаков его правой части и ОДЗ, это приводило к неверному ответу. Допускались ошибки в преобразованиях даже при правильно примененной схеме решений подобного рода неравенств.

При решении третьей задачи варианта пробного экзамена наблюдались в общем аналогичные ошибки, что и во второй задаче основного экзамена.

При решении третьей задачи варианта основного экзамена отмечались ошибки в преобразованиях логарифмических выражений, часто четко не находилось ОДЗ (в первом варианте $0 < 3\cos u \neq 1$), неудачно выбирался ход решения, вследствие чего получались громоздкие выкладки, ошибки в которых приводили к неправильным ответам и т.п.

В четвертых задачах вариантов пробного и основного экзаменов проявлялось слабое знание курса геометрии — планиметрии, поэтому их решило меньшее количество абитуриентов, чем даже пятые задачи. Однако в некоторых случаях, например, в четвертой задаче варианта основного экзамена иногда формально правильно составлялись и решались довольно сложные системы двух уравнений с двумя неизвестными, содержащие

уравнения третьей степени. Но это приводило к лишним решениям, поскольку полученным системам уравнений могли удовлетворять не только длины искомых элементов треугольника, но и некого четырехугольника,



что говорило о неудачном выборе хода решения.

В пятых задачах вариантов пробного экзамена неудачно вводились искомые неизвестные, что приводило к трудноразрешимым системам уравнений, хотя наблюдались и весьма оригинальные решения.

В пятых задачах основного экзамена довольно часто находились формулы для определения искомых величин (в виде элемента некой последовательности с помощью формул общего члена прогрессий), однако очень во многих случаях это делалось без четкого обоснования. При этом следует отметить, что как поощрение отмечались те случаи, где указанные формулы доказывались с помощью метода математической индукции, особенно если решался вопрос о выставлении оценки "4" или "5".

Шестые задачи — стереометрические вызывали наибольшие затруднения, их решили очень не многие поступающие.

*2.3.2. Экономический факультет **

При решении первых задач типичными ошибками были неумение разложить натуральное число на простые множители и потеря решения $(0;0)$. Иногда по невнимательности некоторые поступающие не обращали внимание на то, что надо было находить именно *целочисленные* решения, а не просто решения.

При решении вторых задач многие поступающие находили область определения функции вместо области ее значений. По всей видимости, в школе не уделяется должного внимания работе с этими довольно важными понятиями.

При решении третьих задач некоторые абитуриенты при преобразовании логарифма произведения или частного делали неэквивалентный переход, что приводило к сужению области и, как следствие, к потере решений. Второй типичной ошибкой, ставшей уже "традиционной", явилось неумение производить отбор решений в тригонометрических уравнениях.

* данные по экономическому факультету взяты из опубликованной в журнале "Математика в школе", $N1$, стр. 50—51, 1995 г. заметки об этом экзамене

При решении четвертых задач многие поступающие так и не смогли правильно построить искомое множество точек, либо делали ошибки при нахождении центра окружности.

Пятые задачи пытались решить многие абитуриенты, но большинство из них ошибочно искало оптимальный режим работы, исходя из условия минимума затрат на единицу времени.

Решить шестые задачи пытались немногие поступающие. Видимо, сказывается слабая подготовка по геометрии у нынешних выпускников средней школы.

2.3.3. Геологический факультет пробный экзамен (май)

В первых задачах трудности в их решении вызвало незнание, как сравниваются радикалы, видимо, из-за незнаний определения корня $n-$ ой степени, свойств степеней и свойств числовых неравенств.

Во вторых задачах часто не указывалось ОДЗ — ограничения на знак параметров a и b, стоящих под знаком квадратного корня, и необращение в нуль выражений, на которые надо производить деление (кстати, как и в первых задачах вариантов 1993 г.), а также — неумение применять формулы сокращенного умножения.

В третьих задачах часто наблюдалось сразу формальное возведение неравенства в квадрат, что *совершенно случайно* приводило к правильному ответу, но тем не менее не могло быть засчитано как правильно решенная задача. Подобные задачи решаются по некой достаточно стандартной схеме, что продемонстрировано в разобранном варианте.

В четвертых задачах наблюдались ошибки из-за слабого знания тригонометрических формул, а иногда — из-за неумения оперировать с тригонометрическими функциями числовых аргументов, например, с $\sin 5$, $\cos 2$ и т.п.

Пятые задачи решило относительно большее количество абитуриентов, что показало в общем умение решать простейшие логарифмические уравнения, к совокупности которых и сводились уравнения в этих задачах.

В шестых задачах либо проявлялось неумение решать биквадратные неравенства, из-за чего задача совсем не была решена; либо отмечалась потеря решения $x = 0$ в неравенстве вида $|x|(x^4 - 2x^2 - 3) \geqslant 0$, либо не учитывалось ОДЗ и не отбрасывалось лишнее решение $x = 0$ в неравенстве вида $\dfrac{1}{|x|}(x^4 - 6x^2 - 16) \leqslant 0$ при правильном решении биквадратного неравенства, которое заменой $t = x^2$ сводится к квадратному неравенству относительно t.

Седьмые задачи решило уже относительно меньшее количество поступающих, скорее всего, из-за более слабого владения курсом геометрии (планиметрии); хотя при достроении треугольника до параллелограмма и правильном применении теоремы косинусов и формулы площади треугольника по заданным длинам сторон и величины угла между ними не удавалось правильно выразить косинус угла между этими сторонами через его синус; наблюдались и ошибки других типов.

В восьмых задачах либо не удавалось вообще правильно ввести искомые величины (соответствующие времена), а если это и делалось, то не всегда удавалось правильно сравнивать их, используя условия задачи, и как следствие — неправильно находились необходимые между этими временами соотношения. Эти задачи также решило не очень много абитуриентов.

2.3.4. *Геологический факультет основной экзамен (июль)*

При решении первых задач отмечалось незнание многими поступающими формулы перевода бесконечной периодической дроби в обыкновенную (см. раздел "Используемые обозначения. Формулы элементарной математики."), что и явилось основным затруднением при их решении.

Во вторых задачах наблюдалось неумение преобразовывать числовые выражения с радикалами.

Эти первые две задачи правильно решило относительно небольшое количество абитуриентов, судя по всему из-за недостаточной проработки соответствующих тем в школьном курсе математики.

В четвертых задачах отмечалось неумение преобразовывать тригонометрические выражения по формулам суммы синусов или косинусов, а иногда и даже — неумение правильно решать простейшие тригонометрические уравнения, если к ним удавалось сводить решение задачи.

Третьи и пятые задачи решались наиболее успешно, но все же некоторым абитуриентам не удалось правильно найти ОДЗ и использовать неотрицательность значений квадратного корня.

В шестых задачах проявлялось незнание формулы синуса двойного аргумента, области изменения и промежутков положительности и отрицательности функций $\sin x$ и $\cos x$, что и вызвало затруднения при решении этой в общем простой задачи.

В седьмых задачах наблюдалось неумение использовать формулы сложного процента (см. раздел "Используемые обозначения. Формулы элементарной математики."); иногда решение задачи сводилось или к сложению, или к вычитанию процентов на каждом из этапов, что, естественно, приводило к неверному ответу.

Восьмые, девятые и десятые задачи вызвали наибольшее затруднение, их решили немногие поступающие.

В решении восьмых задач проявлялось незнание свойств описанных около окружности и свойств вписанных в окружность четырехугольников.

В девятых задачах подчас вызывало затруднение найти сумму неизвестных даже в правильно составленной системе уравнений, хотя, к сожалению, многим поступающим не удавалось даже просто составить эту систему.

В десятых задачах иногда удавалось построить требуемое сечение (правда, без четкого обоснования, что оно является именно таким, особенно в тех вариантах, где должен был получиться правильный шестиугольник) и затем найти все искомые величины; но в целом наблюдалось слабое знание свойств куба и неумение строить его сечения.

2.3.5. ИСАА

При решении первых задач не всем поступающим удавалось составить систему уравнений, а при составлении системы двух уравнений с тремя неизвестными не удавалось найти искомые величины.

При решении вторых задач наблюдалось незнание свойств степеней и логарифмов, неумение логарифмировать уравнение и другие ошибки.

В третьих задачах проявлялось слабое знание геометрии: незнание свойства касательной к окружности, отмечались ошибки в значениях тригонометрических функций острого угла прямоугольного треугольника, другие ошибки.

При решении четвертых задач многими поступающими допускались ошибки в определении ОДЗ и незнание областей изменения функций $\sin x$ и $\cos x$, отмечалось неумение решать иррациональные неравенства, а именно — формальное его возведение в квадрат, что и приводило к неверному результату.

При решении пятых задач основной трудностью было неумение использовать свойство монотонности показательной функции, наблюдались ошибки при раскрытии модуля и другие.

В решении шестых задач основными трудностями были: неумение выделять полные квадраты в числовых выражениях вида $2\sqrt{2} - 3$, а также и в других выражениях, это и не давало возможности в общем довольно быстро решить эту задачу.

2.4. Ошибки, допущенные абитуриентами на вступительных письменных экзаменах по математике в 1995 г.

2.4.1. Факультет ВМиК пробный экзамен (апрель)

При решении первых задач наблюдались ошибки в применении формул общего члена и суммы членов арифметической прогрессии. Некоторые поступающие, проводя правильно все необходимые действия, получив одно уравнение с двумя неизвестными относительно первого члена и разности арифметической прогрессии типа $a_1 + 12d = 13$, не смогли усмотреть в нем как раз искомое выражение. Видимо, это было связано с некоторой необычностью постановки задачи и формальным запоминанием формулы общего члена арифметической прогрессии.

При решении вторых задач в общем многим удавалось получить логарифмическое неравенство, однако при его решении было много стандартных ошибок, связанных с определением соответствующего ОДЗ, неучетом различных монотонностей логарифмической функции в зависимости от основания логарифма, а также — по невнимательности при отыскании пересечения решений получающегося квадратного неравенства и рассматриваемой области изменения переменной x и даже — при выписывании окончательного ответа.

В третьих задачах многим удавалось с помощью введения новой независимой переменной вида $t = 3^{\sin x}$ сводить уравнение к квадратному, но из-за неисследования области изменения этой переменной не отбрасывался лишний корень. Многие при правильном отыскании выражения для неизвестного x (через арксинус или арккосинус от логарифма) затруднялись провести правильный отбор корней, принадлежащих заданному интервалу.

В четвертых задачах основными трудностями были исследования получающихся решений квадратных неравенств, зависящих от параметра a, при различных значениях этого параметра. При полученном правильном решении этой задачи некоторые поступающие не исследовали того, что полученные промежутки решений неравенства являются непересекающимися, а это считалось недочетом.

Из тех поступающих, которые решали пятую задачу, практически никто не сумел правильно ответить на первый вопрос этой задачи, хотя некоторые ответили на второй вопрос, иногда допуская отдельные арифметические ошибки и в то же время предлагая другие нежели приведенные здесь методы вычисления искомой длины отрезка.

Следует особо отметить, что определенное количество поступающих правильно решило шестую задачу, видимо сообразив, что она в определенном смысле проще пятой задачи. Некоторые поступающие решили эту задачу лишь частично, правильно определив расположение заданных в условии задачи точек на ребрах куба.

Необходимо, однако, признать, что пятые и шестые задачи вызвали наибольшие затруднения у поступающих, их решали немногие.

2.4.2. Факультет ВМиК основной экзамен (июль)

При решении первых задач некоторые абитуриенты проявили неумение решать уравнения в целых числах, остальные в общем правильно решали эту задачу, забывая иногда произвести отбор решений, удовлетворяющих не только уравнению, но и неравенству, заданному в условии задачи.

При решении вторых задач некоторым абитуриентам не удавалось правильно и удобно ввести новые неизвестные, из-за чего они и не смогли решить эту задачу. Однако некоторые поступающие, которые свели исходную систему уравнений к системе относительно $u = x + y$ и $v = xy$, не сумели провести правильный отбор нужной пары u ; v и из-за этого — получить правильный ответ.

Третья задача оказалось несложной, ее решило большинство абитуриентов. Не справились с ней те, кто видимо забыл, в каком отношении делятся медианы треугольника в точке их пересечения.

В четвертых задачах, как это бывает довольно часто, поступающие не сумели выделить полный квадрат в выражениях вида $\cos^2 x - \cos x$, а затем и преобразовать другую часть неравенства. Некоторые из тех, кто все же это проделал и затем правильно нашел ОДЗ, не смогли правильно решить систему, состоящую из простейших тригонометрических и квадратного неравенств, и потому получить правильный ответ.

Пятые задачи решали не многие поступающие. Некоторые получали и решали системы уравнений относительно знаменателя геометрической прогрессии q и p_1, p_2, p_3, но далее не всем удавалось правильно выразить общие затраты, провести необходимое сравнение получающихся иррациональных чисел и отобрать нужные значения p_1, p_2, p_3. Почти никто не сумел решить эту задачу полностью.

Шестые задачи вызвали наибольшие затруднения. Их пытались решать очень немногие абитуриенты и практически никто из них не сумел полностью решить последнюю задачу. Однако некоторые абитуриенты приводили указанный ниже, в п. 3.1.9 второй способ решения этих задач с помощью координатного метода и тем самым правильно их решали.

2.4.3. *Экономический факультет, отделение экономики*

При решении первых задач допускалась достаточно стандартная ошибка в том, что исходное неравенство сразу почленно возводилось в квадрат без исследования знака левой части неравенства и иногда даже без исследования ОДЗ — неотрицательности подкоренного выражения, это естественно приводило к неверному ответу.

Во вторых задачах многие поступающие делали ошибки в отыскании ОДЗ, связанной с ограничениями на основание логарифма и положительностью аргумента логарифмической функции, из-за чего, даже правильно затем решив получающееся простейшее тригонометрическое уравнение, они не смогли сделать правильный отбор его корней.

Основной трудностью при решении третьей задачи оказалось неумение распознать, что условию задачи удовлетворяют *две* трапеции, а не одна. В этом и заключалась некая "нестандартность" третьих задач, к которой многие поступающие оказались, видимо, психологически не готовыми.

При решении четвертых задач проявлялось неумение правильно оперировать с процентами, а иногда и с прогрессиями, что в некоторых случаях приводило к весьма досадным ошибкам, из-за которых получался неверный ответ.

Пятые задачи вызвали, пожалуй, наибольшие трудности у поступающих. Самое главное, что надо было проделать — это выделить полный квадрат в выражении, от которого берется арктангенс, а затем воспользоваться монотонностью арктангенса и даже его поведением при стремлении аргумента арктангенса к плюс бесконечности. С этим и не справилось подавляющее большинство поступающих.

Некоторые из абитуриентов, которые решали шестую задачу, приводили так называемое "графическое" решение, быть может, и без подробного обоснования, но были и более серьезные недочеты и ошибки, из-за которых не был получен правильный ответ.

2.4.4. *Экономический факультет, отделение менеджмента*

При решении первых задач допускалась достаточно стандартная ошибка в том, что исходное уравнение сразу почленно возводилось в квадрат без исследования знака правой части уравнения и иногда даже без исследования ОДЗ — неотрицательности подкоренного выражения, это естественно приводило к неверному ответу, появлению посторонних корней.

Во вторых задачах многие поступающие правильно решили уравнение вида $\sin 3x = 0$, но не сумели правильно отбросить те решения этого уравнения, которые обращают в нуль соответствующий знаменатель, или вовсе забыли это проделать.

В третьих задачах многие поступающие делали ошибки в отыскании ОДЗ, связанной с ограничениями на основание логарифма (оно должно быть больше нуля и меньше единицы) и положительностью аргумента логарифмической функции (а иногда вообще не находили ОДЗ), делая также ошибки в применении свойства монотонности логарифмической функции (в случае разобранного варианта это основание больше нуля и меньше единицы, из-за чего при снятии логарифмов с обеих частей неравенства его знак должен измениться на противоположный), поэтому, даже правильно затем решив получающееся неравенство, они не смогли сделать правильный отбор его решений.

При решении четвертых задач проявлялось неумение правильно оперировать со сложными процентами, а также и с формулой суммы членов геометрической прогрессии, что и приводило к ошибкам, из-за которых получался при иногда в общем правильных идейных рассуждениях неверный ответ.

Пятые задачи хоть и геометрические, но достаточно несложные. При их решении затруднения вызвали незнание (или плохое знание) теорем синусов и косинусов для треугольника.

При решении шестых задач наблюдались ошибки, аналогичные тем, что и при решении первых задач, но даже те, кто их избежал, проявили слабое знание свойств квадратного трехчлена, из-за чего и не удавалось получить правильный ответ.

2.4.5. Геологический факультет пробный экзамен (май)

При решении первых задач некоторые поступающие делали достаточно грубую ошибку, сразу избавляясь от знаменателя без учета его знака. Но даже те, кто избежал этой ошибки, часто не могли потом решить преобразованное неравенство, иногда наблюдались ошибки на завершающем этапе, когда в ответ надо было правильно включить или не включить концы соответствующих промежутков.

При решении вторых задач очень часто забывалось про ОДЗ — положительность выражений, от которых берутся логарифмы, что естественно приводило к появлению посторонних корней.

При решении третьих задач допускалась достаточно стандартная ошибка в том, что исходное уравнение сразу почленно возводилось в квадрат без исследования знака правой части уравнения и иногда даже без исследования ОДЗ — неотрицательности подкоренного выражения. Наблюдалась и такая существенная ошибка, как неучитывание области изменения синуса ($-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$) и аналогично — косинуса, из-за которой не отбрасывались посторонние корни при решении квадратного уравнения

$t^2+t-1=0$, $t=\sin x$. Но даже те, кто избегал этих ошибок, иногда забывали проверять, что не все решения уравнения вида $\sin x=(\sqrt{5}-1):2$ удовлетворяют неравенству $\cos x \leqslant 0$. Все эти ошибки и приводили к ошибочным ответам.

В четвёртых задачах многие делали правильную замену неизвестного вида $t=5^{-x}$ и получали соответствующее квадратное неравенство, но затем решали его (что, к сожалению, встречается довольно часто) не как неравенство, а как уравнение. Избежавшие указанной ошибки не всегда могли правильно решить простейшее показательное неравенство вида $5^{-x} \geqslant 10$.

В пятых задачах, видимо, у некоторых поступающих вызвала трудность постановка их вопроса: не все, кто правильно выразил затраченные и планируемые времена движения, поняли, что надо было просто решить неравенство относительно первоначальной скорости, учитывая по смыслу задачи ее положительность.

Шестые, геометрические задачи вызвали значительные затруднения у поступающих из-за более слабого знания геометрии, их решили немногие.

При решении седьмых задач многие не сумели распознать в подкоренном выражении полный квадрат и далее сразу верно преобразовать выражение для $f(x)$, что и явилось основной трудностью. Однако некоторые, кто преодолел этот этап, не сумели правильно решить уже преобразованное исходное неравенство либо относительно модуля, а иногда, забывая или не забывая, что $\sqrt{x} \geqslant 0$, не смогли правильно выписать окончательный ответ в зависимости от тех или иных значений параметра a.

В восьмых задачах многие затруднились проделать операцию выделения полных квадратов в левых частях неравенств, а потому распознать, что задаваемая фигура есть объединение частей двух кругов. Однако некоторым поступающим все же удалось правильно нарисовать искомую фигуру, но без вычисления ее площади и достаточно четкого ее обоснования.

Девятые задачи вызвали наибольшие трудности у поступающих. Решили их буквально единицы.

2.4.6. *Геологический факультет основной экзамен (июль)*

При решении первых задач практически все абитуриенты преобразовали уравнение к виду: корень квадратный из выражения равен выражению; но далее допускалась достаточно стандартная ошибка в том, что полученное уравнение сразу почленно возводилось в квадрат без исследования знака правой части уравнения и иногда даже без исследования ОДЗ — неотрицательности подкоренного выражения, это естественно приводило к неверному ответу, появлению посторонних корней.

Во вторых задачах многие не заметили, что $|x|^2 = x^2$, что позволяет сразу свести исходное неравенство к квадратному неравенству относительно неизвестной $t = |x|$, где $t \geqslant 0$. Однако те, кто правильно раскрывали $|x|$ и затем правильно решали получающиеся квадратные неравенства относительно переменной x с учетом $x \geqslant 0$ или $x \leqslant 0$, получали, пусть и не самым коротким путем, но правильный ответ. Особых проблем вторые задачи у поступающих не вызвали, их решили очень многие.

При решении третьих задач практически все преобразовали первое уравнение системы в совокупность двух уравнений и затем подстановкой решали второе уравнение. Однако некоторые забывали при этом про ОДЗ — неотрицательность подкоренного выражения $x-y$ или $y-x$, что приводило к появлению посторонних решений исходной системы уравнений.

Решая четвертые задачи, почти все абитуриенты свели исходное неравенство к совокупности систем двух более простых неравенств (как это в разборе одного из вариантов и продемонстрировано), или иногда даже применяли обобщение метода интервалов с учетом того, что $3^x - 2 \geqslant (\leqslant) 0 \Leftrightarrow x \geqslant (\leqslant) \log_3 2$. Характерными ошибками при решении этих задач было неправильное сравнение значений неизвестного x, при которых обращаются в нуль числитель или знаменатель выражения, стоящего в левой части исходного неравенства, что приводило к ошибочным окончательным ответам.

Пятые задачи оказались для поступающих более сложными. При их решении наблюдались ошибки и в применении формул приведения, в правильном выписывании и определении ОДЗ уравнения. Наблюдалась и такая существенная ошибка, как неучет области изменения косинуса ($-1 \leqslant \cos \pi x \leqslant 1$) и аналогично — синуса, из-за которой не отбрасывались посторонние корни при решении квадратного уравнения вида $2\sqrt{3}t^2 + t - 2\sqrt{3} = 0$, $t = \cos \pi x$. Наконец, те, кто и избежали указанных ошибок, не смогли правильно или вовсе забыли провести отбор решений простейшего тригонометрического уравнения, удовлетворяющих условию вида $-2 < x < 2$, и из-за этой досадной ошибки не получили правильного ответа.

Шестые задачи оказались для поступающих более доступными по сравнению с пятыми задачами, хотя у некоторых, кто решал их, вызвали трудности оперирования с процентами, из-за чего им не удалось получить в общем-то простое уравнение для определения искомых величин.

Седьмые, геометрические задачи вызвали значительные затруднения у поступающих из-за более слабого знания геометрии, их решили немногие.

В восьмых задачах тем, кто решал их, легко удавалось свести исходное неравенство к неравенству вида $t^2 - 20t - a < 0$, где $t = 3^x$, но далее из-за неумения применять необходимые свойства квадратного трехчлена не удалось достаточно простым путем выйти на окончательный ответ. Эти задачи также решили очень немногие из поступающих.

2.4.7. ИСАА

При решении первых задач некоторые поступающие проявили неумение применять свойства членов геометрической прогрессии, а иногда и незнание того, что такое геометрическая прогрессия, а некоторые из тех, кто правильно применил свойства членов геометрической прогрессии и преобразовал выражение вида $\sin(\arcsin x)$ или $\cos(\arccos x)$, видимо, забыли, что $\arcsin x$ и $\arccos x$ определены только для $x \in [-1; 1]$, а это привело к появлению посторонних решений задачи.

При решении вторых задач очень часто забывалось про ОДЗ — положительность выражений, от которых берутся логарифмы, что естественно приводило к появлению посторонних корней, возникали также трудности в преобразовании левой части уравнения: ряд поступающих не заметили, что надо разложить квадратный трехчлен под логарифмом на множители и затем применить формулу логарифма произведения и разложение на множители в преобразованном таким образом уравнении.

При решении третьих задач проявлялось неумение правильно оперировать со сложными процентами, а также иногда и неумение находить максимальное значение квадратного трехчлена и аргумента, при котором оно достигается, что приводило либо к отсутствию ответа в задаче или к неправильному ответу.

Четвертые, геометрические задачи вызвали значительные затруднения у поступающих из-за слабого знания геометрии, их решили очень немногие поступающие.

Пятые задачи оказались сложнее, чем первые три. Те, кто решали эти задачи, часто не могли правильно определить ОДЗ или вообще забывали про него. Основной трудностью при решении этих задач было сохранить равносильность исходного неравенства при переходе от него к совокупности более простых уравнений и неравенств и затем, решая их, учесть все ограничения на ОДЗ, наблюдалось также и незнание формул тригонометрии, того факта, что $\sqrt{f^2(x)} = |f(x)|$ и т.п. Эти задачи решили немногие поступающие.

Те, кто пытался решить шестую задачу, не сообразили применить операцию выделения полного квадрата в левой части исходного неравенства, а также не учитывали, что $f^2(x) = |f(x)|^2$, это и явилось основной трудностью при отыскании вида решений исходного неравенства и тем более — исследования, когда имеется не более одного решения. Шестые задачи также решили немногие поступающие.

2.4.8. Выездные экзамены

Ниже, в п. 2.5.8 проводится анализ ошибок, допущенных поступающими в 1996 году на выездных экзаменах. Следует отметить, что в общем аналогичная ситуация наблюдалась и в 1995 году, когда Московский университет проводил такого вида экзамены впервые.

2.5. Ошибки, допущенные абитуриентами на вступительных письменных экзаменах по математике в 1996 г.

2.5.1. Факультет ВМиК пробный экзамен (апрель)

Решение первых задач не вызвало проблем у большинства поступающих, однако некоторые из абитуриентов, перебросив в правую часть выражение $(2x+1)^2$ и формально возводя полученное неравенство в квадрат (забывая подчас об ОДЗ), естественно либо вообще не получали решений, либо получали только $x = 1/2$. Наблюдались также ошибки и в отыскании ОДЗ.

При решении вторых задач наблюдались ошибки в определении ОДЗ, а иногда о нем и забывалось, немало поступающих, забывая отдельно рассмотреть случай $(x-2)^2 = 1$, теряли корень $x = 1$, но иногда, видимо из-за невнимательного исследования ОДЗ, рассмотрев отдельно случай $(x-2)^2 = 1$ получали кроме корня $x = 1$ еще и корень $x = 3$, который не удовлетворяет условию $\frac{x}{6} + \frac{1}{2} \neq 1$. Немало поступающих делали *неравносильный* переход от исходного уравнения к уравнению

$$\log_{(x-2)^2}(2x+3) = \log_{(x-2)^2}\left(\frac{x}{6} + \frac{1}{2}\right).$$

При решении третьих задач многие поступающие сразу пытались возводить почленно уравнение в квадрат, получая при этом сложное уравнение четвертой степени относительно переменной $t = \sin x$, многие пытались исследовать неотрицательность подкоренного выражения или неотрицательность правой части уравнения, что весьма усложняло решение, нередко приводило к дополнительным ошибкам. Видимо, это связано с недостаточной практикой выделения полного квадрата в выражениях.

Четвертые задачи решило немного абитуриентов. Видимо, не справились с задачей те поступающие, у которых решение геометрических задач вообще является трудной проблемой.

При решении пятых задач многие абитуриенты не смогли провести разложение многочлена четвертой степени двух переменных на произведение двух квадратных трехчленов. Но даже те из абитуриентов, кто успешно преодолел этот этап решения задачи, не смогли потом правильно решить в целых числах полученные уравнения. Видимо тема решения задач на целочисленную арифметику — относительно слабое место в преподавании школьного курса математики.

Шестые задачи вызвали наибольшие трудности у поступающих. Как всегда стереометрия оказалась камнем преткновения для абсолютного большинства абитуриентов.

2.5.2. Факультет ВМиК основной экзамен (июль)

Первые и вторые задачи не вызвали особых затруднений, их решили многие, но значительная часть абитуриентов споткнулась на смесях и определении их частей. Подножка — "чисто химическая".

При решении третьих задач многие абитуриенты дошли до этапа получения корней уравнения $y^2-(a-1)y+2a+3=0$, где $y=5^x$, однако провести исследование положительности этих корней (для чего надо было решить два иррациональных неравенства) многие уже не смогли, допуская достаточно распространенные ошибки при решении таких неравенств. Некоторые поступающие, к сожалению, забыли даже про условие неотрицательности дискриминанта квадратного трехчлена
$f(y)=y^2-(a-1)y+2a+3$.

Четвертые задачи вызвали уже значительные трудности у поступающих. Это, видимо, связано со слабым владением техникой оперирования с арквыражениями, незнанием их области определения, неумением применять свойства монотонности тригонометрических функций и неумением преобразовывать выражения $\sin(\arccos a)$, $\cos(\arcsin a)$ и т.п. Эти задачи решили немногие, а некоторые из решавших не провели тщательно и аккуратно необходимые сравнения чисел.

Пятые задачи тоже решили немногие абитуриенты. Это, видимо, связано с упомянутыми выше проблемами — уметь выделять полный квадрат, применять координатные методы решения задач. У отдельных поступающих, получивших решивших соответствующие системы уравнений (см. на стр. 95 внизу), видимо из-за громоздкости полученных решений возникли проблемы, какая из двух пар решений действительно удовлетворяет исходной системе уравнений.

Шестые задачи хоть и планиметрические решили буквально единицы. Видимо нелегко было догадаться об использовании приведенного в начале решения этой задачи в п. 3.1.13. утверждения, которое надо было обосновать, а также, по-видимому, многие не знают теорему о равенстве произведений отрезков пересекающихся хорд.

2.5.3. Экономический факультет, отделение экономики

При решении первых задач многие абитуриенты затруднились даже упростить исходную систему уравнений и привести ее к указанному ниже, в п. 3.2.9. виду (1)—(3), хотя и почти все правильно нашли ОДЗ : $x\leqslant 0$ и раскрыли модуль. Некоторые поступающие, получившие систему уравнений (1)—(3) (см. стр. 120), к сожалению, не сумели упростить ее, применяя формулу суммы кубов двух чисел. Однако часть из них, применив способ

подстановки, все же правильно решили эту систему и отобрали удовлетворяющие ОДЗ решения.

Во вторых задачах главное было правильно найти ОДЗ и затем с его учетом решить простое квадратное неравенство. Те кто преодолел этап отыскания ОДЗ — решили эту задачу.

При решении третьих задач многие поступающие свели эту задачу к совокупности уравнений, правильно отобрали корень уравнения $2t^2 - 3\sqrt{2}t + 2 = 0$, $t = \cos(x/2)$, удовлетворяющий неравенствам $|t| \leqslant 1$ (хотя некоторые из них споткнулись и на этом этапе), но затем или забыли или не сумели отобрать из найденных решений уравнения $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(19\pi/3) = \sqrt{3}$ те, которые удовлетворяют ОДЗ — неравенству $2t^2 - 3\sqrt{2}t + 2 \leqslant 0$.

При решении четвертых задач у многих возникли проблемы в отыскании наибольшего и наименьшего значений величины, зависящей от целочисленных переменных $100(4m+5n+6k)$, при условии $12m+16n+15k = 326$. Это как уже в п. 3.5.1. отмечалось связано с тем, что многие школьники не умеют решать задачи на целочисленную арифметику.

Пятые задачи — геометрические вызвали значительные трудности у поступающих, их решали немногие. Видимо для многих школьников трудно бывает догадаться о применении координатного метода в решении той или иной задачи, если система координат в условии задачи явно не фигурирует.

Шестые задачи решали единицы. Видимо для многих является проблемой решение задач с арквыражениями, в частности, многие не знают, как преобразуются выражения типа $\arcsin(\sin x)$, $\arccos(\cos x)$ и т.п.

2.5.4. Экономический факультет, отделение менеджмента

Первые задачи решило большинство поступающих, хотя и наблюдались ошибки, связанные с незнанием свойств логарифмов и даже неумением правильно раскрывать модуль.

При решении вторых задач многие догадались о замене вида $z = 3^y$, где $z > 0$, однако полученную затем систему уравнений (2)—(3) (см. стр. 127) не всегда решали лучшим образом. В общем многие поступающие решили и эту задачу.

Третьи задачи, явно проще, чем такого же типа четвертые задачи отделения экономики, решило немало поступающих, хотя и далеко не все. Очевидно, что и здесь сказывается неумение многих решать задачи на целые числа.

При решении четвертых задач многие правильно свели уравнение к системе (1)—(2), хотя и забывая об условии $\sin x \geqslant 0$, возводя лишь фор-

мально уравнение в квадрат. Поэтому те, кто забыл об условии $\sin x \geqslant 0$, правильно проделав все остальное, получили лишние решения.

Пятые задачи, в общем достаточно простые, решили те, кто знает теорему о свойстве секущих окружности, выходящих из одной точки, и не решили, видимо те, кто этой теоремы, непосредственно вытекающей из теоремы о равенстве квадрата касательной произведению секущей на ее внешнюю часть, не знает.

При решении шестых задач многие поступающие так и не смогли правильно построить искомое множество точек — параллелограмм; что связано прежде всего с проблемой раскрытия фигурирующих в условиях этих задач модулей. Некоторые из тех, кто путем правильного раскрытия модулей и получали параллелограммы (при $p > 0$), затруднялись правильно выражать его площадь (плохо ориентируясь в системе координат), из чего непосредственно определяется искомое значение параметра p .

2.5.5. Геологический факультет пробный экзамен (май)

Первые задачи не вызвали серьезных проблем. Их решили практически все поступающие.

Вторые задачи в основном решили и даже те, кто не стал делать замену типа $t = 7x/2$, однако встречались ошибки в записи окончательного ответа.

При решении третьих задач наблюдались ошибки в отыскании ОДЗ, а иногда про нее и вовсе забывали. Некоторые поступающие забывали проверять, все ли корни получающегося при снятии логарифмов квадратного уравнения удовлетворяют ОДЗ, что приводило или к неправильным, или к лишним корням.

В четвертых задачах не всегда делалась замена $t = 2^{-x^2}$, где $t > 0$, а это приводило к определенным неудобствам при решении неравенства, в частности, не всегда удавалось выходить на решение совокупности неравенств $x^2 > 1$, $x^2 < -\log_2 3$. Все это приводило к появлению посторонних решений. Некоторые поступающие не умеют решать даже простейшие квадратные неравенства.

Пятые задачи решало много поступающих, но к сожалению, немало из них получали ответ в виде $1,4$ дл., а не в виде *неравенства*. Видимо к этому привела необычность для многих того обстоятельства, что одно из условий задачи было задано в виде неравенства.

Шестые (геометрические) задачи вызвали трудности у многих поступающих, видимо из-за слабого знания геометрии у многих, кто поступает на геологический факультет. Правда, определенное количество абитуриентов решило эту задачу, причем некоторые из тех, кто умело использовал и

применял необходимые теоремы планиметрии, допускали арифметические ошибки.

При решении седьмых задач наблюдались ошибки в правильном использовании условия равенства синусов, многие сразу пытались раскрывать модуль, что не являлось удачным ходом решения. Причем привычка подавляющего большинства поступающих писать $n \in Z$, $k \in Z$ и т.п. (что в данной книге нигде не встречается) привела к тому, что забывалось, какой знак переменной x в том или ином случае рассматривался, а потому не отбрасывались лишние целые значения параметров n или k. Те, кто выражал $|x|$ через n или k, также иногда забывали, что $|x| \geqslant 0$. Указанные ошибки, естественно, приводили к неверному ответу, и они были наиболее распространенными при решении этих задач.

Восьмые задачи вызвали наибольшие затруднения у поступающих. Их решили очень немногие. Видимо и задачи с параметрами поступающие на геологический факультет решать в общем не умеют.

2.5.6. Геологический факультет основной экзамен (июль)

Первые задачи решили почти все поступающие, хотя все же немногие формально возводили уравнение в квадрат, забывая о неотрицательности правой части уравнения или не делая проверки, удовлетворяют ли решения получающегося квадратного уравнения исходному уравнению. Это приводило к появлению лишнего корня.

При решении вторых задач некоторые абитуриенты неправильно определяли знак выражения под модулем, а это приводило к неверным решениям исходной задачи.

В третьих задачах отмечались ошибки при решении получающегося тригонометрического уравнения, а если оно и решалось правильно, то или забывалось про ОДЗ (неравенство нулю знаменателя), или забывалось об условии вида $x \in (0, \pi)$. Все это приводило к появлению лишних корней.

В четвертых задачах наблюдались ошибки в ОДЗ (видимо непривычно то, что перед аргументами фигурирующих в неравенстве логарифмов стоит знак " $-$ "). Многие абитуриенты ошибались в применении свойств логарифмов, в решении неравенств, получающихся в результате замены типа $t = \log_3(-x)$.

При решении систем уравнений в пятых задачах некоторые поступающие в результате формального почленного деления уравнений, теряли удовлетворяющую им пару $x = 0, y = 0$, наблюдались и ошибки в вычислениях.

В шестых задачах отмечалось неправильное применение сложных процентов, хотя их решили многие поступающие, отмечались также вычислительные ошибки.

При анализе решений седьмых и восьмых задач можно отметить совершенно аналогичную ситуацию, что и при решении соответственно шестых и восьмых задач вариантов предварительного экзамена, то есть в общем неумение поступающих на геологический факультет решать геометрические задачи и задачи с параметрами.

2.5.7. ИСАА

При решении первых задач не всем поступающим удалось путем замены $t = 2^x$, где $t > 0$ свести их к решению квадратного неравенства, а если такая замена и проводилась, то решение неравенства заменялось решением соответствующего уравнения. Иногда, наблюдались ошибки при решении показательных неравенств вида $2^x \leqslant 5$ (возрастание показательной функции заменялось убыванием, неумение выразить решение неравенства через логарифмы).

При решении вторых задач наблюдалось неумение изображать на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств; иногда даже и неумение правильно раскрыть $|x|$, вследствие чего искомая фигура не была построена и потому не была найдена ее площадь. Не все поступающие, кто решил задачу правильно, заметили, что получающаяся фигура симметрична относительно оси ординат и поэтому достаточно было построить часть фигуры, лежащую в правой координатной полуплоскости, вычислить ее площадь, а затем симметрично отразить ее относительно оси ординат и полученную площадь удвоить.

При решении третьих задач наблюдалось или вовсе незнание областей определения логарифмической функций и квадратного корня (правда, это единичные случаи) или, если и были правильно выписаны все неравенства, определяющие искомую область определения, то решалась их система или с ошибками, или неправильно определялись те нули знаменателя функции, которые попадают в интервалы, определяемые решением системы квадратных неравенств. Иногда число π приравнивалось числу $3,14$, при этом даже если область определения функции выписывалась верно, задача не считалась решенной правильно.

В четвертых задачах часто наблюдалось неправильное преобразование правой части неравенства (из-за незнания свойств логарифмов), не менялся знак неравенства на противоположный при снятии логарифмов. Иногда забывали про условие *положительности* выражения, от которого берется логарифм, или правильно выписанная система иррациональных неравенств неверно решалась. Очень часто терялось изолированное решение $x = -2$.

Пятые задачи многие не решили, видимо, из-за незнания теоремы о свойстве секущих окружности, выходящих из одной точки. Однако те, кто эту теорему сумел правильно применить, не сумели затем дважды применить теорему косинусов. Некоторые поступающие допустили ошибки в вычислениях, приведшие к неправильному ответу.

Шестые задачи решили единицы. Трудности вызвали: применение формулы вспомогательного аргумента, использование монотонности логарифмической функции, отыскание наибольшего и наименьшего значений у выражения, от которого берется логарифм и т.д.

2.5.8. Выездные экзамены

Анализируя ошибки, допущенные абитуриентами на выездных письменных экзаменах, хотелось бы отметить, что все характерные ошибки 1996 года, встречавшиеся на предварительных и основных экзаменов факультетов ВМиК, геологического, экономического и ИСАА, были и здесь.

Но, конечно, специфика задач привела к некоторым особенностям. За стереометрию просто не брались (см. ниже задачу 9 п. 3.5.6 и задачу 10 п. 3.5.8). С планиметрией дело обстояло лучше, но в задаче 4 п. 3.5.6 многие спасовали перед вычислением $max\ S$; в задаче 7 п. 3.5.6, выписывая формулу Герона и формулы, связывающей площадь треугольника с его сторонами, радиусом вписанной в него окружности и высотами (то есть получив все, что касается решения задачи), не смогли получить

$$r = \frac{h_a \cdot h_b \cdot h_c}{h_a \cdot h_b + h_b \cdot h_c + h_c \cdot h_a}\ .$$

В задаче 9 п. 3.5.5 многие, кто решал ее, находили правильный ответ, но не смогли обосновать единственность полученного решения. Многие решили бы задачу 4 п. 3.5.7 и задачу 5 п. 3.5.8, если бы не арифметические ошибки, а вот задача 8 п. 3.5.8 неожиданно оказалась сложной для основного контингента поступающих.

Складывается впечатление, что основная часть выпускников школ просто не понимает задачу с параметрами (см. ниже п. 3.5.5, задача 10, п. 3.5.6, задача 8, п. 3.5.7, задача 10, п. 3.5.8, задача 9), так как те, кто брался за решение этих задач (а таких очень мало) подбирали значения параметра, пытаясь угадать подходящие значения, пытались рассматривать частные случаи, а также пробовали применять высшую математику (производную функции) и т.п., то есть делали все, что угодно, но так и не пытаясь уяснить условие задачи.

Редукция задачи 3 п. 3.5.6 к системе уравнений с двумя неизвестными (отношение скоростей и время на одном из двух участков пути при движении из B в A) для многих оказалась неразрешимой проблемой, аналогично тому, как в задаче 3 п. 3.5.7 перечисление всех натуральных двузначных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 3 , $a = 4k + 3$, где начальное $k = 2$, поскольку первое из них 11, а конечное $k = 24$, так как последнее такое число 99. В задаче 3 п. 3.5.8 почти все, за исключением единиц потеряли решение с $d = 0$.

В задаче 8 п. 3.5.7 практически 50% абитуриентов решило первую половину задачи, то есть получили $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, но затем половина из них не выписали в ответ этот результат (см. начало условия задачи). Только 13% смогли решить задачу до конца, то есть решить уравнение

$$2\sqrt{2} \cdot (\pi/2 + \pi n) - 17\sqrt{2}\pi = \pi m \ ,$$

где n и m — любые целые числа. Некоторые вместо m поставили тоже n и затем честно выписали, что решения нет, то есть нет общих корней. Часть поступающих произвела сокращение на π и выписала верное равенство $\sqrt{2} \cdot (1 + 2n - 17) = m$, а затем последовало утверждение "иррациональное число не может быть целым, а потому общих решений нет". Это было бы верно, если бы $1 + 2n - 17$ не обращалось бы в нуль, а $m \in Z$. Но, очевидно, что при $n = 8$, $m = 0$ указанное равенство принимает вид $\sqrt{2} \cdot 0 = 0$, что является верным числовым равенством.

Обсуждение других ошибок было бы повторением изложенного в п. 2.5.1 — 2.5.7.

Выездные экзамены показали, что среди выпускников школ различных регионов России есть хорошо подготовленные учащиеся, способные решать если не все задачи в предложенных вариантах, то большую часть из них. Некоторые учащиеся решили все задачи, правда, в тех вариантах, где не было стереометрических задач. Общий итог можно сформулировать так : в специализированных школах, лицеях и гимназиях подготовка учащихся по математике не хуже, чем в Москве.

3. ПРИМЕРЫ ВАРИАНТОВ, ПРЕДЛАГАВШИХСЯ НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ НА ФАКУЛЬТЕТАХ ВМиК, ЭКОНОМИЧЕСКОМ, ГЕОЛОГИЧЕСКОМ и ИСАА в 1993 — 1996 годах

3.1. Факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ (ВМиК)

3.1.1. Вариант с решениями задач 1993 г.

1. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{8-2\sqrt{7}}+1-\sqrt{3}}(4x-x^2-2) \geqslant 0 .$$

Решение

Так как

$$\sqrt{8-2\sqrt{7}}+1-\sqrt{3} =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{7}-1)^2}+1-\sqrt{3} = \sqrt{7}-\sqrt{3} \quad \in \quad (0,1) ,$$

то данное неравенство эквивалентно системе неравенств

$$\begin{cases} 4x-x^2-2 \leqslant 1 , \\ 4x-x^2-2 > 0 , \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x \leqslant 1 ; \quad x \geqslant 3 , \\ 2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2} . \end{cases}$$

Ответ: $2-\sqrt{2} < x \leqslant 1 ; \ 3 \leqslant x < 2+\sqrt{2} .$

2. На отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ найти все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{1+2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x} .$$

Решение

Уравнение имеет вид

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{(\sqrt{3}\cos x - \sin x)^2} \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x - \sin x \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \geqslant 0 , \ x \in [0,\pi] .$$

Ответ: $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$.

3. Решить неравенство

$$| 3^x - 4 | + | x^2 - 4x + 3 | \leqslant 3^x + 4x - x^2 - 7 .$$

Решение

1 способ.

Обозначим $a = 3^x - 4$; $b = x^2 - 4x + 3$. Неравенство имеет вид

$$| a | + | b | \leqslant a - b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a \geqslant 0 , \\ b \leqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \log_3 4 \leqslant x \leqslant 3 .$$

2 способ.

Выражения a ; b меняют знак в точках: 1 , $\log_3 4$, 3 , а, следовательно, надо рассмотреть интервалы:

$x \leqslant 1$; $1 < x < \log_3 4$; $\log_3 4 \leqslant x \leqslant 3$; $x > 3$.

Раскрывая модули в левой части неравенства, получим:

1) $x \leqslant 1$ $\quad \begin{cases} x \leqslant 1 , \\ x^2 - 4x + 7 \leqslant 3^x , \end{cases}$

из $3^x \leqslant 3$, $x^2 - 4x + 7 \geqslant 4$ вытекает, что $x \in \varnothing$;

2) $1 < x < \log_3 4$ $\quad \begin{cases} 1 < x < \log_3 4 , \\ 4 \leqslant 3^x \Leftrightarrow \log_3 4 \leqslant x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x \in \varnothing ;$

3) $\log_3 4 \leqslant x \leqslant 3$ $\quad \begin{cases} \log_3 4 \leqslant x \leqslant 3 , \\ 0 \leqslant 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log_3 4 \leqslant x \leqslant 3 ;$$

4) $x > 3$ $\quad \begin{cases} x > 3 , \\ x^2 - 4x + 3 \leqslant 0 \Leftrightarrow 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x \in \varnothing .$

Ответ: $\log_3 4 \leqslant x \leqslant 3$.

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC точка D делит сторону BC в отношении $2:1$, считая от вершины B, а точка E — середина стороны AB. Известно, что медиана CQ треугольника CED равна $\frac{\sqrt{23}}{2}$ и $DE = \frac{\sqrt{23}}{2}$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение

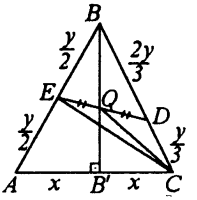


рис. 1

Пусть $AB = BC = y$, $AC = 2x \Rightarrow \cos\angle C = \frac{x}{y}$,

$\cos\angle B = 1 - 2\cos^2\angle C = \frac{y^2 - 2x^2}{y^2}$,

$R = \frac{abc}{4S} = \frac{y \cdot y \cdot 2x}{4S} = \frac{y^2 \cdot 2x}{4x\sqrt{y^2 - x^2}} = \frac{y^2}{2\sqrt{y^2 - x^2}}$.

Применим для $\triangle BED$ теорему косинусов:
$ED^2 = BE^2 + BD^2 - 2BE \cdot BD\cos\angle B$,

$$y^2 + 48x^2 = 23 \cdot 9\,; \qquad (1)$$

применим для $\triangle AEC$ теорему косинусов:

$EC^2 = AE^2 + AC^2 - 2AE \cdot AC\cos\angle A$, $\quad \frac{y^2}{4} + 2x^2 = EC^2$;

в $\triangle CED$ применим формулу для медианы треугольника (она вытекает из свойства диагоналей в параллелограмме): $(2CQ)^2 = 2CE^2 + 2CD^2 - ED^2$

$$26y^2 + 16 \cdot 9x^2 = 23 \cdot 5 \cdot 9\,. \qquad (2)$$

Решаем систему (1), (2) $\Rightarrow y^2 = 18$, $x^2 = \frac{63}{16} \Rightarrow R = \frac{12}{5}$.

Ответ: $R = \frac{12}{5}$.

5. Точка $M(x;y)$, декартовы координаты которой удовлетворяют условиям

$$a^2x - y = 2a^2 - 2b\,,\ x - by = 2 - 2a^2\,,$$

лежит на прямой $y = 2 - x$. При каких действительных a и b эта точка наиболее близко расположена к точке $N(3;-1)$?

Решение

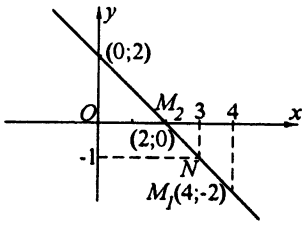


рис. 2

$$\begin{cases} a^2x - y = 2a^2 - 2b\,, & (1)\\ x - by = 2 - 2a^2\,, & (2)\\ y = 2 - x & (3) \end{cases}$$

Координаты x ; y точки M удовлетворяют системе уравнений (1)—(3). Из (1) и (3) при любых a и b вытекает

$$x = \frac{2(a^2 - b + 1)}{a^2 + 1}\,,\ y = \frac{2b}{a^2 + 1}\,. \qquad (4)$$

Подставим (4) в (2): $b^2 + b - (a^2 + a^4) = 0 \Rightarrow b = a^2\,,\ b = -a^2 - 1$.

1) $b = -a^2 - 1$, подставим в (4): $x = 4\,,\ y = -2$, при любых $a \in R$. Получаем точку $M_1(4;-2)$.

2) $b = a^2$ подставляем в (4), откуда

$$x = \frac{2}{a^2 + 1}\,,\ y = 2 - x\,. \qquad (5)$$

Так как $0 < \dfrac{2}{a^2 + 1} \leqslant 2$, $a \in R$, то точки $M(x;y)$ координаты которых удовлетворяют (5), образуют на прямой $y = 2 - x$ полуинтервал с концами $(0;2)$, $(2;0)$. Из всех точек этого полуинтервала наиболее близко к точке $N(3;-1)$ расположена точка $M_2(2;0)$ $(a = b = 0)$. Так как расстояния от M_1 и M_2 до N равны, то искомыми являются точки M_1 и M_2 .

Ответ: 1) $b = -a^2 - 1$, $\forall a \in R$, точка M_1—$M_1(4;-2)$;
2) $a = b = 0$, точка M_2—$M_2(2;0)$.

6. Найти все действительные значения a, при которых область определения функции

$$y = \frac{1}{3\cos x - 2\cos^3 x - \sqrt{2}a}$$

совпадает с областью определения функции

$$y = \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x - a} - \frac{\sqrt{2}}{3\cos x - 2\cos^3 x - \sqrt{2}a}\,.$$

Решение

Обозначим $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$.

Тогда $f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\cos x - 2\cos^3 x}{\sqrt{2}}$.

Следовательно, требуется найти a, при которых множество решений уравнения

$$f(x) = a \tag{1}$$

принадлежит множеству решений уравнения

$$f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = a\,. \tag{2}$$

Если x_0 — корень (1) и множество решений уравнения (1) принадлежит множеству решений уравнения (2), то из (2) следует, что $x_0 + \frac{\pi}{4}$ — также корень (1). Тогда и $\left(x_0 + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} = x_0 + \frac{\pi}{2}$ — корень (1). Следовательно, $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{\pi}{2}\right)$, то есть $x_0 = \pi n$, $\forall n \in Z$. При этом $f(x_0) = (-1)^n$, а $f\left(x_0 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2}}$, то есть x_0 не может являться одновременно решением (1) и (2). Следовательно, уравнение (1) не должно иметь решений, то есть искомые a не должны принадлежать $R[f]$ — множеству значений функции $f(x)$. Так как

$|f(x)| \leqslant |\sin x|^3 + |\cos x|^3 \leqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и $f(x) = \pm 1$ при $x = \frac{\pi k}{2}$, $\forall k \in Z$, то в силу непрерывности функции $f(x)$

$$R[f] = [-1, 1]\,.$$

Ответ: $|a| > 1$,

при этом областью определения указанных функций является множество всех действительных чисел.

3.1.2. Вариант для самостоятельного решения 1993 г.

1. Решить неравенство $\log_{\sqrt{11-2\sqrt{10}}+1-\sqrt{5}}(5x-x^2-3) \geqslant 0$.

2. На отрезке $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ найти все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{2 - \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x} \ .$$

3. Решить неравенство

$$|\, 2^x - 17 \,| + |\, x^2 - 10x + 24 \,| \leqslant 2^x + 10x - x^2 - 41 \ .$$

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC точка D делит сторону BC в отношении $3:1$, считая от вершины B, а точка E — середина отрезка AD . Известно, что $BE = \sqrt{7}$, $CE = 3$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

5. Точка $M(x;y)$, декартовы координаты которой удовлетворяют условиям

$$a^2x + y = 2b - a^2, \ x + 2by = a^2 - 1 \ ,$$

лежит на прямой $y = x + 1$. При каких действительных a и b эта точка наиболее близко расположена к точке $N\left(-\frac{3}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$?

6. Найти все действительные значения b, при которых область определения функции

$$y = \frac{1}{3\sin x - 2\sin^3 x + 2b}$$

совпадает с областью определения функции

$$y = \frac{\sqrt{2}}{3\sin x - 2\sin^3 x + 2b} - \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x + \sqrt{2b}} \ .$$

3.1.3. Вариант с решениями задач 1994 г. (май)

1. Решить уравнение

$$\left(4|x-1|+\frac{1}{2}\right)^2 = 11(x-1)^2+\frac{5}{4}\,.$$

Решение

Обозначим $|x-1| = t \geqslant 0 \Rightarrow t \geqslant 0$, $(x-1)^2 = t^2$. Уравнение примет вид: $(4t+1/2)^2 = 11t^2+5/4 \Leftrightarrow 16t^2+4t+1/4 = 11t^2+5/4 \Leftrightarrow 5t^2+4t-1=0$, корни которого $t=-1$, не удовлетворяющий условию $t \geqslant 0$, и $t = 1/5$. Отсюда следует, что $|x-1| = 1/5 \Leftrightarrow x = 6/5$ или $x = 4/5$.

Ответ: $x = 6/5$; $x = 4/5$.

2. Вычислить $\cos\left(2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Решение

$$\cos 2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = \sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -\frac{2/\sqrt{7}}{1+1/7} = -\sqrt{7}/4\,.$$

Ответ: $-\sqrt{7}/4$.

3. Решить неравенство

$$\sqrt{7+2^{1-x}} \geqslant 7-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}\,.$$

Решение

Обозначим $2^{1-x} = t \Rightarrow t > 0$, тогда неравенство примет вид:

$$\sqrt{7+t} \geqslant 7-2t\,.$$

а) $7-2t<0$, в этом случае левая часть неравенства больше или равна 0, а правая часть меньше 0, поэтому $7-2t<0$, то есть $t>7/2$ — решения неравенства;

б) $\begin{cases} 7-2t\geqslant 0 \Leftrightarrow t\leqslant 7/2\,, \\ 7+t\geqslant 49-28t+4t^2 \Leftrightarrow 4t^2-29t+42\leqslant 0 \Leftrightarrow (t-21/4)(t-2)\leqslant 0\,. \end{cases}$

В этом случае решение системы неравенств имеет вид $2\leqslant t\leqslant 7/2$.
Окончательно получаем $t\geqslant 2 \Leftrightarrow 2^{1-x}\geqslant 2 \Leftrightarrow 1-x\geqslant 1 \Leftrightarrow x\leqslant 0$.

Ответ: $x\leqslant 0$.

4. В остроугольном треугольнике ABC на высоте AD взята точка M, а на высоте BP — точка N так, что углы BMC и ANC — прямые. Расстояние между точками M и N равно $4+2\sqrt{3}$, $\angle MCN=30^\circ$. Найти биссектрису CL треугольника CMN.

Решение

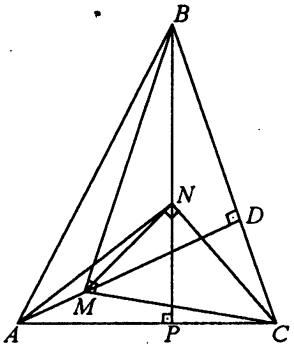


рис. 3

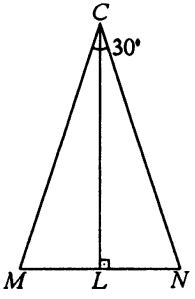


рис. 4

Так как $\triangle ANC$ и $\triangle BMC$ — прямоугольные, то в силу теорем о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике имеем: $MC^2=CD\cdot BC$, $NC^2=CP\cdot AC$. С другой стороны, $CP/BC=CD/AC=\cos\angle C$, поэтому $CD\cdot BC=CP\cdot AC \Longrightarrow MC=NC$, и $\triangle MCN$ — равнобедренный. В $\triangle MCN$ CL — биссектриса и высота, значит

$$CL=\frac{MN\cdot \operatorname{ctg}15^\circ}{2}=(2+\sqrt{3})\frac{1+\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}=(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}\,.$$

Ответ: $CL=7+4\sqrt{3}$.

5. Числа a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 удовлетворяют соотношению

$$\log_2 a_n \cdot \log_2(a_{n-1} \cdot a_{n+1}) = \log_2 a_{n-1} \cdot \log_2 a_{n+1} \cdot \log_2(4a_n^2)$$

при $n = 2$, 3 , 4 . Известно, что $a_1 = 2$, $a_5 = 2^{1/25}$.
Найти $\log_2(a_2 + 2a_3 - a_4^4)$.

Решение

Обозначим $\log_2 a_n = u_n$. Исходная система тогда примет вид

$$\begin{cases} u_1 = 1 \ , \ u_5 = 1/25 \ , \\ u_n \cdot (u_{n+1} + u_{n-1}) = 2u_{n+1} \cdot u_{n-1} \cdot (u_n + 1) \ , \ n = 2, \ 3, \ 4. \end{cases}$$

1. Нетрудно показать, что если хотя бы одно из чисел u_2, u_3 или u_4 равно 0, то и все остальные равны 0, поэтому первое решение системы имеет вид $u_2 = u_3 = u_4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = a_3 = a_4 = 1$.
2. Если $u_n \neq 0$, $n = 2$, 3 , 4 , то, деля на $u_{n+1} \cdot u_n \cdot u_{n-1}$ и обозначая $v_n = 1/u_n$, получим

$$\begin{cases} v_1 = 1 \ , \ v_5 = 25 \ , \\ v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1} = 2 \ , \ n = 2 \ , \ 3 \ , \ 4 \ , \end{cases}$$

или, если подробно записать уравнения системы,

$$\begin{cases} v_3 - 2v_2 + 1 = 2 \ , \\ v_4 - 2v_3 + v_2 = 2 \ , \\ 25 - 2v_4 + v_3 = 2 \ . \end{cases}$$

Складывая первое уравнение с третьим и удвоенным вторым, получим $v_3 = 9$, $v_2 = 4$, $v_4 = 16$, или $a_2 = 2^{1/4}$, $a_3 = 2^{1/9}$, $a_4 = 2^{1/16}$. Таким образом, в первом случае $\log_2(a_2 + 2a_3 - a_4^4) = \log_2 2 = 1$, а во втором случае $\log_2(a_2 + 2a_3 - a_4^4) = \log_2(2^{1/4} + 2 \cdot 2^{1/9} - 2^{1/4}) = 10/9$.

Ответ: $\log_2(a_2 + 2a_3 - a_4^4) = 1 \ ; \ 10/9$.

6. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребра AD и BD перпендикулярны. На ребре AB взята точка M так, что квадрат суммы расстояний от вершин A, B, C до прямой DM равен удвоенной сумме квадратов длин ребер AD, BD, CD. Известно, что $CD = 20$, а $\angle DAB = \operatorname{arctg} \sqrt{7/3}$. Определить длину отрезка CM.

Решение

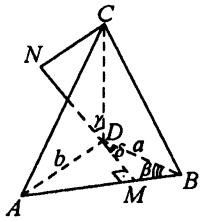


рис. 5

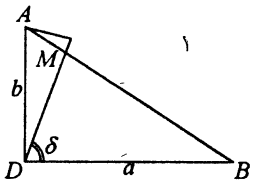


рис. 6

Обозначим $AD = b$, $BD = a$, $CD = c$, $CN \perp DM$, $\angle CDN = \gamma$, $\angle BDM = \delta$. Тогда условие задачи, связанное с точкой M, примет вид

$$(a\sin\delta + b\cos\delta + c\sin\gamma)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) .$$

Левую часть этого равенства можно оценить следующим образом:

$$(a\sin\delta + b\cos\delta + c\sin\gamma)^2 = (\sqrt{a^2 + b^2}\sin(\delta + \beta) + c\sin\gamma)^2 \leqslant$$

$$\leqslant (\sqrt{a^2 + b^2} + c)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2 + c^2) ,$$

где $\beta = \operatorname{arctg} b/a = \angle ABD$. Таким образом, условие задачи выполнено, если

$$\sin(\delta + \beta) = 1 , \ \sin\gamma = 1 , \ a^2 + b^2 = c^2$$

или

$$\delta + \beta = \frac{\pi}{2} , \ \gamma = \frac{\pi}{2} , \ a^2 + b^2 = c^2 .$$

Отсюда следует, что $CD \perp DM$, $AB \perp DM$, $a^2 + b^2 = 400$,

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2} = CD = 20 .$$

$$DM = \frac{AB \cdot \sin 2\beta}{2} = 10 \cdot \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}^2\beta} = \frac{20\sqrt{3/7}}{10/7} = 2\sqrt{21} .$$

$$CM = \sqrt{CD^2 + DM^2} = \sqrt{400 + 84} = 22 .$$

Ответ: $CM = 22$.

3.1.4. Вариант для самостоятельного решения 1994 г. (май)

1. Решить уравнение

$$\left(3|x+1|+\frac{1}{3}\right)^2 = 6(x+1)^2 + \frac{10}{9}\,.$$

2. Вычислить $\cos\left(2\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\right)$, если $\operatorname{ctg}\beta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

3. Решить неравенство

$$\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{-x-1}} \geqslant 5 - 9\cdot 3^{x-1}\,.$$

4. В остроугольном треугольнике EFG на высоте EM взята точка P, а на высоте GN—точка Q так, что углы FPG и EQF —прямые. Известно, что $FQ = \sqrt{3}+1$, а $\angle PFQ = 15°$. Найти расстояние от точки P до прямой FQ.

5. Числа c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 удовлетворяют соотношению

$$\log_3 c_k \cdot \log_3(c_{k-1}\cdot c_{k+1}) = \log_3 c_{k-1}\cdot \log_3 c_{k+1}\cdot \log_3(9c_k^2)$$

при $k = 2, 3, 4$. Известно, что $c_1 = 3$, $c_5 = 3^{1/25}$.
Найти $\log_3(c_2^4 - c_3^9 + 3c_4)$.

6. В треугольной пирамиде $PQRS$ ребра PR и QR перпендикулярны. На ребре PQ взята точка A так, что квадрат суммы расстояний от вершин P, Q, S до прямой AR равен удвоенной сумме квадратов длин ребер PR, QR, SR. Известно, что $PR = 15$, $SR = 17$, $\angle SRQ = 60°$. Найти длину ребра SQ.

3.1.5. *Вариант с решениями задач 1994 г. (июль)*

1. Решить уравнение

$$12\sin 5x = \cos 10x + 7 .$$

Решение

Обозначим $\sin 5x = t \Rightarrow |t| \leqslant 1$. Уравнение примет вид: $t^2 + 6t - 4 = 0$. Корни этого уравнения $t = -3 - \sqrt{13} < -1$, не удовлетворяющий условию $|t| \leqslant 1$, и $t = -3 + \sqrt{13} \in (0, 1)$. Отсюда следует, что $\sin 5x = -3 + \sqrt{13}$, и

$$x = \frac{(-1)^n}{5} \cdot \arcsin(\sqrt{13} - 3) + \frac{\pi n}{5} , \ \forall n \in Z .$$

Ответ: $x = \dfrac{(-1)^n}{5} \cdot \arcsin(\sqrt{13} - 3) + \dfrac{\pi n}{5} , \ \forall n \in Z .$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{x - 3} \leqslant 3 - |x - 6| .$$

Решение

После замены: $\sqrt{x - 3} = t \Rightarrow t \geqslant 0 \Rightarrow x = t^2 + 3$, получаем неравенство $t + |t^2 - 3| \leqslant 3$, которое распадается на два:
а) $t^2 - t \geqslant 0$ при условии, что $0 \leqslant t \leqslant \sqrt{3}$, откуда $t = 0$ и $1 \leqslant t \leqslant \sqrt{3}$;
б) $t^2 + t - 6 \leqslant 0$ при условии, что $t > \sqrt{3}$, откуда $\sqrt{3} < t \leqslant 2$. Таким образом, окончательно получаем $t = 0$, $1 \leqslant t \leqslant 2$, откуда $x = 3$, $4 \leqslant x \leqslant 7$.

Ответ: $x = 3$, $4 \leqslant x \leqslant 7$.

3. Найти все отрицательные значения u , при которых выполнено неравенство

$$\frac{1}{\log_{3\cos u} 3} + \frac{1}{\log_3 \left(\frac{\cos u}{3}\right)} \geqslant 0 .$$

Решение

После замены $\log_3 \cos u = t \Rightarrow t \leqslant 0$ (так как в данном случае $0 < \cos u \leqslant 1$) и перехода к основанию 3 неравенство принимает следующий вид:

$$1 + t + \frac{1}{t - 1} \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{t^2}{t - 1} \geqslant 0 .$$

Учитывая, что $t \leqslant 0$, получаем $t^2 \leqslant 0$, откуда $t = 0$. Таким образом, имеем $\cos u = 1$, и $u < 0$, откуда $u = 2\pi n$, $n = -1,\ -2,\ \ldots$.

Ответ: $u = 2\pi n$, $n = -1,\ -2,\ \ldots$.

4. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 21, длина биссектрисы BD равна $8\sqrt{7}$, а длина отрезка DC равна 8. Определить периметр треугольника ABC .

Решение

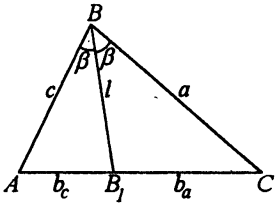


рис. 7

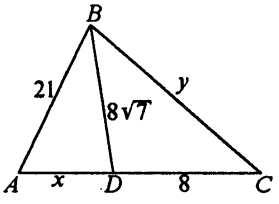


рис. 8

Докажем следующее утверждение. Лемма. $l^2 = ac - b_a b_c$ (см. рис. 7).

Доказательство

Из теоремы косинусов для $\triangle ABB_1$ и $\triangle BB_1$ следует:

$$\begin{cases} b_c^2 = c^2 + l^2 - 2lc\cos\beta\ , \\ b_a^2 = a^2 + l^2 - 2la\cos\beta\ , \end{cases}$$

или $b_c^2 a - b_a^2 c = ac^2 - a^2 c - l^2(c - a)$. Учитывая, что $b_c \cdot a = b_a \cdot c$ (в силу свойства биссектрисы угла треугольника), имеем $l^2(a - c) = (ac - b_a b_c)(a - c)$. Если $a = c$, то $b_a = b_c = b/2$, и $l^2 = a^2 - b^2/4 = ac - b_a b_c$, если же $a \neq c$, то $l^2 = ac - b_a b_c$, что и требовалось доказать.

Обозначим теперь $AD = x$, $BC = y$ (см. рис. 8), тогда, опираясь на свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника и доказанную лемму, получаем систему уравнений для x и y:

$$\begin{cases} xy = 21 \cdot 8\ , \\ 21y - 8x = 64 \cdot 7\ , \end{cases}$$

откуда $x = 7$, $y = 24$. Периметр треугольника AB равен 60 .

Ответ: $P_{\triangle AB} = 60$.

5. В начальный момент лечения пациенту была произведена первая инъекция 6 единиц некоторого лекарства, а во время каждой последующей инъекции ему вводится 4 единицы того же лекарства. За время между инъекциями количество лекарства в организме уменьшается в 5 раз. Какое количество лекарства будет содержаться в организме пациента сразу после 30–ой инъекции ?

Решение

Обозначим количество лекарства в организме пациента после n-ой инъекции через A_n . Тогда математическая модель задачи примет вид:

$$\begin{cases} A_1 = B \ , \\ A_{n+1} = qA_n + d \ , \ n = 1, \ 2, \ \ldots \ , \ 29 \ , \end{cases}$$

где $B = 6$, $q = 1/5$, $d = 4$.
Будем искать решение этой разностной задачи в виде $A_n = u_n + C$, где C—некоторая постоянная, определяемая из условия $C = qC + d$, или $C = d/(1-q) = 5$. Для u_n получаем задачу

$$\begin{cases} u_1 = B - C \ , \\ u_{n+1} = qu_n \ , \ n = 1, \ 2, \ \ldots \ , \ 29 \ . \end{cases}$$

Поскольку $\{u_n\}$ образуют геометрическую прогрессию, то $u_n = (B-C)\ q^{n-1}$. Таким образом, $A_n = (B-C)\ q^{n-1} + C$ или в нашем конкретном случае $A_{30} = 5 + (1/5)^{29}$.

Ответ: $A_{30} = 5 + (1/5)^{29}$.

6. Все высоты пирамиды $ABCD$, грани которой являются остроугольными треугольниками, равны между собой. Известно, что $AB = 9$, $BC = 13$, а $\angle ADC = 60°$. Найти длину ребра BD .

Решение

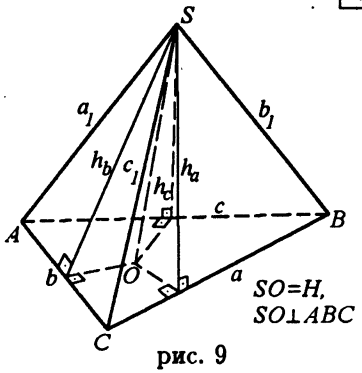


рис. 9

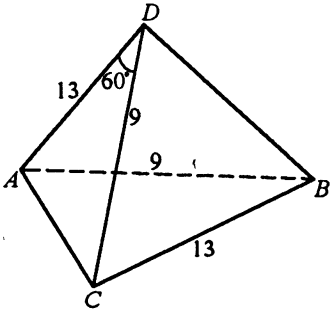


рис. 10

Докажем следующее утверждение.

Лемма. Если все грани треугольной пирамиды равновелики, то они равны между собой.

Доказательство

Обозначим ребра пирамиды $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $SA=a_1$, $SB=b_1$, $SC=c_1$, высоты пирамиды, равные между собой, через H, высоты боковых граней, опущенные из вершины S на ребра a, b, c соответственно через h_a, h_b, h_c, а — из вершины C на ребро $SA=a_1$ через h_{a_1}. Двугранные углы при соответствующих ребрах будем обозначать буквой α с соответствующим индексом, то есть α_a, α_b, α_c, α_{a_1}, α_{b_1}, α_{c_1}. (см. рис. 9).

Для ребер a, b, c можно записать следующие равенства (см. рис. 9):

$$\begin{cases} ah_a = bh_b = ch_c, \\ ah_a = ah_a\cos\alpha_a + bh_b\cos\alpha_b + ch_c\cos\alpha_c \end{cases}$$

или $\cos\alpha_a + \cos\alpha_b + \cos\alpha_c = 1$. Таким образом, сумма косинусов двугранных углов при каждой грани треугольной пирамиды равна 1, поэтому можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos\alpha_a + \cos\alpha_b + \cos\alpha_c = 1, \\ \cos\alpha_a + \cos\alpha_{b_1} + \cos\alpha_{c_1} = 1, \\ \cos\alpha_{a_1} + \cos\alpha_{b_1} + \cos\alpha_c = 1, \\ \cos\alpha_{a_1} + \cos\alpha_b + \cos\alpha_{c_1} = 1. \end{cases}$$

Складывая почленно первое и второе равенства и приравнивая их к сумме третьего и четвертого, получим

$$2\cos\alpha_a + \cos\alpha_b + \cos\alpha_{b_1} + \cos\alpha_c + \cos\alpha_{c_1} = \\ = 2\cos\alpha_{a_1} + \cos\alpha_b + \cos\alpha_{b_1} + \cos\alpha_c + \cos\alpha_{c_1},$$

откуда следует, что $\cos\alpha_{a_1} = \cos\alpha_a$ и $\alpha_{a_1} = \alpha_a$. Из равенства двугранных углов при скрещивающихся ребрах пирамиды следует, что $h_{a_1} = H/\sin\alpha_{a_1} = H/\sin\alpha_a = h_a$, а значит из равенства $ah_a = a_1h_{a_1}$ вытекает, что $a = a_1$. Аналогично доказывается, что $b = b_1$, $c = c_1$, и все грани пирамиды равны между собой по третьему признаку равенства треугольников.

Используя доказанную лемму и условия задачи, имеем (см. рис. 10) $CD = AB = 9$, $AD = BC = 13$, $BD = AC$. По теореме косинусов для $\triangle ADC$ получаем $AC^2 = 13^2 + 9^2 - 13\cdot 9 = 133$. Ответ: $BD = \sqrt{133}$.

3.1.6. Вариант для самостоятельного решения 1994 г. (июль)

1. Решить уравнение

$$4\cos 3x + 1 = \cos 6x \ .$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{x-2} + |x-8| \leqslant 6 \ .$$

3. Найти все положительные значения z, при которых выполнено неравенство

$$\frac{-1}{\log_2\left(\frac{2}{\sin z}\right)} + \frac{1}{\log_{2\sin z} 2} \geqslant 0 \ .$$

4. В треугольнике KLM длина стороны KL равна 24, длина биссектрисы LN равна 24 , а длина отрезка MN равна 9. Определить периметр треугольника LMN .

5. При первой операции очистки в водоем было введено 100 единиц очищающего вещества (абсорбента), а при каждой следующей операции очистки в водоем вводится 50 единиц абсорбента. В промежутке времени между двумя последовательными операциями очистки количество абсорбента в водоеме уменьшается в 3 раза. Какое количество абсорбента будет содержаться в водоеме сразу после 50–ой операции очистки ?

6. Все грани пирамиды $PQRS$ являются остроугольными треугольниками, а длины перпендикуляров, опущенных из вершин P , Q , R , S на противоположные грани, равны. Известно, что $SP = 6$, $\angle SRQ = 75°$, а $\angle SPR = 45°$. Найти длину ребра PQ .

3.1.7. Вариант с решениями задач 1995 г. (апрель)

1. В арифметической прогрессии с отличной от нуля разностью сумма членов с нечетными номерами, не превосходящими 26, равна 169. Найти номер того члена прогрессии, который равен 13.

Решение

Члены прогрессии, о которых идет речь в условии задачи, это $a_1, a_3, \ldots, a_{25}$. Количество их равно 13 и они представляют собой арифметическую прогрессию с разностью $2d$, где d — разность исходной прогрессии. Поэтому

$$a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{25} = S_{13} = \frac{2a_1 + 2d \cdot 12}{2} \cdot 13 = (a_1 + 12d) \cdot 13 = 169 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 13 = a_1 + 12d = a_1 + (13-1)d = a_{13}.$$

Следовательно, номер искомого члена прогрессии $n = 13$.

Ответ: $n = 13$.

2. Решить уравнение

$$|\log_{3x}(x^2 - 6x + 8) - 1| = 1 - \log_{3x}(x^2 - 6x + 8) \ .$$

Решение

$$\text{ОДЗ}: \left\{ \begin{array}{l} 0 < 3x \neq 1 \ , \\ x^2 - 6x + 8 > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 < x \neq 1/3 \ , \\ (x-2)(x-4) > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 < x \neq 1/3 \ , \\ \left[\begin{array}{l} x < 2 \ ; \\ x > 4 \ . \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Положим $y = \log_{3x}(x^2 - 6x + 8)$, тогда исходное уравнение принимает вид $|y - 1| = 1 - y \ \Leftrightarrow \ y \leqslant 1$. Следовательно, исходное уравнение равносильно неравенству

$$\log_{3x}(x^2 - 6x + 8) \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{3x}(x^2 - 6x + 8) \leqslant \log_{3x} 3x \ .$$

Это неравенство решается следующим образом.

I) $0 < 3x < 1 \ \Leftrightarrow \ 0 < x < 1/3$. В силу убывания логарифмической функции с основанием большем нуля и меньшем единицы в этом случае неравенство принимает вид

$x^2 - 6x + 8 \geqslant 3x \ \Leftrightarrow \ x^2 - 9x + 8 \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ (x-1)(x-8) \geqslant 0$, откуда $x \leqslant 1 \ ; \ x \geqslant 8$. С учетом ОДЗ в этом случае $0 < x < 1/3$ — решения неравенства.

II) $3x > 1 \Leftrightarrow x > 1/3$. В силу возрастания логарифмической функции с основанием большем единицы в этом случае неравенство принимает вид $x^2 - 6x + 8 \leqslant 3x \Leftrightarrow x^2 - 9x + 8 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-8) \leqslant 0$, откуда $1 \leqslant x \leqslant 8$. С учетом ОДЗ в этом случае $1 \leqslant x < 2$; $4 < x \leqslant 8$ — решения неравенства.

Объединяя решения случаев I) и II), получаем окончательный ответ.

Ответ: $0 < x < 1/3$; $1 \leqslant x < 2$; $4 < x \leqslant 8$.

3. Найти все корни уравнения

$$9 \cdot 3^{\sin x} + 2 \cdot 3^{-\sin x} = 6\sqrt{3} ,$$

удовлетворяющие неравенствам $-\dfrac{13\pi}{6} < x < -\dfrac{\pi}{6}$.

Решение

Введем обозначение $t = 3^{\sin x}$. В силу возрастания показательной функции с основанием степени $3 > 1$ и того, что $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, получаем $1/3 \leqslant t \leqslant 3$. Исходное уравнение тогда принимает вид

$$9t + \frac{2}{t} = 6\sqrt{3} \Leftrightarrow 9t^2 - 6\sqrt{3}t + 2 = 0 ;$$

$$t_{1,2} = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{27 - 18}}{9} = \frac{3\sqrt{3} \pm 3}{9} = \frac{\sqrt{3} \pm 1}{3}$$

— решения этого уравнения.

Так как $\sqrt{3} < 2$, то $t_1 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{3} < \dfrac{1}{3}$, поэтому это решение уравнения не подходит.

$\dfrac{1}{3} < \dfrac{\sqrt{3}+1}{3} = t_2 < \dfrac{2+1}{3} = 1 < 3$, следовательно, это решение уже подходит. Уравнение

$$3^{\sin x} = \frac{\sqrt{3}+1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \log_3 \left(\frac{\sqrt{3}+1}{3} \right) = \log_3 \left(\sqrt{3}+1 \right) - 1 .$$

Решения последнего уравнения имеют следующий вид

$$x = \arcsin \left(\log_3 \left(\sqrt{3}+1 \right) - 1 \right) + 2\pi k \ ; \ x = \pi - \arcsin \left(\log_3 \left(\sqrt{3}+1 \right) - 1 \right) + 2\pi k$$
$$\forall k \in Z .$$

Остается исследовать, при каких целых значениях k полученные решения принадлежат интервалу $\left(-\frac{13\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right)$. Для этого

$$\arcsin\left(\log_3\left(\sqrt{3}+1\right)-1\right) \vee 0 \Leftrightarrow \log_3(\sqrt{3}+1)-1 \vee \sin 0 = 0\,,$$

$$\log_3\left(\sqrt{3}+1\right)-1 < \log_3(2+1)-1 = \log_3 3 - 1 = 0\,;$$

$$\arcsin\left(\log_3\left(\sqrt{3}+1\right)-1\right) \vee -\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \log_3\left(\sqrt{3}+1\right)-1 \vee \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\,,$$

$$\log_3\left(\sqrt{3}+1\right)-1 > \log_3\left(\sqrt{3}\right)-1 = \frac{1}{2}-1 = -\frac{1}{2}\,.$$

Следовательно,

$$-\frac{\pi}{6} < \arcsin\left(\log_3\left(\sqrt{3}+1\right)-1\right) < 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{13\pi}{6} < \arcsin\left(\log_3\left(\sqrt{3}+1\right)-1\right) - 2\pi < -2\pi < -\frac{\pi}{6}\,;$$

$$0 < -\arcsin\left(\log_3\left(\sqrt{3}+1\right)-1\right) < \frac{\pi}{6} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{13\pi}{6} < -\pi < -\pi - \arcsin\left(\log_3\left(\sqrt{3}+1\right)-1\right) < -\frac{5\pi}{6} < -\frac{\pi}{6}\,.$$

Таким образом, указанному интервалу (ввиду того, что его длина равна 2π) из обеих серий решений последнего уравнения принадлежат решения только при $k = -1$. Отсюда получается окончательный ответ.

Ответ: $\arcsin\left(\log_3\left(\sqrt{3}+1\right)-1\right) - 2\pi$; $-\pi - \arcsin\left(\log_3\left(\sqrt{3}+1\right)-1\right)$.

4. Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$\left|\frac{1}{x} + 2a\right| > x\,.$$

Решение

ОДЗ: $x \neq 0$. При любом значении a любое $x < 0$ является решением этого неравенства, так как его левая часть при всех x и a неотрицательна.

Пусть $x > 0$. Тогда исходное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} 1/x + 2a > x\,; \\ 1/x + 2a < -x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 + 2ax > x^2\,; \\ 1 + 2ax < -x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2ax - 1 < 0\,; \\ x^2 + 2ax + 1 < 0 \end{array}\right.$$

А) Решение неравенства $x^2 - 2ax - 1 < 0$.

Корни уравнения $x^2 - 2ax - 1 = 0$ — это $x_1 = a - \sqrt{a^2+1}$ и $x_2 = a + \sqrt{a^2+1}$. Поэтому решениями неравенства будут следующие значения x: $a - \sqrt{a^2+1} < x < a + \sqrt{a^2+1}$.

При $a \geqslant 0$, очевидно, что $a + \sqrt{a^2+1} > 0$; $a^2 < a^2 + 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a < \sqrt{a^2+1} \Leftrightarrow a - \sqrt{a^2+1} < 0$. Поэтому решениями неравенства при рассматриваемых значениях a с учетом $x > 0$ будут $0 < x < a + \sqrt{a^2+1}$.

При $a < 0$, очевидно, что $a - \sqrt{a^2+1} < 0$; $a^2 + 1 > a^2 = (-a)^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sqrt{a^2+1} > -a \Leftrightarrow a + \sqrt{a^2+1} > 0$. Поэтому решениями неравенства при рассматриваемых значениях a с учетом $x > 0$ также будут $0 < x < a + \sqrt{a^2+1}$.

Окончательно решениями неравенства $x^2 - 2ax - 1 < 0$ будут $0 < x < a + \sqrt{a^2+1}$ $(\forall a \in R)$.

Б) Решение неравенства $x^2 + 2ax + 1 < 0$.

Дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + 2ax + 1$ $D = 4(a^2 - 1)$. Если он $\leqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant a \leqslant 1$, то это неравенство не имеет решений.

Рассмотрим остальные значения a.

Корни уравнения $x^2 + 2ax + 1 = 0$ — это $x_1 = -a - \sqrt{a^2-1}$ и $x_2 = -a + \sqrt{a^2-1}$. Поэтому решениями неравенства будут tследующие значения x: $-a - \sqrt{a^2-1} < x < -a + \sqrt{a^2-1}$.

При $a > 1$ $a^2 > a^2 - 1 \Leftrightarrow a > \sqrt{a^2-1} \Leftrightarrow -a + \sqrt{a^2-1} < 0$. Поэтому с учетом $x > 0$ и при этих значениях a неравенство не имеет решений.

При $a < -1$, очевидно, что $-a + \sqrt{a^2-1} > 0$; $a^2 - 1 < a^2 = (-a)^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sqrt{a^2-1} < -a \Leftrightarrow -a - \sqrt{a^2-1} > 0$. Поэтому решениями неравенства при рассматриваемых значениях a с учетом $x > 0$ будут $-a - \sqrt{a^2-1} < x < -a + \sqrt{a^2-1}$.

Окончательно решениями неравенства $x^2 + 2ax + 1 < 0$ будут: при $a < -1$ — $-a - \sqrt{a^2-1} < x < -a + \sqrt{a^2-1}$;
при $a \geqslant -1$ это неравенство не имеет решений.

Объединим полученные результаты. Для этого при $a < -1$

$$a < -1 \qquad a + \sqrt{a^2+1} \vee -a - \sqrt{a^2-1}.$$

$$a + \sqrt{a^2+1} \vee -a - \sqrt{a^2-1} \Leftrightarrow \sqrt{a^2+1} + \sqrt{a^2-1} \vee -2a.$$

Так как при $a < -1$ оба сравниваемых выражения положительны, то

$$\sqrt{a^2+1} + \sqrt{a^2-1} \vee -2a \Leftrightarrow (\sqrt{a^2+1} + \sqrt{a^2-1})^2 \vee (-2a)^2 = 4a^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2 + 1 + 2\sqrt{a^2+1}\sqrt{a^2-1} + a^2 - 1 \vee 4a^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{a^4-1} \vee 2a^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{a^4-1} \vee a^2 \Leftrightarrow a^4 - 1 \vee a^4.$$

Из очевидного неравенства $a^4 - 1 < a^4$ и вытекает, что

$$a + \sqrt{a^2+1} < -a - \sqrt{a^2-1}.$$

Теперь уже с полным основанием можно выписать окончательный ответ, в котором полученные интервалы решений исходного неравенства при всех действительных значениях a являются непересекающимися, однако перед этим дадим графическую иллюстрацию решения задачи.

Графическая иллюстрация решения задачи:

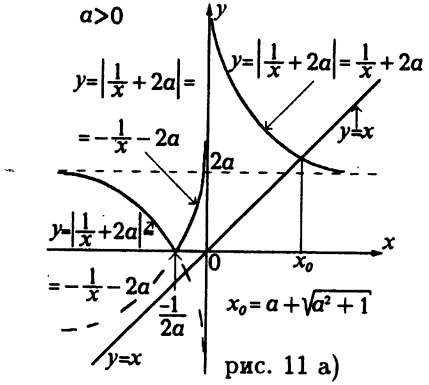


рис. 11 а)

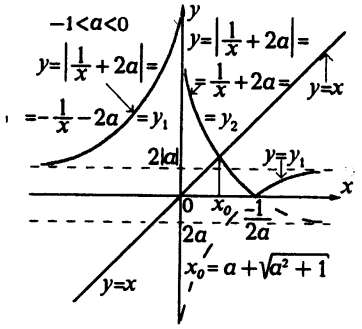


рис. 11 б)

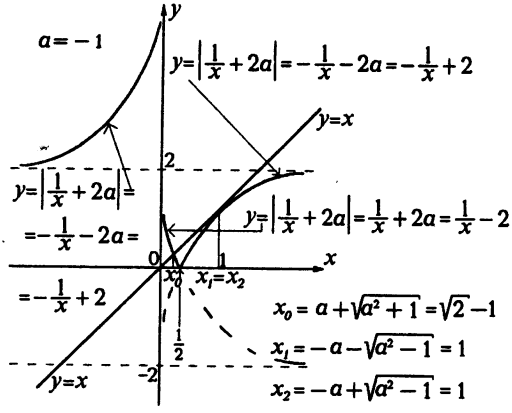


рис. 11 в)

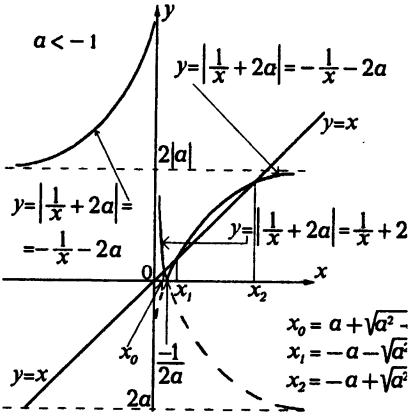


рис. 11 г)

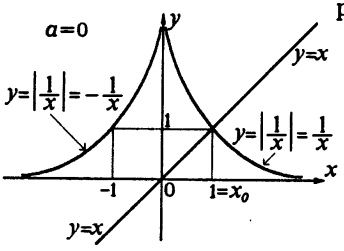


рис. 11 д)

На рис. 11 а) — д) построены графики левой и правой частей решаемого неравенства в зависимости от значений параметра a. При этом неравенству удовлетворяют те и только те значения x, которые являются абсциссами точек графика функции $y = |1/x + 2a|$, лежащих *строго выше* точек с теми же абсциссами графика функции $y = x$ (биссектрисы первого и третьего координатных углов).

Из построенных графиков видно, что во всех пяти случаях неравенству удовлетворяют все значения $x < 0$.

Если же $x > 0$, то в случаях $a \geqslant -1$ (см. рис. 11 а), б), в) и д)) неравенству будут удовлетворять только значения x : $0 < x < x_0$, где x_0 является решением уравнения

$$\frac{1}{x} + 2a = x \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2ax - 1 = 0 \;\Rightarrow x = x_0 = a + \sqrt{a^2 + 1}$$

(точка с абсциссой x_0 является точкой пересечения графиков функций

$$y = \left|\frac{1}{x} + 2a\right| = \frac{1}{x} + 2a \qquad \text{и} \qquad y = x\ ).$$

Отметим, что при $a = -1$ (см. рис. 11 в)) есть еще одна общая точка с абсциссой $x_1 = 1$ у графиков функций $y = |1/x + 2a| = -1/x - 2a$ и $y = x$, однако все остальные точки графика функции $y = |1/x + 2a|$ располагаются *строго ниже* точек графика функции $y = x$, поэтому и в этом случае кроме решений $x < 0$ и $0 < x < x_0$ неравенство не имеет.

Но уже при $a < -1$ (см. рис. 11 г)) к значениям $0 < x < x_0$ добавляются еще решения $x_1 < x < x_2$, где x_1 и x_2 — соответственно меньший и больший корни уравнения

$$-\frac{1}{x} - 2a = x \;\Leftrightarrow\; x^2 + 2ax + 1 = 0 \Rightarrow$$

(точки с абсциссами x_1 и x_2 являются точками пересечения графиков функций

$$y = \left|\frac{1}{x} + 2a\right| = -\frac{1}{x} - 2a \qquad \text{и} \qquad y = x\ ).$$

$$\Rightarrow x = x_1 = -a - \sqrt{a^2 - 1}\ , \quad x = x_2 = -a + \sqrt{a^2 - 1}\ .$$

Выпишем, наконец, окончательный ответ задачи.

Ответ: $x < 0\ ;\ 0 < x < a + \sqrt{a^2 + 1}$ при $a \geqslant -1$;
$x < 0\ ;\ 0 < x < a + \sqrt{a^2 + 1}$;
$-a - \sqrt{a^2 - 1} < x < -a + \sqrt{a^2 - 1}$ при $a < -1$.

5. На отрезке AB длины $2R$ как на диаметре построена окружность с центром в точке O. Вторая окружность радиуса r касается первой внутренним образом в точке B. В точке M второй окружности проведена касательная, пересекающая первую окружность в точках N и K. Известно, что эта касательная пересекает либо радиус AO, либо его продолжение за точку A и $MN : MK = p$. Определить:

1) при каких условиях на r, R и p возможна такая геометрическая конфигурация;

2) длину отрезка MN.

Решение

См. ниже рис. 12. Обозначим за O — центр окружности радиуса R, а за O_1 мы обозначим центр окружности радиуса r, которая касается первой внутренним образом. Тогда $R > r$. За C обозначим точку пересечения MK с прямой, содержащей AB. Тогда MK пересекает радиус AO или его продолжение за точку A тогда и только тогда, когда

$$CO_1 = \alpha R + R - r\,,\ CO = \alpha R \quad \alpha \geqslant 0\,.$$

Q — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на MK, $|MK| = x$. Тогда $|NM| = px$, по свойству хорды, перпендикулярной радиусу окружности,

$$|NQ| = |QK| = \frac{|NK|}{2} = \frac{x(p+1)}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |QM| = |QK| - x = \frac{xp+x}{2} - x = \frac{x(p-1)}{2}\,.$$

Так как M — точка касания прямой MK с окружностью радиуса r, $O_1M \perp MK$.

Треугольники CMO_1 и CQO — прямоугольные с общим острым углом OCQ, следовательно, они подобны.

Через точку O проведем отрезок $OL \parallel QM$, где $L \in O_1M$. Следовательно, $OQML$ — прямоугольник, а потому $|ML| = |OQ| = |O_1M| - |O_1L|$.

В силу этих соотношений, теоремы Пифагора, примененной к прямоугольным $\triangle OQN$ и $\triangle O_1LO$, пропорции $\dfrac{|OQ|}{|O_1M|} = \dfrac{|OC|}{|O_1C|}$, вытекающей из $\triangle OQC \sim \triangle O_1MC$, имеют место следующие соотношения:

$$\begin{cases} \dfrac{|OQ|}{r} = \dfrac{\alpha R}{\alpha R + R - r}\,, \\ |OQ|^2 = R^2 - \dfrac{x^2}{4}(p+1)^2\,, \\ |OQ| = r - \sqrt{(R-r)^2 - \dfrac{x^2}{4}(p-1)^2}\,. \end{cases}$$

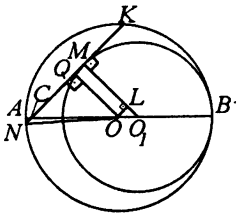


рис. 12

Положим, $|OQ|/r = y$, $x/r = z$, $R/r = k$ $(k > 1)$. Если в правой части первого из полученных соотношений разделить числитель и знаменатель на r, во втором из этих соотношений обе части равенства разделить на r^2, а третье соотношение преобразовать следующим образом:

$$(R-r)^2 - \frac{x^2}{4}(p-1)^2 = (r - |OQ|)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{4}(p-1)^2 = (R-r)^2 - (r-|OQ|)^2$$

и последнее равенство также почленно поделить на r^2, то они примут такой вид:

$$\begin{cases} y = \dfrac{\alpha k}{(\alpha+1)k - 1}\,, & (1) \\ \dfrac{(p+1)^2}{4} z^2 = k^2 - y^2\,, & (2) \\ \dfrac{(p-1)^2}{4} z^2 = (k-1)^2 - (y-1)^2 = k^2 - y^2 + 2(y-k)\,. & (3) \end{cases}$$

С учетом того, что $z > 0$, $p > 0$, $y > 0$, $|OQ| < R$ (так как Q, будучи основанием перпендикуляра, проведенного из центра окружности на ее хорду, лежит *внутри* этой окружности) можно почленно разделить третье уравнение на второе. Проделав это, а также применяя формулу разности квадратов двух чисел, получим:

$$\frac{(p-1)^2}{(p+1)^2} = \frac{(k-y)(k+y-2)}{(k-y)(k+y)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p^2+1-2p}{p^2+1+2p} = 1 - \frac{2}{k+y} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{4p}{(p+1)^2} = 1 - \frac{2}{k+y} \quad \Leftrightarrow \quad k + y = \frac{(p+1)^2}{2p}\,. \qquad (4)$$

Обозначим за $f(\alpha)$ левую часть последнего равенства. Выразим y из равенства (1), тогда $f(\alpha)$ примет следующий вид:

$$f(\alpha) = k + \frac{\alpha k}{\alpha k + k - 1} = k + 1 - \frac{k-1}{(\alpha+1)k - 1} .$$

Из последнего выражения для $f(\alpha)$ легко видеть, что функция $f(\alpha)$ возрастает на множестве $\alpha \geqslant 0$ при $k > 1$.

Отсюда с учетом неотрицательности α и $k > 1$ мы получим диапазон возможных значений, которые может принимать функция $f(\alpha)$,

$$k \leqslant \frac{(p+1)^2}{2p} < k+1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{R}{r} \leqslant \frac{(p+1)^2}{2p} < \frac{R}{r} + 1 .$$

Из правого неравенства вытекает

$$\frac{R}{r} > \frac{(p+1)^2}{2p} - 1 = \frac{p^2 + 2p + 1 - 2p}{2p} = \frac{p^2+1}{2p} .$$

Окончательно,

$$\frac{p^2+1}{2p} < \frac{R}{r} \leqslant \frac{(p+1)^2}{2p} .$$

Полученные неравенства дают ответ на первый вопрос задачи.

Для ответа на второй вопрос этой задачи требуется найти величину $|MN| = px$.

Вычтем почленно из уравнения (2) уравнение (3), подставляя выражение для y из уравнения (4). При этом мы получим:

$$pz^2 = 2(k-y) = 4k - \frac{(p+1)^2}{p} .$$

Далее подставим выражения для z и k , будем иметь:

$$px^2 = 4Rr - \frac{(p+1)^2}{p} \cdot r^2 \quad \Leftrightarrow \quad p^2x^2 = 4Rrp - (p+1)^2r^2 .$$

Отсюда

$$px = \sqrt{4Rrp - (p+1)^2r^2} .$$

Ответ: 1) $\dfrac{p^2+1}{2p} < \dfrac{R}{r} \leqslant \dfrac{(p+1)^2}{2p}$;
2) $|MN| = \sqrt{4Rrp - r^2(p+1)^2}$.

6. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ с параллельными гранями $ABCD$ и $A'B'C'D'$ длина ребра равна 9. Через точки M, N и K, расположенные на ребрах BC, CD и CC' соответственно, проведена плоскость. Известно, что радиус окружности, вписанной в треугольник MCK, равен 1, площадь треугольника MNC равна $21/2$, разность длин отрезков CN и CK равна 3 и объем пирамиды $MNKC$ меньше 15. Найти радиус сферы, касающейся плоскости треугольника MNK и трех граней куба с общей точкой A'.

Решение

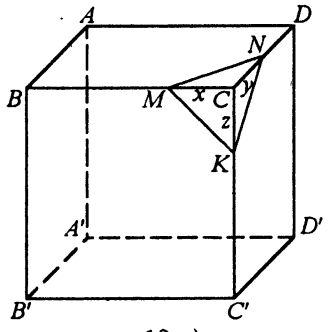


рис. 13 а)

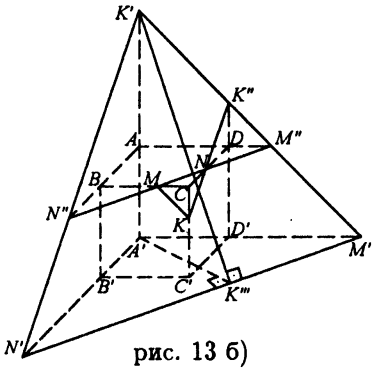


рис. 13 б)

Положим, $|CM| = x$, $|CN| = y$, $|CK| = z$. Эти величины — длины попарно перпендикулярных ребер пирамиды $CKMN$, имеющих общую вершину этой пирамиды C, грани этой пирамиды CKM, CKN, CMN являются прямоугольными треугольниками. Применяя формулу, выражающую радиус вписанной в треугольник окружности через его площадь и периметр, формулу площади прямоугольного треугольника через его катеты и заданную разность длин отрезков CN и CK, мы получим:

$$\begin{cases} \dfrac{xz}{x+z+\sqrt{x^2+z^2}} = 1\,, & (1) \\ xy/2 = 21/2\,, & (2) \\ y - z = 3\,. & (3) \end{cases}$$

Найдем решения этой системы уравнений. Сначала в уравнении (1) выразим x через z. При этом мы учтем, что по смыслу задачи $0 < x < 9$, $0 < y < 9$, $0 < z < 9$. Уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} xz - (x+z) = \sqrt{x^2+z^2}\,, \\ xz > x+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xz)^2 - 2xz(x+z) + (x+z)^2 = x^2+z^2\,, \\ xz > x+z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (xz)(xz+2-2(x+z))=0\,, \\ xz>x+z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} xz+2-2(x+z)=0\,, \\ xz>x+z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} z(x-2)=2(x-1)\,, \\ x+z>2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z=2(x-1)/(x-2)\,, \\ x+z>2\,. \end{cases}$$

Последний равносильный переход осуществлен за счет того, что $x=2$ не является корнем уравнения $z(x-2)=2(x-1)$.

Далее из уравнений (2) и (3) получаем

$$\frac{21}{x}=\frac{2(x-1)}{x-2}+3 \quad \Leftrightarrow \quad 5x^2-29x+42=0\,.$$

Решая это уравнение снова с учетом (2) и (3), будем иметь следующие два решения системы уравнений (1)—(3):

$x_1=3\,,\ y_1=7\,,\ z_1=4\ ;\ x_2=2{,}8\,,\ y_2=7{,}5\,,\ z_2=4{,}5\,.$

Отметим, что оба этих решения удовлетворяют условию $x+z>2$.

Объем пирамиды $CKMN$ равен $xyz/6$. По условию он меньше 15. Этому условию удовлетворяет только первое решение. Следовательно,

$x=3,\ y=7,\ z=4.$

Обозначим за M', N', K' — точки пересечения плоскости $\triangle KMN$ с продолжениями ребер $A'D'$, $A'B'$, $A'A$ соответственно (см. рис. 13 б)). Существование этих точек следует из того, что, как нетрудно видеть, плоскость $\triangle KMN$ не параллельна ни одному из этих ребер.

Сфера, о которой говорится в условии задачи, является вписанной в треугольную пирамиду $A'K'M'N'$. Напоминаем, что в любую треугольную пирамиду можно вписать единственную сферу, поэтому сфера, о которой говорится в условии задачи, существует.

Опишем схему построения точек K', M', N', а вместе с этим и пирамиды $A'K'M'N'$.

Прямая MN пересечет продолжение ребра AD и продолжение ребра AB соответственно в точках M'' и N'' (так как она не параллельна этим ребрам). В частности, отсюда вытекает, что точка M'' лежит в плоскости KMN.

Прямая KN пересечет продолжение ребра $D'D$ в точке K'' (так как она не параллельна этому ребру). В частности, отсюда вытекает, что точка K'' тоже лежит в плоскости KMN. Точки K'' и M'' лежат также и в плоскости грани $A'ADD'$.

Проведем прямую через точки K'' и M'', которая ввиду $D'D \parallel A'A$ и $A'D' \parallel AD$ пересечет продолжение ребра $A'A$ в точке K' и продолжение ребра $A'D'$ в точке M'. Проведем далее прямую через точки K' и N'', которая ввиду $AB \parallel A'B'$ пересечет продолжение ребра $A'B'$ в точке N'. Наконец, соединим прямой точки M' и N'.

Вычислим длины отрезков $A'K'$, $A'M'$, $A'N'$.

Рассмотрим треугольники MNC и $M''ND$. У них $\angle CNM = \angle M''ND$ как вертикальные, $CM \parallel DM''$, следовательно, $\triangle NMC \sim \triangle M''ND$,

$$\text{откуда } \frac{|DM''|}{|CM|} = \frac{|DN|}{|CN|} = \frac{9-y}{y} = \frac{2}{7} \Rightarrow |DM''| = 3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{7}.$$

Рассмотрим треугольники KNC и $K''ND$. У них $\angle CNK = \angle K''ND$ как вертикальные, $CK \parallel DK''$, следовательно, $\triangle KNC \sim \triangle K''ND$,

$$\text{откуда } \frac{|DK''|}{|CK|} = \frac{|DN|}{|CN|} = \frac{2}{7} \Rightarrow |DK''| = 4 \cdot \frac{2}{7} = \frac{8}{7}.$$

Рассмотрим треугольники $M''DK''$ и $M''AK'$. У них $DK'' \parallel AK'$, $\angle AM''K'$ — общий, следовательно, $\triangle M''DK'' \sim \triangle M''AK'$,

$$\text{откуда } \frac{|AK'|}{|DK''|} = \frac{|AM''|}{|DM''|} = \left(9 + \frac{6}{7}\right) : \frac{6}{7} = \frac{23}{2} \Rightarrow |AK'| = \frac{23}{2} \cdot \frac{8}{7} = \frac{92}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A'K'| = 9 + \frac{92}{7} = \frac{155}{7}.$$

Аналогично рассмотрим треугольники $M''DK''$ и $M'D'K''$. У них $DM'' \parallel D'M'$, $\angle D'K''M'$ — общий, следовательно, $\triangle M''DK'' \sim \triangle M'D'K''$,

$$\text{откуда } \frac{|D'M'|}{|DM''|} = \frac{|D'K''|}{|DK''|} = \left(9 + \frac{8}{7}\right) : \frac{8}{7} = \frac{71}{8} \Rightarrow |D'M'| = \frac{6}{7} \cdot \frac{71}{8} = \frac{213}{28} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A'M'| = 9 + \frac{213}{28} = \frac{465}{28}.$$

У треугольников MBN'' и MCN $BN'' \parallel CN$, $\angle N''MB = \angle CMN$ как вертикальные. Следовательно, $\triangle N''MB \sim \triangle CMN$, откуда

$$\frac{|BN''|}{|CN|} = \frac{|BM|}{|CM|} = \frac{9-x}{x} = 2 \Rightarrow |BN''| = 2 \cdot |CN| = 2 \cdot 7 = 14, \; |AN''| = 23.$$

Наконец, рассмотрим треугольники $N''AK'$ и $N'A'K'$. У них $AN'' \parallel A'N'$, $\angle A'K'N'$ — общий, следовательно, $\triangle N''AK' \sim \triangle N'A'K'$,

$$\text{откуда } \frac{|A'N'|}{|AN''|} = \frac{|A'K'|}{|AK'|} = \frac{155}{7} : \frac{92}{7} = \frac{155}{92} \Rightarrow |A'N'| = \frac{155}{92} \cdot 23 = \frac{155}{4}.$$

$$\text{Таким образом, } |A'K'| = \frac{155}{7} \; ; \; |A'M'| = \frac{465}{28} \; ; \; |A'N'| = \frac{155}{4}.$$

Пусть $K'K'''$ — высота $\triangle K'M'N'$, проведенная из вершины K', тогда в силу теоремы о трех перпендикулярах $A'K'''$ будет высотой $\triangle A'M'N'$. По теореме Пифагора $|K'K'''| = \sqrt{|A'K'|^2 + |A'K'''|^2}$.

Выведем следующую формулу:

$$S_{\triangle K'M'N'} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{|A'N'|^2|A'K'|^2 + |A'M'|^2|A'K'|^2 + |A'N'|^2|A'M'|^2}\ . \quad (*)$$

$$S_{\triangle K'M'N'} = \frac{1}{2}\cdot|M'N'|\cdot|K'K'''| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{|A'N'|^2+|A'M'|^2}\cdot\sqrt{|A'K'|^2+|A'K'''|^2}\ .$$

$$(|A'N'|^2+|A'M'|^2)(|A'K'|^2+|A'K'''|^2) = |A'N'|^2\cdot|A'K'|^2+|A'M'|^2\cdot|A'K'|^2+$$
$$+(|A'N'|^2+|A'M'|^2)\cdot|A'K'''|^2\ ,$$

применив теорему Пифагора для $\triangle A'M'N'$ и с учетом обоих выражений для удвоенной площади этого треугольника, мы получим

$$(|A'N'|^2+|A'M'|^2)\cdot|A'K'''|^2 = |M'N'|^2\cdot|A'K'''|^2 = |A'N'|^2\cdot|A'M'|^2\ .$$

Отсюда и вытекает формула $(*)$.

Пусть V — объем пирамиды $A'K'M'N'$, S — площадь ее полной поверхности, R — радиус вписанной в нее сферы.

$$V = \frac{1}{6}\cdot|A'K'|\cdot|A'M'|\cdot|A'N'| = \frac{(155)^3\cdot 3}{(28)^2\cdot 6} = \frac{155^3}{2\cdot(28)^2}\ ;$$

$$S = S_{\triangle A'K'M'} + S_{\triangle A'K'N'} + S_{\triangle A'N'M'} + S_{\triangle N'K'M'} =$$
$$= \frac{1}{2}(|A'K'|\cdot|A'M'| + |A'K'|\cdot|A'N'| + |A'N'|\cdot|A'M'|)+$$
$$+\frac{1}{2}\sqrt{|A'K'|^2\cdot|A'M'|^2 + |A'K'|^2\cdot|A'N'|^2 + |A'N'|^2\cdot|A'M'|^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{155^2\cdot 3}{49\cdot 4} + \frac{155^2}{28} + \frac{155^2\cdot 3}{16\cdot 7}\right) + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{155^4\cdot 9}{49^2\cdot 16} + \frac{155^4}{28^2} + \frac{155^4\cdot 9}{16^2\cdot 49}} =$$
$$= \frac{155^2}{2\cdot 7}\cdot\left(\frac{3}{28} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \sqrt{\frac{9}{28^2} + \frac{1}{16} + \frac{9}{16^2}}\right) =$$
$$= \frac{155^2}{2\cdot 7}\cdot\left(\frac{3}{28} + \frac{7}{16} + \sqrt{\frac{9}{28^2} + \frac{25}{16^2}}\right) = \frac{155^2\cdot(61+\sqrt{1369})}{2\cdot 7\cdot 7\cdot 16} =$$
$$= \frac{155^2\cdot 98}{2\cdot 7\cdot 7\cdot 16} = \frac{155^2}{16} = 49\cdot\frac{155^2}{28^2}\ .$$

По формуле, связывающей радиус вписанной в многогранник, в частности, в пирамиду сферы, площадь его полной поверхности и его объем, получаем окончательный ответ

$$R = \frac{3V}{S} = \frac{3\cdot 155^3}{2\cdot 28^2}\cdot\frac{28^2}{49\cdot 155^2} = \frac{465}{98}\ .$$

Ответ: $\dfrac{465}{98}$.

1. В арифметической прогрессии с отличной от нуля разностью сумма членов с четвертого по четырнадцатый включительно равна 77. Найти номер того члена прогрессии, который равен 7.

2. Решить уравнение

$$|1-\log_{2x}(x^2-5x+6)| = 1-\log_{2x}(x^2-5x+6)\ .$$

3. Найти все корни уравнения $2^{\cos x}+5\cdot 2^{-\cos x}=2\sqrt{6}$, удовлетворяющие неравенствам $\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{7\pi}{3}$.

4. Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$|x+2a| \leqslant \frac{1}{x}\ .$$

5. Две окружности радиусов r и R с центрами в точках O_1 и O внешне касаются в точке K. В точке A окружности радиуса R проведена касательная, пересекающая окружность радиуса r в точках B и C. Известно, что отрезок AC пересекает отрезок O_1K, и $BC:AB=p$. Определить:

1. при каких условиях на r, R и p возможна такая геометрическая конфигурация;
2. длину отрезка BC.

6. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ с параллельными гранями $ABCD$ и $A'B'C'D'$ длина ребра равна 5. Через точки M, N и K, расположенные на ребрах BC, CD и CC' соответственно, проведена плоскость. Известно, что длина биссектрисы угла C в треугольнике NCK равна $2\sqrt{2}/3$, величина угла NMC равна $\arcsin(\sqrt{5}/5)$, площадь треугольника MCK равна 2 и объем пирамиды $MNKC$ меньше 1. Найти радиус сферы, касающейся плоскости треугольника MNK и трех граней куба с общей точкой A'.

3.1.9. Вариант с решениями задач 1995 г. (июль)

1. Найти все целые числа n и m, для которых

$$2nm + n = 14 \quad \text{и} \quad nm \geqslant 9 .$$

Решение

$2nm + n = 14 \Leftrightarrow n(2m+1) = 2 \cdot 7$. Так как требуется найти *целые* значения n и m, то это возможно только в следующих четырех случаях:

а) $\begin{cases} n = 14 , \\ m = 0 \end{cases} \Rightarrow nm = 0 < 9$; б) $\begin{cases} n = -14 , \\ m = -1 \end{cases} \Rightarrow nm = 14 > 9$;

в) $\begin{cases} n = 2 , \\ m = 3 \end{cases} \Rightarrow nm = 6 < 9$; г) $\begin{cases} n = -2 , \\ m = -4 \end{cases} \Rightarrow nm = 8 < 9$.

Очевидно, что условию задачи $nm \geqslant 9$ удовлетворяет лишь случай б), отсюда получаем ответ.

Ответ: $n = -14$; $m = -1$.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 3xy + y = 3 + 10\sqrt{2} , \\ x^2 + y^2 = 11 . \end{cases}$$

Решение

Введем обозначения $x+y = u$, $xy = v$. Так как $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$, то система уравнений может быть записана в виде:

$$\begin{cases} u + 3v = 3 + 10\sqrt{2} , \\ u^2 - 2v = 11 . \end{cases}$$

Выражая v из второго уравнения и подставляя его в первое уравнение, после преобразований мы получим следующее квадратное уравнение относительно u : $3u^2 + 2u - 39 - 20\sqrt{2} = 0$.
Решения этого уравнения имеют вид:

$$u_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{118 + 60\sqrt{2}}}{3} = \frac{-1 \pm \sqrt{(3\sqrt{2}+10)^2}}{3} = \frac{-1 \pm (3\sqrt{2}+10)}{3} .$$

Таким образом, решение исходной системы уравнений сводится к рассмотрению следующих двух случаев:

а) $\begin{cases} u = -\sqrt{2} - 11/3 , \\ v = 11\sqrt{2}/3 + 20/9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = -\sqrt{2} - 11/3 , \\ xy = 11\sqrt{2}/3 + 20/9 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} u = \sqrt{2}+3\,, \\ v = 3\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = \sqrt{2}+3\,, \\ xy = 3\sqrt{2}\,. \end{cases}$

Полученные системы уравнений относительно неизвестных x и y можно решать, например, выражением одного неизвестного через другое из первых уравнений и его подстановки во вторые уравнения, в результате чего получаются квадратные уравнения относительно второго неизвестного; а можно — на основе теоремы Виета утверждать, что каждая из этих систем уравнений имеет решения следующего вида: $x = x_1 = z_1$; $y = y_1 = z_2$ и $x = x_2 = z_2$; $y = y_2 = z_1$, где z_1 и z_2 — решения квадратного уравнения

$$z^2 + \left(\sqrt{2} + \frac{11}{3}\right) z + \frac{11}{3}\sqrt{2} + \frac{20}{9} = 0 \quad \text{в случае а)} \quad ;$$

$$z^2 - (\sqrt{2}+3)z + 3\sqrt{2} = 0 \quad \text{в случае б)} \quad .$$

Дискриминант квадратного трехчлена в случае а), как нетрудно проверить, отрицателен, поэтому система уравнений в этом случае не имеет действительных решений.

В случае б) решения квадратного уравнения имеют вид:
$z = z_1 = 3$; $z = z_2 = \sqrt{2}$. Отсюда получаем окончательный ответ.

Ответ: $x = 3$, $y = \sqrt{2}$; $x = \sqrt{2}$, $y = 3$.

3. В треугольнике ABC медианы AM и CL перпендикулярны, $BC = a$, $AC = b$. Найти площадь треугольника ABM.

Решение

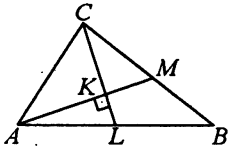


рис. 14

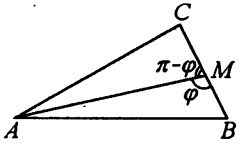


рис. 15

Положим $|CK| = x$, $|AK| = y$. Тогда по свойству медиан треугольника

$$|KL| = \frac{x}{2} \quad ; \quad |KM| = \frac{y}{2}\,.$$

Из прямоугольных треугольников и CKM в силу теоремы Пифагора мы получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = b^2\,, \\ x^2 + (y/2)^2 = (a/2)^2\,. \end{cases}$$

(Здесь использованы данные задачи $|AC| = b$ и так как AM — медиана, то $|CM| = |MB| = a/2$).

Решая эту систему уравнений, мы получим

$$y^2 = \frac{4}{3}\left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right) ; \; x^2 = b^2 - y^2 = \frac{a^2 - b^2}{3} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{3}} ; \; y = \sqrt{\frac{4b^2 - a^2}{3}} .$$

Так как медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника (см. рис. 15), то

$$S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot m_a \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot m_a \cdot \sin(\pi - \varphi) = S_{\triangle ACM} ,$$

поэтому получаем

$$S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ACM} = \frac{1}{2}|AM||CK| = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}|AK||CK| = \frac{3}{4}xy =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(4b^2 - a^2)(a^2 - b^2)} .$$

Ответ: $\sqrt{(4b^2 - a^2)(a^2 - b^2)}/4$.

4. Решить неравенство

$$\log_{\cos x} \cos^2 x \geqslant \log_{\cos x - \frac{1}{2}} \left(\cos^2 x - \cos x - x^2 - 14x - \frac{51}{4}\right) .$$

Решение

Исходное неравенство можно переписать в виде

$$\log_{\cos x} \cos^2 x \geqslant \log_{\cos x - \frac{1}{2}} \left[\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 - x^2 - 14x - 13\right] .$$

Из ограничений на основания логарифмов получаем $0,5 < \cos x < 1$. Для таких значений x

$$\log_{\cos x} \cos^2 x = 2 = \log_{\cos x - \frac{1}{2}} \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 .$$

Поэтому так как $0 < \cos x - 0,5 < 0,5 < 1$, то в силу убывания логарифмической функции с основанием больше нуля и меньше единицы исходное неравенство будет эквивалентно следующей системе неравенств

$$\begin{cases} 0,5 < \cos x < 1 , \\ x^2 + 14x + 13 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\pi/3 + 2\pi k < x < \pi/3 + 2\pi k , \; x \neq 2\pi k , \\ -13 \leqslant x \leqslant -1 \qquad\qquad \forall k \in Z . \end{cases}$$

С учетом того, что $-\frac{13\pi}{3} < -13 < -4\pi$ и $-\frac{\pi}{3} < -1$,

первое и второе неравенства последней системы будут иметь непустое пересечение решений только при $k = -2$, $k = -1$, $k = 0$, откуда и получается окончательный ответ.

Ответ: $-13 \leqslant x < -\frac{11\pi}{3}$, $x \neq -4\pi$; $-\frac{7\pi}{3} < x < -\frac{5\pi}{3}$, $x \neq -2\pi$; $-\frac{\pi}{3} < x \leqslant -1$.

5. Строительной организации необходимо построить некоторое количество одинаковых домов общей площадью 2500 квадратных метров. Стоимость одного дома площадью a квадратных метров складывается из стоимости материалов $p_1 a^{\frac{3}{2}}$ тысяч руб., стоимости строительных работ $p_2 a$ тысяч руб. и стоимости отделочных работ $p_3 a^{\frac{1}{2}}$ тысяч руб. Числа p_1, p_2, p_3 являются последовательными членами геометрической прогрессии, их сумма равна 21, а их произведение равно 64. Если построить 63 дома, то затраты на материалы будут меньше, чем на строительные и отделочные работы. Сколько следует построить домов, чтобы общие затраты были минимальными ?

Решение

Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии, о которой говорится в условии задачи, тогда $p_2 = p_1 q$, $p_3 = p_1 q^2$. В силу условий задачи мы имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} p_1 + p_1 q + p_1 q^2 = 21, \\ p_1 \cdot p_1 q \cdot p_1 q^2 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 \cdot (1 + q + q^2) = 21, \\ (p_1 \cdot q)^3 = 64. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы сразу получаем, что $p_1 q = 4$. Отсюда $p_1 = 4/q$, $p_1 q^2 = 4q$. Подставляя эти равенства в первое уравнение системы, мы получим следующее уравнение для определения знаменателя q

$$4/q + 4q = 17 \quad \Leftrightarrow \quad 4q^2 - 17q + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad q = q_1 = 4, \; q = q_2 = 1/4.$$

Отсюда соответственно в случаях

$q = 4$ а) $p_1 = 1$, $p_2 = 4$, $p_3 = 16$; $q = 1/4$ б) $p_1 = 16$, $p_2 = 4$, $p_3 = 1$.

Стоимость одного дома равна $p_1 a^{\frac{3}{2}} + p_2 a + p_3 a^{\frac{1}{2}}$. Если построено n домов, то $a = 2500/n \;\Rightarrow\; a^{\frac{1}{2}} = 50/\sqrt{n}$, а потому стоимости одного дома и соответственно n домов равны (в тыс. руб.)

$$p_1 \cdot \frac{50^3}{n\sqrt{n}} + p_2 \cdot \frac{50^2}{n} + p_3 \cdot \frac{50}{\sqrt{n}} \quad ; \quad S(n) = 50^2 \cdot \left(p_1 \cdot \frac{50}{\sqrt{n}} + p_2 + p_3 \cdot \frac{\sqrt{n}}{50} \right) .$$

Если построено 63 дома, то затраты на материалы (в тыс. руб.) равны $50^2 \cdot p_1 \cdot 50/\sqrt{63}$, а на строительные и отделочные работы — $50^2 \cdot (p_2 + p_3 \cdot \sqrt{63}/50)$.

Для случаев а) и б) сравним затраты на материалы с затратами на строительные и отделочные работы (по условию задачи первые из них меньше), то есть соответственно сравним числа:

$$\frac{50}{\sqrt{63}} \vee 4 + \frac{16\sqrt{63}}{50} \quad \text{и} \quad \frac{16 \cdot 50}{\sqrt{63}} \vee 4 + \frac{\sqrt{63}}{50} .$$

$$\frac{50}{\sqrt{63}} \vee 4 + \frac{16\sqrt{63}}{50} \Leftrightarrow 2500 \vee 200\sqrt{63} + 16 \cdot 63 \Leftrightarrow 1492 \vee 200\sqrt{63} \Leftrightarrow 373 \vee 50\sqrt{63} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 373^2 \vee 2500 \cdot 63 \Leftrightarrow 139129 \vee 157500 \quad 139129 < 157500 \Rightarrow \frac{50}{\sqrt{63}} < 4 + \frac{16\sqrt{63}}{50} .$$

$$\frac{16 \cdot 50}{\sqrt{63}} \vee 4 + \frac{\sqrt{63}}{50} \qquad \frac{16 \cdot 50}{\sqrt{63}} > \frac{16 \cdot 50}{\sqrt{64}} = 100 > 5 = 4 + 1 > 4 + \frac{\sqrt{63}}{50} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{16 \cdot 50}{\sqrt{63}} > 4 + \frac{\sqrt{63}}{50} .$$

Следовательно, условию задачи удовлетворяет только случай а)
$p_1 = 1$, $p_2 = 4$, $p_3 = 16$, поэтому

$$S(n) = 50^2 \cdot \left(\frac{50}{\sqrt{n}} + 4 + \frac{16\sqrt{n}}{50} \right) .$$

Рассмотрим функцию действительного переменного

$$f(x) = \frac{50}{\sqrt{x}} + \frac{16\sqrt{x}}{50} = 4 \cdot \left(\frac{50}{4\sqrt{x}} + \frac{4\sqrt{x}}{50} \right) = 4 \cdot \left(t + \frac{1}{t} \right) \text{ , где } t = 0,08\sqrt{x} .$$

Хорошо известно, что функция $g(t) = t + \dfrac{1}{t}$ на промежутке $(0, +\infty)$ принимает наименьшее значение, равное 2 при $t = 1$ (так как при любом положительном значении t $t + \dfrac{1}{t} \geqslant 2$, причем равенство достигается только при $t = 1$).

Не используя производную (хотя поступающие имеют право ее применять), докажем, что функция $g(t)$ убывает на полуотрезке $(0, 1]$ и возрастает на промежутке $[1, +\infty)$.

Фиксируем произвольное $t > 1$ и зададим произвольное приращение аргумента t $\Delta t > 0$. $g(t+\Delta t) - g(t) = \Delta t \cdot \big(1 - 1/(t \cdot (t+\Delta t))\big) > 0$. Следовательно, $g(t+\Delta t) > g(t) > g(1)$.

Фиксируем теперь произвольное $0 < t < 1$ и зададим произвольное приращение аргумента $\Delta t > 0$ такое, что $t + \Delta t < 1$, $g(t+\Delta t) - g(t) = \Delta t \cdot \big(1 - 1/(t(t+\Delta t))\big) < 0$. Следовательно, $g(t) > g(t+\Delta t) > g(1)$.

Отсюда и вытекают указанные убывание и возрастание.

Следовательно, функция $f(x)$ возрастает на промежутке $\sqrt{x} \geqslant 1/0,08 = 12,5 \Leftrightarrow x \geqslant 156,25$ и убывает на промежутке $0 < \sqrt{x} \leqslant 1/0,08 = 12,5 \Leftrightarrow 0 < x \leqslant 156,25$. А потому $S(n)$ достигает минимального значения либо при $n = 156$, либо при $n = 157$.

Напомним, что $S(n)$ — общие затраты при строительстве n домов. Для получения окончательного ответа остается сравнить следующие числа:

$$\frac{50}{\sqrt{156}} + \frac{16\sqrt{156}}{50} \vee \frac{50}{\sqrt{157}} + \frac{16\sqrt{157}}{50} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 50 \cdot \frac{(\sqrt{157} - \sqrt{156})}{\sqrt{156} \cdot \sqrt{157}} \vee \frac{16}{50} \cdot (\sqrt{157} - \sqrt{156}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2500 \vee 16 \cdot \sqrt{156 \cdot 157} \quad \Leftrightarrow \quad 625^2 \vee 16 \cdot 156 \cdot 157 \quad \Leftrightarrow \quad 390625 \vee 391872$$

$$390625 < 391872 \quad \Rightarrow \quad S(156) < S(157).$$

Отсюда получаем окончательный ответ: $n = 156$.

Ответ: 156 домов.

6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с параллельными гранями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ длина ребра равна 1. Точки K и N являются серединами ребер DC и BC соответственно. Точка M лежит на ребре CC_1 и $MC = 3/4$. Найти максимальное значение радиусов сфер, проходящих через точки M, N, K и касающихся плоскости BB_1D_1D.

Решение

1 способ, геометрический

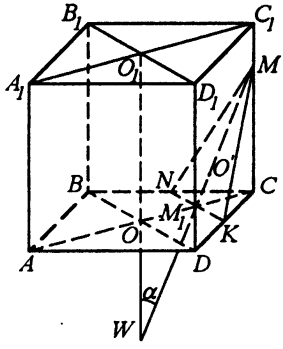


рис. 16

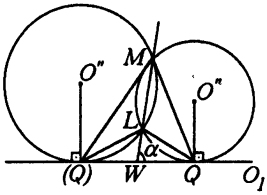


рис. 17

Прежде всего отметим, что в решении этой задачи помимо ссылок на множество различных теорем курса геометрии из Программы вступительных экзаменов и хорошо известные и достаточно элементарно доказываемые свойства куба мы будем ссылаться на следующие два утверждения.

Признак перпендикулярности двух плоскостей. Если плоскость содержит (проходит через) перпендикулярную другой плоскости прямую, то эти две плоскости перпендикулярны.

Свойство перпендикулярности двух плоскостей. Если две плоскости перпендикулярны и перпендикулярная одной из них прямая имеет общую с другой плоскостью точку, то эта прямая целиком лежит в этой другой плоскости.

Доказательство этих утверждений можно найти, например, в учебнике А.П. Киселева.

См. рис. 16 , из свойств куба (перпендикулярности ребра куба CC_1 плоскости грани $ABCD$) и равенства $|CK| = |CN|$ вытекает, что $|MK| = |MN|$. Пусть M_1 — точка пересечения KN и AC, так как в силу свойств куба AC — биссектриса угла BCD и $\triangle KCN$ — равнобедренный, то $KN \perp AC$. В силу теоремы о трех перпендикулярах $MM_1 \perp KN$. Так как NK — средняя линия $\triangle BCD$ (по условию), то $NK \parallel BD$, но в силу свойств куба $BD \perp AA_1C_1C$, поэтому и $NK \perp AA_1C_1C$, следовательно, по признаку перпендикулярности плоскостей плоскость $KMN \perp$ плоскости AA_1C_1C.

В то же время в силу свойств куба плоскость $BB_1D_1D \perp$ плоскости AA_1C_1C.

Пусть O_1 — центр грани $A_1B_1C_1D_1$, O — центр грани $ABCD$, W — точка пересечения плоскостей KMN, AA_1C_1C, BB_1D_1D.

Точка W является точкой пересечения прямых OO_1 и MM_1 — линий пересечения плоскостей AA_1C_1C , BB_1D_1D и AA_1C_1C , KMN соответственно. В силу свойств куба $OO_1 \parallel CC_1$, поэтому так как очевидно, что MM_1 пересекает CC_1, в точке M, то MM_1 пересекает OO_1, тем самым существование точки W установлено.

Линией пересечения сферы, о которой говорится в условии задачи, и плоскости KMN является окружность, описанная около $\triangle KMN$. В силу равнобедренности этого треугольника центр этой окружности (точка O') лежит на прямой MM_1. Пусть ML — диаметр этой окружности, тогда точка L — также лежит на прямой MM_1 и принадлежит сфере.

Центр сферы, о которой говорится в условии задачи, точка O'', лежит на перпендикуляре к плоскости KML, проходящем через точку O', в силу свойства перпендикулярных плоскостей этот перпендикуляр, в частности, точка O'' будет принадлежать плоскости AA_1C_1C.

Так как эта сфера по условию касается плоскости BB_1D_1D, то точка касания Q — основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы на плоскость BB_1D_1D, с одной стороны принадлежит плоскости BB_1D_1D, с другой стороны (в силу свойства перпендикулярных плоскостей) этот перпендикуляр целиком лежит в плоскости AA_1C_1C, поэтому и точка Q принадлежит плоскости AA_1C_1C. Следовательно, будучи принадлежащей плоскости BB_1D_1D и плоскости AA_1C_1C, точка Q будет принадлежать линии пересечения этих плоскостей, то есть — прямой OO_1.

Так как точки L, M, Q принадлежат сфере с центром в точке O'' и в то же время лежат в плоскости AA_1C_1C, в которой лежит центр этой сферы, то эти три точки лежат на так называемой окружности большого круга этой сферы, то есть центр этой окружности является центром сферы. Следовательно, радиус искомой сферы R является радиусом окружности, описанной около $\triangle LMQ$.

См. рис. 17. Пусть $|WL| = a$, $|WM| = b$, $\widehat{MWQ} = \alpha$, где согласно расположению точек L и M $a < b$, $|LM| = b - a$. Тогда так как WQ — касательная к окружности большого круга по теореме о квадрате длины касательной

$$|WQ| = \sqrt{|WL| \cdot |WM|} = \sqrt{ab}\,.$$

По теореме косинусов для $\triangle WLQ$ и соответственно для $\triangle WMQ$ мы получаем

$$|LQ|^2 = a^2 + ab \pm 2a\sqrt{ab}\cos\alpha \quad , \quad |MQ|^2 = b^2 + ab \pm 2b\sqrt{ab}\cos\alpha \quad ,$$

знак " $+$ " берется, если Q лежит на луче WO_1, знак " $-$ " берется, если Q лежит на дополнительном луче по отношению к лучу WO_1.
По теореме косинусов для $\triangle MQL$

$$\cos\widehat{MQL} = \frac{a^2 + ab \pm 2a\sqrt{ab}\cos\alpha + b^2 + ab \pm 2b\sqrt{ab}\cos\alpha - (b-a)^2}{2\sqrt{a^2 + ab \pm 2a\sqrt{ab}\cos\alpha} \cdot \sqrt{b^2 + ab \pm 2b\sqrt{ab}\cos\alpha}} =$$

$$= \frac{\sqrt{ab}(2\sqrt{ab} \pm (a+b)\cos\alpha)}{\sqrt{a(a+b) \pm 2a\sqrt{ab}\cos\alpha} \cdot \sqrt{b(a+b) \pm 2b\sqrt{ab}\cos\alpha}} =$$

$$= \frac{\sqrt{ab}(2\sqrt{ab} \pm (a+b)\cos\alpha)}{\sqrt{ab(a+b)^2 \pm 4ab(a+b)\sqrt{ab}\cos\alpha + 4ab(\sqrt{ab})^2\cos^2\alpha}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{ab} \pm (a+b)\cos\alpha}{\sqrt{(a+b)^2 \pm 4(a+b)\sqrt{ab}\cos\alpha + 4(\sqrt{ab})^2\cos^2\alpha}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{ab} \pm (a+b)\cos\alpha}{\sqrt{(a+b \pm 2\sqrt{ab}\cos\alpha)^2}} = \frac{2\sqrt{ab} \pm (a+b)\cos\alpha}{a+b \pm 2\sqrt{ab}\cos\alpha} .$$

Последнее равенство вытекает, в частности, по той причине, что

$$|\pm 2\sqrt{ab}\cos\alpha| \leqslant 2\sqrt{a}\sqrt{b} < a+b \;\Leftrightarrow\; 0 < (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2,$$

так как $a < b$, поэтому $a+b \pm 2\sqrt{ab}\cos\alpha > 0$.

Ввиду того, что $\angle MQL$ — это угол в треугольнике, его синус положителен, а потому он вычисляется по формуле

$$\sin\widehat{MQL} = +\sqrt{1-\cos^2\widehat{MQL}} = \sqrt{1 - \frac{(2\sqrt{ab} \pm (a+b)\cos\alpha)^2}{(a+b \pm 2\sqrt{ab}\cos\alpha)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{[(a+b)^2 - 4ab](1-\cos^2\alpha)}{(a+b \pm 2\sqrt{ab}\cos\alpha)^2}} = \sqrt{\frac{(a-b)^2\sin^2\alpha}{(a+b \pm 2\sqrt{ab}\cos\alpha)^2}} =$$

$$= \frac{(b-a)\sin\alpha}{a+b \pm 2\sqrt{ab}\cos\alpha} = \sin\widehat{MQL} .$$

Последнее равенство записано именно в таком виде с учетом $\sin\alpha > 0$ (так как $0 < \alpha < \pi$) и $b > a$. Выше за R был обозначен радиус окружности, описанной около $\triangle LMQ$, он же — радиус искомой сферы. По теореме синусов для $\triangle LMQ$,

$$R = \frac{b-a}{2\sin\widehat{MQL}} = \frac{a+b \pm 2\sqrt{ab}\cos\alpha}{2\sin\alpha} .$$

Пусть $|MC| = k$ $(0 < k < 1)$. Выше отмечалось, что NK — средняя линия $\triangle BCD$, поэтому в силу ее свойств $\triangle KCN \sim \triangle BCD$, с коэффициентом подобия $1/2$, а потому так как по условию длина ребра куба равна 1 $|CM_1| = |CO|/2 = \sqrt{2}/4 = |OM_1|$. В силу свойств куба $\triangle CMM_1$ прямоугольный, применяя к нему теорему Пифагора, имеем $|MM_1| = \sqrt{|CM|^2 + |CM_1|^2} = \sqrt{k^2 + 1/8}$.

Так как $CC_1 \parallel WO_1$, то в силу равенства внутренних накрест лежащих углов при этих прямых и секущей MM_1 $\widehat{M_1MC} = \widehat{O_1WM} = \alpha$. Положим $\widehat{QWM} = \beta$, тогда либо $\beta = \alpha$, либо $\beta = \pi - \alpha$. Из прямоугольного $\triangle MCM_1$ получаем

$$\sin\alpha = \frac{|CM_1|}{|MM_1|} = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{k^2+1/8}} = \frac{1}{\sqrt{8k^2+1}} .$$

Так как $\angle WM_1O = \angle MM_1C$ (как вертикальные) и $|CM_1| = |OM_1|$, то прямоугольные $\triangle CMM_1$ и $\triangle OWM_1$ равны по катету и острому углу, а потому $|WM_1| = |M_1M|$, откуда

$$b = |WM| = 2|MM_1| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{8k^2+1}\,.$$

Далее

$$\cos\beta = \pm\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{\frac{8k^2}{8k^2+1}} = \pm\frac{2\sqrt{2}k}{\sqrt{8k^2+1}}\,,$$

где знак "$+$" берется, если Q лежит на луче WO_1, при этом $\beta = \alpha$, знак "$-$" берется, если Q лежит на дополнительном ему луче, при этом $\beta = \pi - \alpha$.

Обозначим за r радиус окружности, описанной около $\triangle KMN$. По формуле, выражающей этот радиус через стороны треугольника и его площадь, с учетом, что $\triangle KMN$ — равнобедренный, KN — его основание и MM_1 — проведенная к нему высота, применяя еще и теорему Пифагора к прямоугольному $\triangle CKM$, будем иметь

$$r = \frac{|MK|\cdot|MN|\cdot|KN|}{4S_{\triangle KMN}} = \frac{|MK|^2\cdot|KN|}{2|KN|\cdot|MM_1|} = \frac{|MK|^2}{2|MM_1|} = \frac{|CM|^2+|CK|^2}{2|MM_1|} =$$

$$= \frac{k^2+1/4}{2\sqrt{k^2+1/8}} = \frac{\sqrt{2}(4k^2+1)}{4\sqrt{8k^2+1}}\,.$$

Следовательно,

$$a = |WL| = |WM| - 2r = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{8k^2+1} - \frac{4k^2+1}{\sqrt{8k^2+1}}\right) = \frac{2\sqrt{2}k^2}{\sqrt{8k^2+1}}\,.$$

В силу полученных выше выражений для R, b, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и a мы получаем

$$R = \frac{2\sqrt{2}k^2 : \sqrt{8k^2+1} + (\sqrt{2}/2)\cdot\sqrt{8k^2+1} \pm 2\sqrt{2k^2}\cdot 2\sqrt{2}k : \sqrt{8k^2+1}}{2 : \sqrt{8k^2+1}} =$$

$$= \sqrt{2}k^2 + 2\sqrt{2}k^2 + \frac{\sqrt{2}}{4} \pm 4k^2 = (3\sqrt{2}\pm 4)k^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}\,.$$

Максимальное значение радиуса искомой сферы достигается в случае знака "$+$" перед 4 в последнем выражении. С учетом того, что по условию $k = 3/4$, мы и получаем следующий окончательный ответ

$$R = (3\sqrt{2}+4)k^2 + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{27\sqrt{2}}{16} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{9}{4} = \frac{31\sqrt{2}+36}{16}\,.$$

Ответ: $\dfrac{36+31\sqrt{2}}{16}$.

2 способ, с использованием метода координат *

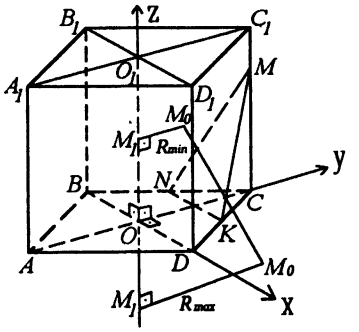


рис. 18

Выберем систему координат в пространстве $Oxyz$ так, что начало координат O совпадает с точкой пересечения диагоналей грани куба $ABCD$, положительные направления осей Ox, Oy и Oz совпадают с направлениями OD, OC и OO_1 соответственно, O_1 — точка пересечения диагоналей грани $A_1B_1C_1D_1$. Так как длина ребра рассматриваемого куба равна 1, то в силу условий задачи и свойств куба легко установить, что точки K, N и M имеют координаты (см. рис. 18)

$$K\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\,;\,\frac{\sqrt{2}}{4}\,;\,0\right),\ N\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\,;\,\frac{\sqrt{2}}{4}\,;\,0\right),\ M\left(0\,;\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,\frac{3}{4}\right).$$

Пусть $M_1(x_0\,;\,0\,;\,z_0)$ — точка касания искомой сферы и плоскости BB_1D_1D (Oxz), следовательно, она в этой плоскости лежит, а потому ее вторая координата равна 0. Обозначим M_0 центр искомой сферы. По свойству касательной плоскости $M_0M_1 \perp Oxz$, а потому точка M_0 имеет координаты $M_0(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$, причем $|y_0| = \rho(M_0\,;\,M_1) = R$, где R — радиус искомой сферы.

Подставим координаты точек K, M, N, в уравнение сферы радиуса R с центром в точке $M_0(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

(это уравнение непосредственно вытекает из определения сферы и формулы расстояния между точками в координатном пространстве), получим следующую систему уравнений:

* Этот способ решения предложила Т.А. Леонтьева.

$$\begin{cases} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - x_0\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - y_0\right)^2 + z_0^2 = R^2 , & (1) \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + x_0\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - y_0\right)^2 + z_0^2 = R^2 , & (2) \\ x_0^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - y_0\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - z_0\right)^2 = R^2 , & (3) \\ y_0^2 = R^2 . & (4) \end{cases}$$

Вычтем из уравнения (1) уравнение (2), получим

$\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - x_0\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + x_0\right)^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow M_1(0\ ;\ 0\ ;\ z_0)$, то есть точка M_1 лежит на оси Oz (прямой OO_1). При этом система уравнений (1) и (3) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{8} + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - y_0\right)^2 + z_0^2 = R^2 , & (1') \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - y_0\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - z_0\right)^2 = R^2 . & (3') \end{cases}$$

Вычитая из уравнения (1′) уравнение (3′), получим

$$\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\sqrt{2} - 2y_0\right) + \frac{3}{4} \cdot \left(2z_0 - \frac{3}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow z_0 = \frac{13}{24} - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot y_0 .$$

Подставляя последнее соотношение в (3′), учитывая (4) и проводя все алгебраические и арифметические преобразования, получим следующее квадратное уравнение относительно неизвестного y_0 :

$$128y_0^2 - 31 \cdot 16\sqrt{2}y_0 + 313 = 0 ,$$

которое имеет два различных положительных корня

$$y_0 = \frac{31 \cdot 8\sqrt{2} \pm \sqrt{31^2 \cdot 64 \cdot 2 - 313 \cdot 128}}{128} =$$

$$= \frac{31 \cdot 8\sqrt{2} \pm 8 \cdot \sqrt{1922 - 626}}{128} = \frac{31 \cdot \sqrt{2} \pm 36}{16} .$$

Теперь с учетом (4) и положительности этих корней получаем

$$R_{max} = \frac{31 \cdot \sqrt{2} + 36}{16} .$$

3.1.10. Вариант для самостоятельного решения 1995 г. (июль)

1. Найти все целые числа n и m, для которых

$$3n^2 + 2nm = 11 \quad \text{и} \quad n + 2m \geqslant 10 .$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + xy + 5y = 10 + 7\sqrt{3} , \\ x^2 + y^2 = 7 . \end{cases}$$

3. Медианы BK и CL треугольника ABC пересекаются в точке M под прямым углом, $AC = b$, $AB = c$. Найти площадь четырехугольника $AKML$.

4. Решить неравенство

$$\log_{2\sin x - 1}(43 - 4\sin x + 4\sin^2 x - x^2 + x) \leqslant \frac{3\log_3 2}{\log_3(2\sqrt{2})} .$$

5. Транспортное агенство осуществляет грузовые перевозки. Стоимость одного рейса при загрузке машины a тоннами груза складывается из эксплуатационных расходов $p_2 a^2$ тысяч руб., оплаты труда водителя p_3 тысяч руб. и прочих расходов $p_1 a$ тысяч руб. Числа p_1, p_2, p_3 являются соответственно первым, третьим и шестнадцатым членами некоторой арифметической прогрессии. Их сумма равна 340, а разность прогрессии d является корнем уравнения $d^2 - 37d + 340 = 0$. Агенство должно израсходовать 10000 тысяч руб. Если выполнено 12 одинаковых рейсов, то суммарная масса перевезенного груза больше 40 тонн. Сколько следует выполнить рейсов, чтобы масса перевезенного груза была максимальной ?

6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с параллельными гранями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ длина ребра равна 1. Точки K и N являются серединами ребер DC и BC соответственно. Точка M лежит на ребре CC_1 и $MC = 2/3$. Найти минимальное значение радиусов сфер, проходящих через точки M, N, K и касающихся плоскости BB_1D_1D.

3.1.11. Вариант с решениями задач 1996 г. (апрель)

1. Решить неравенство $\sqrt{(2x+1)^4-(2x+1)^2}+(2x+1)^2 \geqslant 0$.

Решение

Очевидно, что исходное неравенство выполняется при всех значениях x , принадлежащих ОДЗ (при которых неотрицательно подкоренное выражение), то есть исходное неравенство равносильно

$$(2x+1)^4-(2x+1)^2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2x+1)^2\cdot((2x+1)^2-1) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=0\,; \\ (2x+1)^2-1 \geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=0\,; \\ 2x+1 \geqslant 1\,; \\ 2x+1 \leqslant -1 \end{array}\right. \Rightarrow \text{ответ}\,.$$

Ответ: $x \leqslant -1\,;\ x=-\dfrac{1}{2}\,;\ x \geqslant 0\,.$

2. Решить уравнение $\log_{2x+3}(x-2)^2=\log_{\frac{x}{6}+\frac{1}{2}}(x-2)^2$.

Решение

$$\log_{2x+3}(x-2)^2=\log_{\frac{x}{6}+\frac{1}{2}}(x-2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad .$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x-2)^2=1\,, \\ 0<2x+3\neq 1\,, \\ 0<\dfrac{x}{6}+\dfrac{1}{2}\neq 1 \end{array}\right. \Rightarrow x=1 \quad \text{или} \quad \left\{\begin{array}{l} x\neq 2\,, \\ 0<2x+3\neq 1\,, \\ 2x+3=\dfrac{x}{6}+\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow x=-\frac{15}{11}\,.$$

Ответ: $x=1\,;\ x=-\dfrac{15}{11}\,.$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{12\sin x-\frac{9}{2}\cos 2x+\frac{17}{2}}=\frac{9}{8}+4\sin x+\frac{1}{2}\cos^2 x\,.$$

Решение

Так как $12\sin x-\dfrac{9}{2}\cos 2x+\dfrac{17}{2}=12\sin x-\dfrac{9}{2}(1-2\sin^2 x)+\dfrac{17}{2}=(3\sin x+2)^2$

и $\dfrac{9}{8}+4\sin x+\dfrac{1}{2}\cos^2 x=\dfrac{13}{8}+4\sin x-\dfrac{1}{2}\sin^2 x$,

то исходное уравнение можно записать в виде

$$|3\sin x + 2| = \frac{13}{8} + 4\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x\ .$$

Обозначая $t = \sin x$ и раскрывая модуль, получим

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 3t + 2 = \dfrac{13}{8} + 4t - \dfrac{t^2}{2}\ , \\ 1 \geqslant t \geqslant -\dfrac{2}{3}\ ; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} -3t - 2 = \dfrac{13}{8} + 4t - \dfrac{t^2}{2}\ , \\ -1 \leqslant t < -\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 4t^2 - 8t + 3 = 0\ , \\ 1 \geqslant t \geqslant -\dfrac{2}{3}\ ; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 4t^2 - 56t - 29 = 0\ , \\ -1 \leqslant t < -\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} t = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{4} = \dfrac{4 \pm 2}{4}\ , \\ 1 \geqslant t \geqslant -\dfrac{2}{3}\ ; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} t = \dfrac{28 \pm \sqrt{784 + 116}}{4} = \dfrac{28 \pm 30}{4}\ , \\ -1 \leqslant t < -\dfrac{2}{3}\ . \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Отсюда $t = \dfrac{1}{2}$ или $\sin x = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ ответ.

Ответ: $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n\ ,\ \forall n \in Z\ .$

4. Через центр O вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, параллельная стороне BC и пересекающая стороны AB и AC соответственно в точках M и N. Периметр треугольника AMN равен $3 \cdot \sqrt[4]{2}$, длина стороны BC равна $\sqrt[4]{2}$, а длина отрезка AO в три раза больше радиуса вписанной в треугольник ABC окружности. Найти площадь треугольника ABC.

Решение

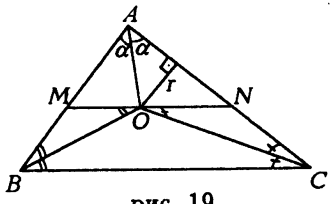


рис. 19

Так как $MN \parallel BC$ и BO — биссектриса угла ABC, то $\angle MBO = \angle MOB$, а потому $\triangle BMO$ — равнобедренный и поэтому $BM = MO$. Аналогично устанавливается, что $CN = NO$. Следовательно,

$$|AB| + |AC| = |AM| + |MN| + |AN| = 3 \cdot \sqrt[4]{2} . \qquad (1)$$

Далее, пусть $\widehat{OAN} = \alpha$, r — радиус вписанной в треугольник ABC окружности. Тогда $\widehat{BAC} = 2\alpha$,

$$\sin\alpha = \frac{r}{|AO|} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{7}{9} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{9} .$$

Применяя к треугольнику ABC теорему косинусов, получаем

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB||AC|\cos 2\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = (|AB| + |AC|)^2 - 2|AB||AC| \cdot \frac{16}{9} .$$

Отсюда и из (1) имеем $\sqrt{2} = 9\sqrt{2} - \frac{32}{9}|AB||AC| \Rightarrow |AB||AC| = \frac{9\sqrt{2}}{4}$. Теперь и находим площадь S треугольника ABC:

$$S = \frac{1}{2}|AB||AC|\sin 2\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{9} = 1 .$$

Ответ: $S = 1$.

5. Найти все целочисленные решения уравнения

$$14x^4 - 5y^4 - 3x^2y^2 + 82y^2 - 125x^2 + 51 = 0 .$$

Решение

Исходное уравнение можно переписать в виде

$$14x^4 - (3y^2 + 125)x^2 - (5y^4 - 82y^2 - 51) = 0 .$$

Рассмотрим его как квадратное уравнение относительно неизвестного x^2. Дискриминант D левой части уравнения равен

$$D = (3y^2 + 125)^2 + 56(5y^2 - 82y^2 - 51) = 289y^4 - 3842y^2 + 12769 =$$

$$= (17y^2)^2 - 2 \cdot 17y^2 \cdot 113 + 113^2 = (17y^2 - 113)^2 .$$

Следовательно, выражая по формуле корней квадратного уравнения x^2 через y, и затем, применяя правило разложения квадратного трехчлена на множители, левую часть преобразованного уравнения представим в виде

$$14x^4-(3y^2+125)x^2-(5y^4-82y^2-51) = (7x^2-5y^2-3)(2x^2+y^2-17) .$$

Поэтому исходное уравнение сводится к совокупности следующих двух уравнений

$$\left[\begin{array}{ll} 7x^2 = 5y^2 + 3 ; & (1) \\ 2x^2 + y^2 = 17 . & (2) \end{array}\right.$$

Поскольку левая часть уравнения (1) делится нацело на 7 (так как мы ищем $x; y \in Z$) то и $(5y^2+3) \vdots 7$. Однако, представляя y в виде $y = 7q+r$, где q и r — целые числа, причем $0 \leqslant r \leqslant 6$, мы приведем правую часть уравнения (1) к виду $5(7q+r)^2 + 3 = 5(49q^2 + 14qr) + 5r^2 + 3$. Так как $5(49q^2+14qr) = 7(35q^2+10qr) \vdots 7$, то на 7 должно делится выражение $5r^2 + 3$, однако при $r = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6$ оно принимает значения $3 ; 8 ; 23 ; 48 ; 83 ; 128 ; 183$, ни одно из которых не делится на 7. Следовательно, уравнение (1) не имеет целочисленных решений.

Из уравнения (2) непосредственно вытекает, что $2x^2 \leqslant 17$, откуда x может принимать только пять целочисленных значений $0 ; \pm 1 ; \pm 2$. Но при $x = 0$ или ± 1 соответственно $y^2 = 17 ; 15$, что ни при каких целых y не имеет место. Однако при $x = \pm 2$ $y^2 = 9$, откуда мы получаем следующие четыре пары целочисленных решений исходного уравнения

$x = 2, y = 3 ; \ x = 2, y = -3 ; \ x = -2, y = 3 ; \ x = -2, y = -3 .$

Ответ: $x = 2, y = 3 ; \ x = 2, y = -3 ; \ x = -2, y = 3 ; \ x = -2, y = -3 .$

6. Сфера с центром в точке O проходит через вершины A, B и C треугольной пирамиды $ABCD$ и пересекает ребра AD, BD и CD в точках K, L и M соответственно. Известно, что $AD = 10$, $BC : BD = 3 : 2$ и $AB : CD = 4 \cdot \sqrt{3} : 11$. Проекциями точки O на плоскости ABD, BCD и CAD являются середины ребер AB, BC и AC соответственно. Расстояние между серединами ребер AB и CD равно 13. Найти периметр треугольника KLM.

Решение *

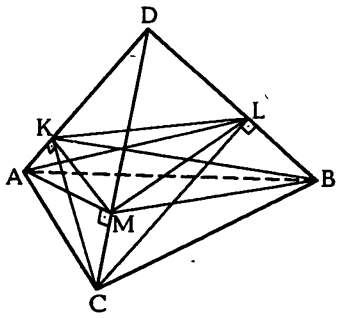


рис. 20

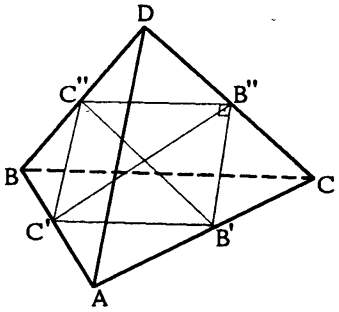


рис. 21 а)

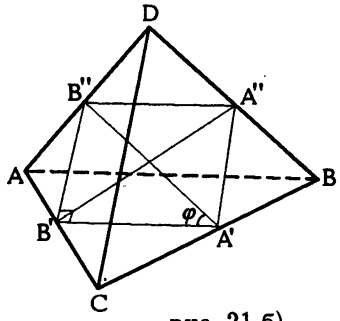


рис. 21 б)

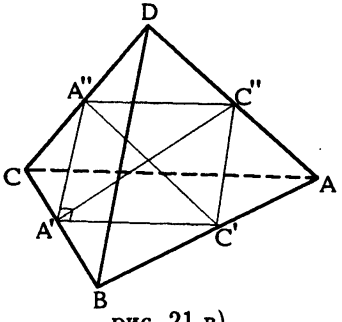


рис. 21 в)

Рассмотрим сечение сферы одной из боковых граней, например, ADC. это будет окружность, описанная около четырехугольника $AKMC$. Из условия, что проекция центра сферы на плоскость ADC лежит на середине ребра AC, следует, что центр окружности, описанной около $AKMC$, лежит на середине AC. Отсюда $CK \perp AD$ и $AM \perp DC$. Аналогично $BM \perp DC$, $CL \perp DB$, $AL \perp DB$, $BK \perp AD$ (см. рис. 20). Таким образом, в силу признака перпендикулярности прямой и плоскости $ALC \perp DB$, $KCB \perp AD$, $AMB \perp DC$. Следовательно, $AD \perp BC$, $AC \perp DB$, $DC \perp AB$.

Пусть B', B'', C', C'' — соответственно середины ребер AC, CD, AB, BD, пирамиды $ABCD$ (см. рис. 21 а)) ;
A', A'', B', B'' — соответственно середины ребер BC, BD, AC, AD, пирамиды $ABCD$ (см. рис. 21 б)) ;
A', A'', C', C'' — соответственно середины ребер BC, CD, AB, AD, пирамиды $ABCD$ (см. рис. 21 в)) .

---

* Идею этого метода решения предложила Т.А. Леонтьева, это решение отличается от приведенного в предыдущем издании книги 1997 г.

Рассмотрим рис. 21 а). В силу свойств средней линии треугольника $B''B' \parallel AD$, $CC' \parallel AD$ (откуда в силу транзитивности свойства параллельности прямых $B''B' \parallel C''C'$) и $|B''B'| = |C''C'| = |AD|/2$, поэтому в силу одного из признаков параллелограмма $B'B''C''C'$ — параллелограмм. Так как $C''B'$ — средняя линия $\triangle BCD$, то $B''C'' \parallel BC$ $|BC| = 2|B''C''|$. Поскольку $AD \perp BC$, $B''B' \parallel AD$ и $B''C'' \parallel BC$, то $B'B'' \perp B''C''$, следовательно, $B'B''C'C''$ — прямоугольник. В силу равенства диагоналей прямоугольника $|B'C''| = |B''C'|$. Из условий задачи $|AD| = 10$ и $|B''C'| = 13$ получаем $|B'B''| = |C'C''| = |AD|/2 = 5$ и $|B'C''| = |B''C'| = 13$. По теореме Пифагора для $\triangle B'B''C''$ получаем $|B''C''| = \sqrt{|B'C''|^2 - |B'B''|^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$, следовательно, $|BC| = 2|B''C''| = 24$. Так как по условию $|BC| : |BD| = 3 : 2$, то $|BD| = 2|BC|/3 = 16$.

Рассматривая рис. 21 б), аналогично (с учетом $AB \perp CD$) получим: $A'B'B''A''$ — прямоугольник, откуда $|A'B''| = |A''B'| = 13$, по условию $|AB| : |CD| = 4 \cdot \sqrt{3} : 11$, откуда

$$\frac{|B'B''|}{|A'B'|} = \frac{|CD|/2}{|AB|/2} = \frac{|CD|}{|AB|} = \frac{11}{4\sqrt{3}} = \operatorname{tg}\varphi\,,\ |A'B'| = |A'B''|\cos\varphi =$$

$$= \frac{13}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi + 1}} = \frac{13}{\sqrt{121/48 + 1}} = \frac{13}{\sqrt{169/48}} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |AB| = 2|A'B'| = 8\sqrt{3} \ \Rightarrow\ |CD| = \frac{11|AB|}{4\sqrt{3}} = \frac{11 \cdot 8\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 22\,.$$

Рассматривая, наконец, рис. 21 в), таким же образом (с учетом $AC \perp BD$) получим: $A'A''C''C'$ — прямоугольник, откуда

$$|A'C''| = |A''C'| = 13\,,\ |A'A''| = \frac{|BD|}{2} = 8\,,$$

$$|A'C'| = \sqrt{|C'A''|^2 - |A'A''|^2} = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{105} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |AC| = 2|A'C'| = 2\sqrt{105}\,.$$

Таким образом, $|BD| = 16$, $|CD| = 22$, $|AC| = 2\sqrt{105}$, $|BC| = 24$, $|AB| = 8\sqrt{3}$, $|AD| = 10$.

Обозначим $\widehat{ADC} = \alpha$, $\widehat{ADB} = \beta$, $\widehat{CDB} = \gamma$. Тогда, используя теорему косинусов для треугольников ADC, ADB, CDB соответственно находим

$$\cos\alpha = \frac{|AD|^2 + |DC|^2 - |AC|^2}{2|AD||DC|} = \frac{41}{110},$$

$$\cos\beta = \frac{|AD|^2 + |BD|^2 - |AB|^2}{2|AD||BD|} = \frac{41}{80},$$

$$\cos\gamma = \frac{|CD|^2 + |DB|^2 - |BC|^2}{2|CD||BD|} = \frac{41}{176}.$$

Для вычисления периметра треугольника KLM найдем длины каждой из его сторон. Из прямоугольных треугольников DKC и DMA (см. рис. 20) вытекает, что

$$\frac{|KD|}{|DC|} = \frac{|MD|}{|AD|} = \cos\alpha,$$

а так как у треугольников DKM и DAC $\angle ADC$ общий, то $\triangle DKM \sim \triangle DAC$. Следовательно,

$$\frac{|KD|}{|DC|} = \frac{|MD|}{|AD|} = \frac{|KM|}{|AC|} = \cos\alpha,$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$\frac{|KL|}{|AB|} = \cos\beta \quad , \quad \frac{|LM|}{|BC|} = \cos\gamma.$$

Таким образом,

$$|KM| = |AC|\cos\alpha = 41 \cdot \frac{2\sqrt{105}}{110} \quad , \quad |KL| = |AB|\cos\beta = 41 \cdot \frac{\sqrt{3}}{10} \quad ,$$

$$|LM| = |BC|\cos\gamma = 41 \cdot \frac{3}{22} \Rightarrow \text{ответ}.$$

Ответ: $P = 41 \cdot \left(\frac{2\sqrt{105}}{110} + \frac{\sqrt{3}}{10} + \frac{3}{22}\right)$.

3.1.12. Вариант для самостоятельного решения 1996 г. (апрель)

1. Решить неравенство $\sqrt{(7x+1)^2-(7x+1)^4}+4\cdot(7x+1)^2>0$

2. Решить уравнение $\log_{x+6}(x+3)^2=\log_{\frac{x}{3}+\frac{7}{3}}(x+3)^2$.

3. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{9}{2}\cos 2x-12\cos x+\frac{17}{2}}=\frac{15}{4}-3\sin^2 x-4\cos x\ .$$

4. Через центр O вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, параллельная стороне BC и пересекающая стороны AB и AC соответственно в точках M и N . Периметр треугольника AMN равен $\sqrt[4]{675}$, длина стороны BC равна $\sqrt[4]{27}$, площадь треугольника ABC равна $\sqrt{3}$. Найти отношение длины отрезка AO к радиусу вписанной в треугольник ABC окружности.

5. Найти все целочисленные решения уравнения

$$15x^4-6y^4-13x^2y^2+70y^2-89x^2+104=0\ .$$

6. Сфера с центром точке O проходит через вершины K , L и M треугольной пирамиды $KLMN$ и пересекает прямые KN , LN и MN в точках A , B и C соответственно. Известно, что $LM=14$, $KL=2\sqrt{30}$ и $LN:KM=11:3$. Проекциями точки O на плоскости KLN , LMN и KMN являются середины ребер KL , LM и KM соответственно. Расстояние между серединами ребер LN и KM равно $\sqrt{130}$. Найти периметр треугольника ABC .

3.1.13. Вариант с решениями задач 1996 г. (июль)

1. Числа a , b , c и d являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что $a+d=10$, $a\cdot d=7$. Найти b^3+c^3 .

Решение

Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии, тогда
$b=aq$, $c=aq^2$, $d=aq^3$ $\Rightarrow$ $a+d=a(1+q^3)$, $ad=a^2q^3$,
$b^3+c^3=a^3q^3+a^3q^6=a^2q^3(a+aq^3)=ad(a+d)=10\cdot 7=70$.

Ответ: 70 .

2. Первый раствор содержит 20% азотной кислоты и 80% воды, второй — 60% азотной кислоты и 40% воды. Первая смесь была получена из 15 литров первого раствора и некоторого количества второго раствора. Смешав то же самое количество второго раствора с 5 литрами первого раствора получили вторую смесь. Сколько литров второго раствора было использовано для приготовления первой смеси, если известно, что процентное содержание воды во второй смеси в два раза больше процентного содержания кислоты в первой смеси ?

Решение

Пусть x — искомое каличество второго раствора. По смыслу задачи $x>0$. Тогда из условий задачи непосредственно вытекает

$$2\cdot\frac{0,2\cdot 15+0,6\cdot x}{15+x}=\frac{0,8\cdot 5+0,4\cdot x}{5+x} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (6+1,2x)(x+5)=(4+0,4x)(x+15)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 1,2x^2+12x+30=0,4x^2+10x+60\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 0,8x^2+2x-30=0\ \Leftrightarrow\ 2x^2+5x-75=0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-5-\sqrt{25+600}}{4}=-7,5\ ; \\ x=\dfrac{-5+\sqrt{25+600}}{4}=5\quad . \end{array}\right.$$

По смыслу задачи подходит только $x=5$ $\Rightarrow$ ответ.

Ответ: 5 литров .

3. При всех значениях параметра a решить уравнение

$$25^x - (a-1)5^x + 2a + 3 = 0\,,$$

и указать при каких a оно имеет единственное решение.

Решение

Положим $y = 5^x \Rightarrow y > 0$. Тогда уравнение примет вид

$$y^2 - (a-1)y + 2a + 3 = 0\,.$$

Дискриминант D левой части уравнения имеет вид

$$D = (a-1)^2 - 8a - 12 = a^2 - 10a - 11\,.$$

$D = 0$ при $a = -1$ и $a = 11$ $\quad D > 0$ при $\forall a \in (-\infty, -1) \cup (11, +\infty)$.

Если $a = -1$, то уравнение принимает вид $y^2 + 2y + 1 = 0$ или $(y+1)^2 = 0$, откуда $y = -1$, что не удовлетворяет условию $y > 0$, следовательно, при $a = -1$ решений нет.

Если $a = 11$, то уравнение принимает вид $y^2 - 10y + 25 = 0$ или $(y-5)^2 = 0$, откуда $y = 5$, откуда $5^x = 5 \Rightarrow x = 1$ — единственное решение исходного уравнения.

Если $a \in (-\infty, -1) \cup (11, +\infty)$, то решения уравнения имеют вид

$$y = y_1 = \frac{a - 1 - \sqrt{a^2 - 10a - 11}}{2}\,, \quad y = y_2 = \frac{a - 1 + \sqrt{a^2 - 10a - 11}}{2}\,.$$

Для ответа на вопросы задачи необходимо исследовать, при каких значениях параметра a $\quad y_1 > 0$ и $y_2 > 0$. Так как $y_2 > y_1$, то из $y_1 > 0 \Rightarrow y_2 > 0$. Решим неравенства:

$$\sqrt{a^2 - 10a - 11} > 1 - a \Leftrightarrow y_2 > 0 \quad \text{и} \quad \sqrt{a^2 - 10a - 11} < a - 1 \Leftrightarrow y_1 > 0\,.$$

$$\sqrt{a^2 - 10a - 11} > 1 - a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} a^2 - 10a - 11 \geqslant 0\,; \\ 1 - a < 0\,, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a^2 - 10a - 11 > (1-a)^2\,, \\ 1 - a \geqslant 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a \geqslant 11\,; \\ a \leqslant -1\,, \end{array}\right. \\ a > 1\,; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a < -\dfrac{3}{2}\,, \\ a \leqslant 1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < -\dfrac{3}{2}\,; \\ a \geqslant 11\,, \end{array}\right.$$

откуда с учетом $a \in (-\infty, -1) \cup (11, +\infty)$ получаем,
$y_2 > 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty, -3/2) \cup (11, +\infty)$.

$$\sqrt{a^2-10a-11} < a-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant a^2-10a-11 < (a-1)^2\,, \\ a-1>0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a \geqslant 11\,; \\ a \leqslant -1\,, \end{array}\right. \\ a > -\dfrac{3}{2}\,, \\ a > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow a \geqslant 11\,,$$

откуда с учетом $a \in (-\infty,-1) \cup (11,+\infty)$ получаем,
$y_1 > 0 \Leftrightarrow a \in (11,+\infty)$.

Из решений этих неравенств и получается ответ.

Ответ: $x = \log_5 \frac{a-1+\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$ при $a < -1,5$;
решений нет при $-1,5 \leqslant a < 11$; $x = 1$ при $a = 11$;
$x = \log_5 \frac{a-1\pm\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$ при $a > 11$;
единственное решение при $a < -1,5$ и $a = 11$.

4. Решить неравенство $\arccos(3x) + \arcsin(x+1) \leqslant \dfrac{7\pi}{6}$.

Решение

$\arccos(y)$ и $\arcsin(y)$ определены только при $|y| \leqslant 1$, поэтому допустимыми значениями x в неравенстве являются $-1/3 \leqslant x \leqslant 0$. Перепишем неравенство в виде

$$\arcsin(x+1) \leqslant \frac{7\pi}{6} - \arccos(3x)\,. \qquad (1)$$

В силу возрастания арксинуса и убывания арккосинуса (которые вытекают из соответствующих участков монотонности функций синус и косинус соответственно) и того, что $-\pi/2 \leqslant \arcsin(y) \leqslant \pi/2$ и $0 \leqslant \arccos(y) \leqslant \pi$ получаем, что при $-1/3 \leqslant x \leqslant 0$

$$\arcsin\left(\frac{2}{3}\right) \leqslant \arcsin(x+1) \leqslant \frac{\pi}{2} \quad , \quad \frac{\pi}{6} \leqslant \frac{7\pi}{6} - \arccos(3x) \leqslant \frac{2\pi}{3}\,.$$

Таким образом, при решении неравенства удобно рассмотреть два случая:

1) $$\begin{cases} -\dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant 0\,, \\ \arccos(3x) < \dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} < x \leqslant 0$$

(в этом случае правая часть неравенства (1) больше $\pi/2$ и потому оно выполняется) и

2) $$\begin{cases} -\dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant 0\,, \\ \arccos(3x) \geqslant \dfrac{2\pi}{3}\,, \\ \sin(\arcsin(x+1)) \leqslant \sin\left(\dfrac{7\pi}{6} - \arccos(3x)\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant -\dfrac{1}{6}\,, \\ 5x+2 \leqslant \sqrt{3}\cdot\sqrt{1-9x^2} \end{cases}$$

В последнем равносильном переходе подробнее остановимся на преобразовании

$$\sin(\arcsin(x+1)) \leqslant \sin\left(\frac{7\pi}{6} - \arccos(3x)\right) \Leftrightarrow 5x+2 \leqslant \sqrt{3}\cdot\sqrt{1-9x^2}\,.$$

$$\sin(\arcsin(x+1)) \leqslant \sin\left(\frac{7\pi}{6} - \arccos(3x)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1 \leqslant \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\cdot\cos(\arccos(3x)) - \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\cdot\sin(\arccos(3x)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1 \leqslant \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{1-(3x)^2} \Leftrightarrow 5x+2 \leqslant \sqrt{3}\cdot\sqrt{1-9x^2}\,.$$

При этом были использованы формулы синуса разности двух аргументов, значения синуса и косинуса аргумента $7\pi/6$ и формулы

$$\sin(\arcsin(y)) = y\,, \cos(\arccos(y)) = y\,, \sin(\arccos(y)) = \sqrt{1-y^2}\,.$$

$$5x+2 \leqslant \sqrt{3}\cdot\sqrt{1-9x^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-9x^2 \geqslant 0\,, \\ 5x+2 < 0\,; \end{cases} \\ \begin{cases} (5x+2)^2 \leqslant 3(1-9x^2)\,, \\ 5x+2 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{3}\,, \\ x < -\dfrac{2}{5}\,; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \geqslant -\dfrac{2}{5}\,, \\ 52x^2 + 20x + 1 \leqslant 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{-10 - \sqrt{100 - 52}}{52} \leqslant x \leqslant \dfrac{-10 + \sqrt{100 - 52}}{52}\,, \\ x \geqslant -\dfrac{2}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{-5 - 2\sqrt{3}}{26} \leqslant x \leqslant \dfrac{-5 + 2\sqrt{3}}{26}\,, \\ x \geqslant -\dfrac{2}{5}\,. \end{array}\right.$$

Теперь учтем условие $-1/3 \leqslant x \leqslant -1/6$ и то, что $-2/5 < -1/3$. Сравним числа

$$-\frac{1}{3} \vee -\frac{5 + 2\sqrt{3}}{26} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5 + 2\sqrt{3}}{26} \vee \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 15 + 6\sqrt{3} \vee 26 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{36 \cdot 3} \vee 11 = \sqrt{121}\,, \qquad 108 < 121 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{3} < -\frac{5 + 2\sqrt{3}}{26} \quad ;$$

$$-\frac{1}{6} \vee -\frac{5 + 2\sqrt{3}}{26} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5 + 2\sqrt{3}}{26} \vee \frac{1}{6} \quad \Leftrightarrow \quad 30 + 12\sqrt{3} \vee 26\,,$$

$$30 + 12\sqrt{3} > 26 \quad \Rightarrow \quad -\frac{5 + 2\sqrt{3}}{26} < -\frac{1}{6} \quad ;$$

$$-\frac{1}{6} \vee \frac{-5 + 2\sqrt{3}}{26} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\sqrt{3} - 5}{26} \vee \frac{1}{6} \quad \Leftrightarrow \quad 12\sqrt{3} - 30 \vee 26 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 12\sqrt{3} \vee 56 \quad \Leftrightarrow \quad 3\sqrt{3} \vee 7 \quad \Leftrightarrow \quad 27 \vee 49\,, \qquad 27 < 49 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{6} < \frac{-5 + 2\sqrt{3}}{26} < \frac{-5 + 2 \cdot 2}{26} = -\frac{1}{26} < 0 \quad ,$$

и поэтому в случае 2) решениями неравенства будут

$$-\frac{5 + 2\sqrt{3}}{26} \leqslant x \leqslant -\frac{1}{6}\,.$$

Объединяя эти решения с решениями, полученными в случае 1), получаем окончательный ответ.

Ответ: $-\dfrac{5 + 2\sqrt{3}}{26} \leqslant x \leqslant 0\,.$

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2-14x-10y+58=0\,, \\ \sqrt{x^2+y^2-16x-12y+100}+\sqrt{x^2+y^2+4x-20y+104}=2\sqrt{29}\,. \end{cases}$$

Решение *

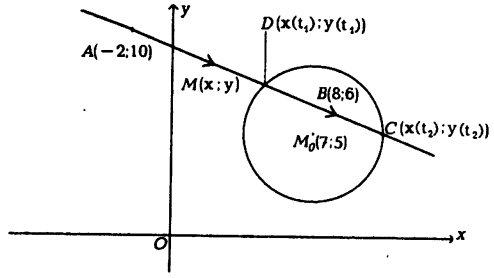


рис. 22

Производя операцию выделения полного квадрата в левых частях уравнений системы, перепишем ее в виде

$$\begin{cases} (x-7)^2+(y-5)^2=16\,, & (1) \\ \sqrt{(x-8)^2+(y-6)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y-10)^2}=\sqrt{10^2+4^2}\,. & (2) \end{cases}$$

Отсюда следует, что точка с координатами $(x;y)$ (искомое решение), во-первых лежит на окружности радиуса 4 с центром в точке $(7;5)$ и, во-вторых, лежит на отрезке, соединяющем точки $(8;6)$ и $(-2;10)$, поскольку фигурирующее в левой части второго уравнения системы выражение есть сумма расстояний от точки $(x;y)$ до точек с координатами $(8;6)$ и $(-2;10)$, а $\sqrt{10^2+4^2}=\sqrt{(8-(-2))^2+(6-10)^2}$ — как раз и есть расстояние между этими точками.

Точка $M(x;y)$ принадлежит прямой (AB) тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AB}$ коллинеарны $(\overrightarrow{AM}\parallel\overrightarrow{AB})$, это означает, существование действительного числа t, такого, что $\overrightarrow{AM}=t\cdot\overrightarrow{AB}$; при этом точка $M(x;y)$ принадлежит *отрезку* AB тогда и только тогда, когда $0\leqslant t\leqslant 1$. Пусть A — $A(x_1;y_1)$, B — $B(x_2;y_2)$, координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ — $\{x_2-x_1;y_2-y_1\}$, координаты вектора $\overrightarrow{AM}$ — $\{x-x_1;y-y_1\}$. Равенство

$$\overrightarrow{AM}=t\cdot\overrightarrow{AB}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x-x_1=t(x_2-x_1)\,, \\ y-y_1=t(y_2-y_1) \end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x=x_1+t(x_2-x_1)\,, \\ y=y_1+t(y_2-y_1)\,. \end{cases} \quad (3)$$

* Идею этого метода решения предложил Д.Ю. Сычугов, это решение отличается от приведенного в предыдущем издании книги 1997 г.

Точка $M(x;y)$ принадлежит *отрезку* AB $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1)\,, \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1)\,, \\ 0 \leqslant t \leqslant 1\,. \end{cases}$ (4)

Поскольку $x_1 = -2$, $y_1 = 10$, $x_2 = 8$, $y_2 = 6$, то система (4) примет вид

$$\begin{cases} x = -2 + 10t\,, \\ y = 10 - 4t\,, \\ 0 \leqslant t \leqslant 1\,. \end{cases} \qquad (5)$$

Остается подставить значения $(x;y)$ из (5) в (1), получим
$(-2 + 10t - 7)^2 + (10 - 4t - 5)^2 = 16 \Leftrightarrow (10t - 9)^2 + (4t - 5)^2 = 16 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 116t^2 - 220t + 90 = 0 \Leftrightarrow 58t^2 - 110t + 45 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = t_1 = \dfrac{55 - \sqrt{55^2 - 58 \cdot 45}}{58} = \dfrac{55 - \sqrt{3025 - 2610}}{58} = \dfrac{55 - \sqrt{415}}{58}\,; \\ t = t_2 = \dfrac{55 + \sqrt{55^2 - 58 \cdot 45}}{58} = \dfrac{55 + \sqrt{3025 - 2610}}{58} = \dfrac{55 + \sqrt{415}}{58}\,. \end{array}\right.$$

$20 = \sqrt{400} < \sqrt{415} < \sqrt{441} = 21 \Leftrightarrow -21 < -\sqrt{415} < -20 \Rightarrow$
$\Rightarrow 58 < 75 < 55 + \sqrt{415} < 76$, $0 < 34 < 55 - \sqrt{415} < 35 < 58 \Rightarrow t = t_2 > 1$
и потому $t = t_2$ не подходит, а $t = t_1 \in (0,1)$, поэтому $t = t_1$ подходит, следовательно, соответствующая пара значений

$$\begin{cases} x = x(t_1) = -2 + \dfrac{10(55 - \sqrt{415})}{58} = -2 + \dfrac{5(55 - \sqrt{415})}{29} = \dfrac{217 - 5\sqrt{415}}{29}\,, \\ y = y(t_1) = 10 - \dfrac{4(55 - \sqrt{415})}{58} = 10 - \dfrac{2(55 - \sqrt{415})}{29} = \dfrac{180 + 2\sqrt{415}}{29}\,. \end{cases}$$

(координаты точки D на рис. 22) и является решением исходной системы уравнений.

Ответ: $x = \dfrac{217 - 5\sqrt{415}}{29}$, $y = \dfrac{180 + 2\sqrt{415}}{29}$.

6. Две окружности пересекаются в точках A и B . Хорда CD первой окружности имеет с хордой EF второй окружности общую точку M . Длина отрезка AB в три раза больше длины отрезка CM , которая, в свою очередь, в два раза меньше длины отрезка MD и в шесть раз меньше длины отрезка MF . Какие значения может принимать длина отрезка AM , если известно, что длина отрезка BM равна 2 , а длина отрезка AB в девять раз больше длины отрезка EM ?

Решение *

Обозначим центр первой окружности, где проведена хорда FE, за O_1, ее радиус — за R_1, а центр второй окружности, где проведена хорда CD, за O_2, а радиус — за R_2.

Вначале отметим, что так как хорда окружности определяется как отрезок с концами в двух *различных* точках этой окружности, то точки C и D различны и точки E и F различны. Пересекающиеся окружности по определению имеют две различные общие точки, поэтому точки A и B различны. Покажем, что из условий задачи следует, что M — внутренняя точка хорд CD и EF, откуда сразу будет следовать, что точка M отлична как от точки A, так и от точки B.

Если предположить, что точка M совпадает с одним из концов, например, с F хорды EF, то MF нулевой отрезок, тогда $|AB| = 3|CM| = 3|MF|/6 = |MF|/2 = 0$, пришли к противоречию с тем, что точки A и B различны ; если $M \equiv E$, то $|AB| = 9|EM| = 0$, опять противоречие с $A \not\equiv B$; если $M \equiv C$, то $|AB| = 3|CM| = 0$, снова противоречие с $A \not\equiv B$; если $M \equiv D$, то $|AB| = 3|CM| = 3|MD|/2 = 0$, также противоречие с $A \not\equiv B$. Поскольку M — внутренняя точка хорд CD и EF, то в силу доказанного утверждения $|O_1M| < R_1$ и $|O_2M| < R_2$, а потому точка M отлична от точки A — одной из общих точек окружностей ($|O_1A| = R_1$ и $|O_2A| = R_2$), $M \not\equiv B$ следует аналогичным образом, а также из того, что $|BM| = 2 \neq 0$.

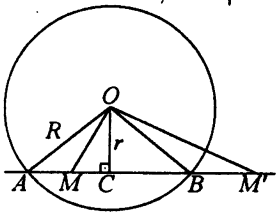


рис. 23 а)

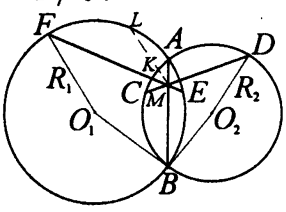


рис. 23 б)

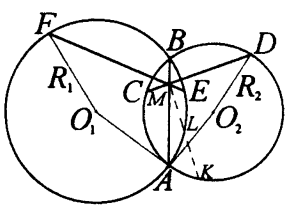


рис. 23 в)

Справедливо утверждение, которое нам понадобится при решении задачи.

Пусть AB — секущая окружности с центром в точке O радиуса R, где A и B — точки окружности, тогда точка M этой прямой является внутренней точкой отрезка AB (то есть она лежит между точками A и B) тогда и только тогда, когда $\rho(O; M) < R$, и точка M' этой прямой является внешней точкой отрезка AB (то есть она не лежит между точками A и B) тогда и только тогда, когда $\rho(O; M') > R$ (см. рис. 23 а).

* Идея этого метода решения была предложена абитуриентами, оно более простое, чем приведенное в предыдущем издании данной книги 1997 г.

Это утверждение доказано ниже, в разделе IV, п. 2.3.1., где излагаются ответы на вопросы билетов устного экзамена по геометрии (см. материал вопроса 15, утверждение 5).

Положим $|EM| = x$, тогда из условий задачи вытекает, что $|AB| = 9x$, $|CM| = 3x$, $|MD| = 6x$, $|FM| = 18x$.

Проведем через точки B и M прямую. Так как M — внутренняя точка хорд CD и EF , то в силу сформулированного выше утверждения M — внутренняя точка каждой из окружностей $(O_1; R_1)$ и $(O_2; R_2)$. Следовательно, $\rho(O_1; R_1) \leqslant |O_1M| < R_1$ и $\rho(O_2; R_2) \leqslant |O_2M| < R_2$. В силу теоремы о взаимном расположении окружности и прямой (см. там же, где только что было упомянуто утверждение 5, утверждение 3) прямая (BM) будет пересекать каждую из окружностей еще в одной точке, окружность $(O_1; R_1)$ — в точке L , а окружность $(O_2; R_2)$ — в точке K (см. рис. 23 б) и в). Снова, применяя сформулированное выше утверждение, получим, что точка M — внутренняя точка каждой из хорд BK и BL . Следовательно, точка M лежит между точками B и L и она лежит между точками B и K, а потому точки K и L *лежат на одном луче* прямой (BM) с началом в точке M .

В силу теоремы о равенстве отрезков пересекающихся хорд окружности, с учетом условия $|BM| = 2$ имеем:

$$\begin{cases} |CM| \cdot |MD| = |BM| \cdot |ML| , \\ |FM| \cdot |ME| = |BM| \cdot |MK| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \cdot 6x = 2 \cdot |ML| , \\ 18x \cdot x = 2 \cdot |MK| \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow |LM| = |KM| = 9x^2$.

Таким образом, точки L и K совпадают. Это означает, что каждая из них является общей точкой окружностей $(O_1; R_1)$ и $(O_2; R_2)$. Поскольку L и K отличны от точки B , а две пересекающиеся окружности имеют *две и только две общие точки* (об этом см. ниже, в разделе IV, п. 2.3.1. вопрос 21, теоремы 7), то точки K и L также совпадают с точкой A , а потому M — внутренняя точка хорды AB . Следовательно, $|AM| = |LM| = |KM| = 9x^2$, $|AB| = |AM| + |MB|$, поэтому получаем уравнение $9x = 9x^2 + 2 \Leftrightarrow 9x^2 - 9x + 2 = 0$. Решая это уравнение, находим, что $x = 1/3$ и $x = 2/3$, а потому возможны два значения для $|AM|$: $|AM| = 1$ и $|AM| = 4$. Первый из этих случаев проиллюстрирован на рис. 23 б), второй — на рис. 23 в). По сути дела каждый из них получается из другого переменой местами точек A и B .

Ответ: $|AM| = 1$; $|AM| = 4$.

3.1.14. Вариант для самостоятельного решения 1996 г. (июль)

1. Числа p, q, r и s являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что $q^3 + r^3 = 288$, $p \cdot s = 24$. Найти $p + s$.

2. Первый раствор содержит 70% соляной кислоты и 30% воды, второй — 30% соляной кислоты и 70% воды. Первая смесь была получена из 6 литров первого раствора и некоторого количества второго раствора. Смешав то же самое количество второго раствора с 18 литрами первого раствора получили вторую смесь. Сколько литров второго раствора было использовано для приготовления первой смеси, если известно, что процентное содержание кислоты в первой смеси на 10% больше процентного содержания воды во второй смеси ?

3. При всех значениях параметра a решить уравнение

$$9^x + (a+2)3^x + \frac{a}{2} + 3 = 0$$

и указать при каких a оно имеет единственное решение.

4. Решить неравенство $\arccos(2x) + \arccos(1-x) > \arccos\frac{1}{3}$.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 14y - 14 = 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 18x + 4y + 85} + \sqrt{x^2 + y^2 + 6x - 12y + 45} = 4\sqrt{13}. \end{cases}$$

6. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Хорды NM первой окружности и KL второй окружности имеют общую точку O. Длина отрезка PQ в пять раз больше длины отрезка OL. Длина отрезка OK в два раза больше длины отрезка MO, которая в свою очередь, в два раза больше длины отрезка OL. Какие значения может принимать длина отрезка PO, если известно, что длина отрезка QO равна 4, а длины отрезков MO и ON равны ?

3.2. Экономический факультет МГУ

3.2.1. Вариант с решениями задач 1993 г.

1. Решить неравенство

$$\log_{7^x-6} 25 < 2 \ .$$

Решение

Поделим обе части неравенства на 2, получим $\log_{7^x-6} 5 < 1$. При $7^x - 6 > 1$, будем иметь $5 < 7^x - 6$, то есть $x > \log_7 11$. Если же $0 < 7^x - 6 < 1$, то $5 > 7^x - 6$, и, следовательно, $\log_7 6 < x < 1$.

Ответ: $\log_7 6 < x < 1 \ ; \ x > \log_7 11 \ .$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} = 1 \ .$$

Решение

Сделаем замену: $y = x - \frac{\pi}{6}$. Тогда $\sin 3x = \sin\left(3y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 3y$. Исходное уравнение равносильно уравнению $\cos 3y - \cos y = 0$ при условии $\cos y \neq 0$. Преобразуем $\cos 3y - \cos y = -2\sin 2y \cdot \sin y = -4\sin^2 y \cdot \cos y$ и, учитывая, что $\cos y \neq 0$, получаем $\sin y = 0 \Leftrightarrow y = \pi n$, $\forall n \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \pi n \ , \ \forall n \in Z \ .$

3. Решить неравенство

$$3\sqrt{x+2} \leqslant 6 - |\, x - 2 \,| \ .$$

Решение

На промежутке $x \geqslant 2$ неравенство принимает вид

$$3\sqrt{x+2} \leqslant 8 - x \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 8 \ , \\ (x-23)(x-2) \geqslant 0 \end{cases}$$

и имеет единственное решение $x = 2$. Если же $x < 2$, то

$$3\sqrt{x+2} \leqslant x + 4 \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geqslant 0 \ , \\ (x+1)(x-2) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant -1 \ .$$

Ответ: $-2 \leqslant x \leqslant -1 \ ; \ x = 2 \ .$

4. Найти периметр плоской фигуры, заданной на координатной плоскости условиями

$$\begin{cases} 2\,|\,x+2\,|\,\arcsin((y-1)^2) \leqslant \pi(x+2)\,, \\ 2\,|\,y-1\,|\,-x \geqslant 0\,. \end{cases}$$

Решение

Первое неравенство при $x+2<0$ принимает вид $\arcsin((y-1)^2) \leqslant -\frac{\pi}{2}$ и решений не имеет, а при $x+2 \geqslant 0$ оно равносильно неравенству $|\,y-1\,| \leqslant 1$. Таким образом, заданная плоская фигура определяется условиями:

$$\begin{cases} x \geqslant -2\,, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\,, \\ x \leqslant 2\,|\,y-1\,|\,. \end{cases}$$

Изобразим ее на чертеже:

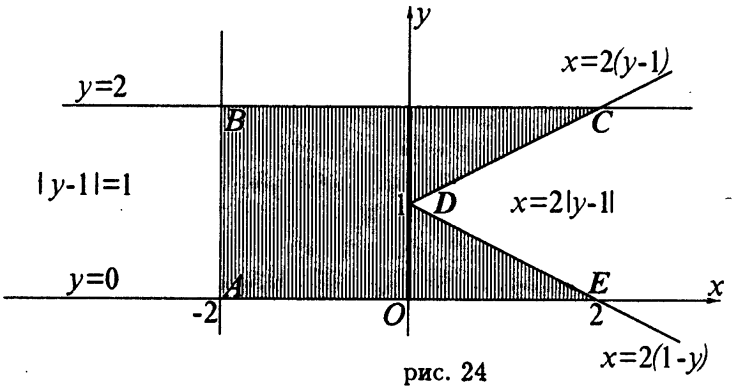


рис. 24

Периметр равен $AB+BC+CD+DE+EA = 10+2\sqrt{5}$.

Ответ: $10+2\sqrt{5}$.

5. За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5 % в месяц, затем $11\frac{1}{9}$ %, потом $7\frac{1}{7}$ % и, наконец, 12 % в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на 180 %. Определить срок хранения вклада.

Решение

Пусть S — первоначальная сумма вклада, а t_1, t_2, t_3, t_4 — сроки действия (в месяцах) процентных ставок $p_1 = 5\,\%$, $p_2 = 11\frac{1}{9}\,\%$, $p_3 = 7\frac{1}{7}\,\%$, $p_4 = 12\,\%$ ежемесячного прироста вклада. Тогда условие увеличения суммы вклада по истечении общего срока хранения на $p = 180\,\%$ можно представить в виде:

$$S\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^{t_1}\left(1+\frac{p_2}{100}\right)^{t_2}\left(1+\frac{p_3}{100}\right)^{t_3}\left(1+\frac{p_4}{100}\right)^{t_4} = S\left(1+\frac{p}{100}\right).$$

Сократим обе части на S, подставим конкретные значения p_1, p_2, p_3, p_4, p и преобразуем полученное равенство к виду

$$2^{-2t_1+t_2-t_3+2t_4-1}\cdot 3^{t_1-2t_2+t_3}\cdot 5^{-t_1+t_2+t_3-2t_4+1}\cdot 7^{t_1-t_3+t_4-1} = 1.$$

Последнее может выполняться лишь в том случае, когда в левой части показатели всех степеней обращаются в 0. Соответствующая система линейных уравнений имеет единственное решение $t_1 = 2, t_2 = 3,$
$t_3 = 4, t_4 = 3$. Остается вычислить искомую сумму $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 12$.

Ответ: 12 месяцев .

6. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12 и 13. Найти площадь треугольника.

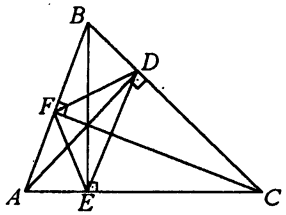


рис. 25

Решение

Пусть D, E, F – основания высот треугольника ABC, проведенных к сторонам BC, AC, AB . Треугольники AEF и ABC подобны, так как имеют общий угол A, заключенный между пропорциональными сторонами:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \cos A = k_A\ , \qquad (1)$$

а соответствующий коэффициент подобия равен $k_A = \cos A$. Аналогично устанавливается подобие треугольников DBF и ABC с коэффициентом $k_B = \cos B$ и подобие треугольников DEC и ABC с коэффициентом $k_C = \cos C$. Обозначим площади треугольников ABC и DEF через S и s соответственно. Тогда с учетом соотношения площадей подобных фигур имеем:

$$s = S(1 - k_A^2 - k_B^2 - k_C^2) \, . \tag{2}$$

Покажем, что имеют место равенства

$$\widehat{FDE} = \pi - 2\hat{A} \, , \; \widehat{DFE} = \pi - 2\hat{C} \, , \; \widehat{FED} = \pi - 2\hat{B} \, . \tag{3}$$

Из подобия треугольников BDF и ABC и того, что

$$\frac{BD}{AB} = \frac{BF}{BC} = \cos B = k_B \, , \tag{4}$$

вытекает $\widehat{BDF} = \hat{A}$ и аналогично из подобия треугольников CDE и ABC и того, что

$$\frac{CD}{AC} = \frac{CE}{BC} = \cos C = k_C \, , \tag{5}$$

вытекает $\widehat{CDE} = \hat{A}$. Таким образом

$$\hat{A} = \widehat{CDE} = \widehat{BDF} = \frac{\pi - \widehat{FDE}}{2} \, ,$$

откуда и следует первое из равенств (3). Остальные равенства (3) устанавливаются аналогично.

Применяя тригонометрические формулы двойного аргумента и приведения:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \, , \; \cos(\pi - x) = -\cos x \, ,$$

преобразуем (2) к виду

$$2s = S(\cos D + \cos E + \cos F - 1) \, . \tag{6}$$

По условию $DE = 13, EF = 12, FD = 5$, следовательно, треугольник DEF является прямоугольным, его площадь $s = 30$ и

$$\cos D = \frac{5}{13} \, , \cos E = \frac{12}{13} \, , \cos F = 0 \, .$$

Подставляя найденные значения в (2), получим $S = 195$.

Ответ: 195 .

1. Решить неравенство

$$\log_{3x-2} 16 \ < \ 4 \ .$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)} = 1 \ .$$

3. Решить неравенство

$$12 \ - 4\sqrt{x+1} \ \geqslant | \, x-8 \, | \, .$$

4. Найти периметр плоской фигуры, заданной на координатной плоскости условиями

$$\begin{cases} | \, x-3 \, | \arccos((y-1)^2) \ \leqslant \ \pi(3-x) \ , \\ \quad 3 \, | \, y-1 \, | + x \ \geqslant \ 0 \ . \end{cases}$$

5. Техническая реконструкция предприятия была проведена в четыре этапа. Каждый из этапов продолжался целое число месяцев и сопровождался падением производства. Ежемесячное падение производства составило на первом этапе 4 %, на втором — $6\frac{2}{3}$ % , на третьем — $6\frac{1}{4}$ % и на четвертом — $14\frac{2}{7}$ % в месяц. По окончании реконструкции первоначальный объем производства на предприятии сократился на 37 %. Определить продолжительность периода реконструкции.

6. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12 и 13. Найти радиус описанной около треугольника окружности.

3.2.3. Вариант с решениями задач 1994 г.

1. Найти все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 7875x^3 = 1701y^3 , \\ |x| \leqslant 5 . \end{cases}$$

Ответ: $(-3;-5)$; $(0;0)$; $(3;5)$.

Решение. $7875 = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 = 5^3 \cdot 63$, $1701 = 3^5 \cdot 7 = 3^3 \cdot 63$, поэтому после сокращения на 63 уравнение примет вид $(5x)^3 = (3y)^3 \Leftrightarrow 5x = 3y$. Отсюда с учетом имеющегося ограничения на x получаем ровно три целочисленные пары: $(-3;-5)$; $(0;0)$; $(3;5)$.

2. Найти область значений функции

$$y = -\sqrt{-3x^2 + 12x - 3} .$$

Ответ: $-3 \leqslant y \leqslant 0$.

Решение. Областью значений квадратичной функции $f(x) = -3x^2 + 12x - 3 = -3(x-2)^2 + 9$ является промежуток $(-\infty, 9]$.

Фиксируем произвольное $-y_0$ из промежутка $[-3, 0]$, откуда $y_0 \in [0, 3]$. Уравнение $-\sqrt{f(x)} = -y_0 \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} = y_0 \Leftrightarrow f(x) = y_0^2$, $0 \leqslant y_0^2 \leqslant 9$. $\exists\, x_0 \in R$ такое, что $f(x_0) = y_0^2 \Rightarrow \sqrt{f(x_0)} = y_0$. Поэтому так как $0 \leqslant \sqrt{f(x)} \leqslant 3$ при тех x, когда $f(x) \geqslant 0$, то функция $y = -\sqrt{f(x)}$ не может принимать значения вне отрезка $[-3, 0]$.

3. Решить уравнение

$$\log_3((x+10) \cdot \cos x) = \log_3 \left(\frac{x+10}{\cos x} \right) .$$

Ответ: $x = 2\pi n$, $\forall n \in Z$: $n \geqslant -1$; $x = \pi + 2\pi m$, $\forall m \in Z$: $m \leqslant -3$.

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos^2 x = 1 , \\ (x+10) \cdot \cos x > 0 . \end{cases}$$

Если $\cos x = 1$, то $x > -10$, следовательно, $x = 2\pi n$, $\forall n \in Z$: $n \geqslant -1$. Если же $\cos x = -1$, то $x < -10$, то есть $x = \pi + 2\pi m$, $\forall m \in Z$: $m \leqslant -3$.

4. Составить уравнение окружности наименьшего радиуса, внутри которой помещается множество, заданное на координатной плоскости условием

$$|2y + 3x - 2| + |3x + 6| \ < \ 6 \, .$$

Ответ: $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 13$.

Решение. Покажем, что заданное множество состоит из внутренних точек параллелограмма $ABCD$ (см. рис. 26).

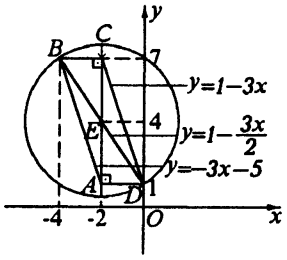


рис. 26

Для этого необходимо раскрыть оба модуля в левой части неравенства. Это в свою очередь сводится к рассмотрению следующих четырех случаев.

Случай 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geqslant -2 \, , \\ 2y \geqslant 2 - 3x \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geqslant -2 \, , \\ y \geqslant 1 - 3x/2 \, , \\ 2y + 3x - 2 + 3x + 6 < 6 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geqslant -2 \, , \\ 1 - 3x/2 \leqslant y < 1 - 3x \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geqslant -2 \, , \\ 1 - 3x/2 \leqslant y < 1 - 3x \, , \\ 1 - 3x/2 < 1 - 3x \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2 \leqslant x < 0 \, , \\ 1 < y < 7 \, , \\ 1 - 3x/2 \leqslant y < 1 - 3x \, . \end{array} \right.$$

Множество точек на координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют последней системе неравенств, представляет собой внутреннюю область треугольника CED вместе с его сторонами CE и ED без стороны CD.

Случай 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geqslant -2 \, , \\ 2y \leqslant 2 - 3x \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geqslant -2 \, , \\ y \leqslant 1 - 3x/2 \, , \\ -2y - 3x + 2 + 3x + 6 < 6 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geqslant -2 \, , \\ y \leqslant 1 - 3x/2 \, , \\ y > 1 \, . \end{array} \right.$$

Множество точек на координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют последней системе неравенств, представляет собой внутреннюю

область треугольника AED вместе с его сторонами AE и ED без стороны AD.

Случай 3 :

$$\begin{cases} x \leqslant -2\,, \\ 2y \leqslant 2 - 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant -2\,, \\ y \leqslant 1 - 3x/2\,, \\ -2y - 3x + 2 - 3x - 6 < 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant -2\,, \\ -3x - 5 < y \leqslant 1 - 3x/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leqslant -2\,, \\ -5 - 3x < y \leqslant 1 - 3x/2\,, \\ -3x - 5 < 1 - 3x/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 < x \leqslant -2\,, \\ 1 < y < 7\,, \\ -3x - 5 < y \leqslant 1 - 3x/2\,. \end{cases}$$

Множество точек на координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют последней системе неравенств, представляет собой внутреннюю область треугольника AEB вместе с его сторонами AE и BE без стороны AB.

Случай 4 :

$$\begin{cases} x \leqslant -2\,, \\ 2y \geqslant 2 - 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant -2\,, \\ y \geqslant 1 - 3x/2\,, \\ 2y + 3x - 2 - 3x - 6 < 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant -2\,, \\ y \geqslant 1 - 3x/2\,, \\ y < 7\,. \end{cases}$$

Множество точек на координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют последней системе неравенств, представляет собой внутреннюю область треугольника BEC вместе с его сторонами BE и CE без стороны BC.

Объединяя полученные множества всех четырех случаев, мы и получим внутреннюю область параллелограмма $ABCD$.

Максимальное расстояние между точками круга радиуса R есть расстояние между концами его диаметра, так как в силу неравенства треугольника расстояние между любыми двумя точками круга не превосходит суммы расстояний от этих точек до центра круга, которая в свою очередь не превосходит $2R$, то есть диаметра круга.

$|BD| = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} > 6 = |AC|$ и $AC \perp AD$, $AC \perp BC$ (см. рис. 26), поэтому искомой окружностью является окружность с центром в точке E пересечения диагоналей $ABCD$ радиуса $|BE|$ (равного половине длины большей диагонали). Всякая окружность меньшего радиуса уже не сможет целиком включить в себя внутреннюю область указанного параллелограмма.

Уравнение искомой окружности имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Координаты ее центра E — $(x_0 = -2, y_0 = 4)$, а радиус R равен $\sqrt{13}$.

5. Предприятие производит телевизоры и является прибыльным. Известно, что при изготовлении n телевизоров в месяц расходы предприятия на выпуск одного телевизора составляют не менее $\frac{40500}{n}+270-\left|90-\frac{40500}{n}\right|$ тыс. руб., а цена реализации каждого телевизора при этом не превосходит $540-\frac{3}{10}\cdot n$ тыс. руб. Определить ежемесячный объем производства, при котором может быть получена наибольшая из возможных в данных условиях ежемесячная прибыль. *Ответ:* 300 или 600 телевизоров .

Решение. Ежемесячная прибыль предприятия при изготовлении n телевизоров в месяц составит не более $f(n) = n(\varphi_2(n) - \varphi_1(n))$ (в тыс. руб.), где

$$\varphi_1(n) = \frac{40500}{n} + 270 - \left|90 - \frac{40500}{n}\right| \ , \ \varphi_2(n) = 540 - \frac{3}{10}n \ .$$

Раскрывая модуль и выделяя полный квадрат, функцию $f(n)$ приведем к виду

$$f(n) = \begin{cases} f_1(n) = -0.3n^2 + 180n = -0.3(n-300)^2 + 27000 \ , \ n \leqslant 450 \ , \\ f_2(n) = -0.3n^2 + 360n - 81000 = -0.3(n-600)^2 + 27000 \ , \ n \geqslant 450 \ . \end{cases}$$

Функция $f(n)$ действительного аргумента n является кусочно-квадратичной; ее график представлен на рис. 27

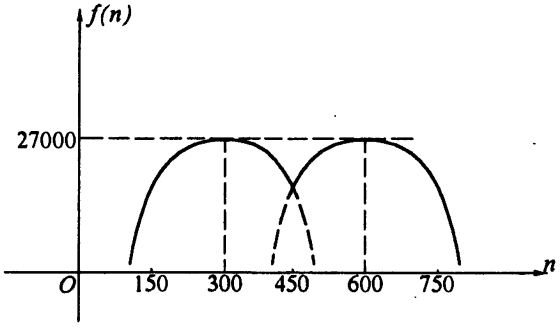


рис. 27

По свойству квадратичной функции (а также непосредственно видно из выражений для $f_1(n)$ и $f_2(n)$) максимальные значения функций $f_1(n)$ и $f_2(n)$ достигаются в целочисленных точках $n_1 = 300$ и $n_2 = 600$, причем

$$f_1(300) = f_2(600) = 27000.$$

Этот размер прибыли и является наибольшим из возможных.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отрезок CM, соединяющий вершину C с точкой M, расположенной на стороне AD, пересекает диагональ BD в точке K. Известно, что $CK : KM = 2 : 1$, $CD : DK = 5 : 3$ и $\angle ABD + \angle ACD = 180°$. Найти отношение стороны AB к диагонали AC.

Ответ: 5 : 9 .

*Решение.** Введем обозначения (см. рис. 28):

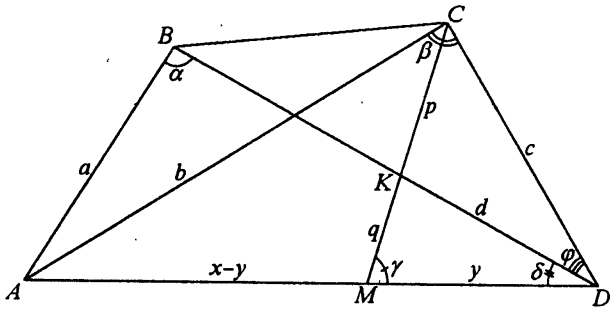


рис. 28

$a = AB$, $b = AC$, $p = CK$, $q = KM$, $c = CD$, $d = DK$ $x = AD$, $y = MD$, $\alpha = \angle ABD$, $\beta = \angle ACD$, $\gamma = \angle CMD$, $\delta = \angle ADB$, $\varphi = \angle BDC$.

По условию $p : q = 2 : 1$, $c : d = 5 : 3$, $\alpha + \beta = 180°$, поэтому $\sin\alpha = \sin\beta$. Применяя теорему синусов в треугольниках ABD и ACD, получим, что

$$\frac{a}{\sin\delta} = \frac{x}{\sin\alpha} = \frac{x}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin(\delta+\varphi)} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{a} = \frac{\sin(\delta+\varphi)}{\sin\delta} .$$

Применяя формулу площади треугольника (по сторонам и углу между ними), получим

$$\frac{S_{\triangle CMD}}{S_{\triangle KMD}} = \frac{(p+q)\cdot y\cdot\sin\gamma}{q\cdot y\cdot\sin\gamma} = 1 + \frac{p}{q} = 1 + 2 = 3 ,$$

с другой стороны получаем

$$3 = \frac{S_{\triangle CMD}}{S_{\triangle KMD}} = \frac{c\cdot y\cdot\sin(\delta+\varphi)}{d\cdot y\cdot\sin\delta} = \frac{c}{d}\cdot\frac{\sin(\delta+\varphi)}{\sin\delta} = \frac{5}{3}\cdot\frac{\sin(\delta+\varphi)}{\sin\delta} ,$$

Следовательно,

$$\frac{9}{5} = \frac{\sin(\delta+\varphi)}{\sin\delta} = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{9} .$$

* Это решение предложила Т.А. Леонтьева.

1. Найти все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} 7889x^3 = 2875y^3 , \\ |y| \leqslant 8 . \end{cases}$$

2. Найти область значений функции

$$y = \sqrt{20 + 10x - 5x^2} .$$

3. Решить уравнение

$$\log_2 \left(\frac{x-8}{\sin x} \right) = \log_2 \left((x-8) \cdot \sin x \right) .$$

4. Составить уравнение окружности наименьшего радиуса, внутри которой помещается множество, заданное на координатной плоскости условием

$$|y - 2x - 1| + |2x - 4| < 4 .$$

5. Предприятие производит детские велосипеды и является убыточным. Известно, что при изготовлении m велосипедов в месяц расходы предприятия на выпуск одного велосипеда и цена реализации каждого велосипеда составляют соответственно не менее

$$\frac{168000}{m} + 36 - \left| 12 - \frac{72000}{m} \right| \text{ тыс. руб.} \quad \text{и} \quad 72 - \frac{3}{1000} \cdot m \text{ тыс. руб.}$$

Определить ежемесячный объем производства, при котором ежемесячные убытки могут быть снижены до наименьшего из возможных в данных условиях уровня. Вариант полной остановки производства исключен.

6. В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ отрезок MS, соединяющий вершину M с точкой S, расположенной на стороне KN, пересекает диагональ LN в точке O. Известно, что $KL : KM = 7 : 9$, $SO : ON = 2 : 3$ и $\angle KLN + \angle KMN = 180°$. Найти отношение стороны MN к отрезку MS.

3.2.5. *Вариант с решениями задач (отделение экономики) 1995 г.*

Замечание. При разборе данного варианта приводятся более краткие решения, чем в п.п. 3.1.7, 3.1.9, 3.3.7, 3.3.9, 3.4.5. Читателям предоставляется самостоятельно провести необходимые выкладки и рассуждения для более подробных обоснований полученных ответов.

1. Решить неравенство

$$2x - 5 < 2\sqrt{x^2 - x - 6}\,.$$

Ответ: $x \leqslant -2\ ;\ x > \dfrac{49}{16}$.

Решение. Неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} 2x - 5 < 0\,, \\ x^2 - x - 6 \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x - 5 \geqslant 0\,, \\ (2x-5)^2 < 4(x^2 - x - 6)\,. \end{cases}$$

Решениями первой из них являются $x \leqslant -2$, а решениями второй — $x > 49/16$.

2. Решить уравнение

$$2|\sin x| + \log_{\operatorname{tg} x}\left(-\frac{|\cos x|}{\sin x}\right) = 0\,.$$

Ответ: $x = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi n\,,\ \forall n \in Z$.

Решение. ОДЗ :

$$\begin{cases} 0 < \operatorname{tg} x = \sin x : \cos x \neq 1\,, \\ |\cos x| : \sin x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0\,, \\ \cos x < 0\,, \\ \operatorname{tg} x \neq 1\,, \end{cases}$$

следовательно, уравнение преобразуется к виду $-2\sin x - 1 = 0$.

3. В трапеции $KLMN$ известны боковые стороны $KL = 36$, $MN = 34$, верхнее основание $LM = 10$ и $\cos(\angle KLM) = -1/3$. Найти диагональ LN.

Ответ: $36\ ;\ 8\sqrt{19}$.

Решение. Заметим, что при заданных условиях существуют две различные трапеции: одна с острым, а другая с тупым углом при вершине N (см. рис. 29).

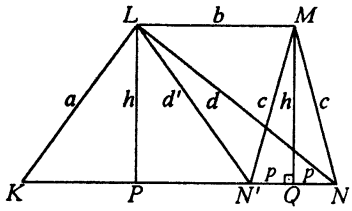


рис. 29

Пусть $h = LP = MQ$ — высота трапеции, $a = KL$, $b = LM$, $c = MN = MN'$, $p = QN = N'Q$, $d = LN$, $d' = LN'$, $\alpha = \angle LKN$.

$$\text{Тогда } d = \sqrt{h^2 + (b+p)^2}\ ,\ d' = \sqrt{h^2 + (b-p)^2}\ . \qquad (1)$$

Остается вычислить значения $h = a\sin\alpha = 24\sqrt{2}$, $p = \sqrt{c^2 - h^2} = 2$ и подставить их в (1).

4. В банк помещен вклад в размере 3900 тыс. руб. под 50 % годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725 %. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял ко вкладу ?

Ответ: 210 тыс. руб.

Решение. Пусть S - первоначальная сумма вклада, x — искомая сумма ежегодных дополнительных взносов, p — годовая процентная ставка, а $k = 1 + \dfrac{p}{100}$ — соответствующий ей коэффициент ежегодного роста, n — срок хранения, R — суммарный процентный прирост вклада за все n лет хранения. В соответствии с условиями задачи сумма вклада составит через год Sk, через два года — $(Sk + x)k = Sk^2 + xk$, через три года — $(Sk^2 + xk + x)k = Sk^3 + xk^2 + xk$, а через n лет —

$$Sk^n + xk^{n-1} + xk^{n-2} + \ldots + xk = Sk^n + xk\,\frac{k^{n-1} - 1}{k - 1}\ .$$

Таким образом, приходим к линейному уравнению для неизвестной величины x :

$$Sk^n + xk \cdot \frac{k^{n-1} - 1}{k - 1} = S\left(1 + \frac{R}{100}\right)\ .$$

Подставляя в него заданные значения $S = 3900$, $k = \dfrac{3}{2}$, $n = 5$, $R = 725$, находим $x = 210$.

5. Найти все $x \in [-3, 1]$, для которых неравенство

$$x \cdot \big(\pi(x+1) - 4 \cdot \operatorname{arctg}\,(3m^2 + 12m + 11)\big) > 0$$

выполняется при любых целых m.

Ответ: $-3 \leqslant x < -2$; $x = 1$.

Решение. При $x < 0$ имеем систему

$$x < f(m) = -1 + \frac{4}{\pi} \cdot \operatorname{arctg}(3m^2 + 12m + 11) =$$

$$= -1 + \frac{4}{\pi} \cdot \operatorname{arctg}(3(m+2)^2 - 1)\ ,\ \forall m \in Z\ ,$$

которая в силу возрастания функции арктангенс (а оно в свою очередь вытекает из возрастания функции тангенс на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$) равносильна неравенству

$$x < \min_{m \in Z} f(m) \ = \ f(-2) \ = \ -2\ .$$

Тем самым, на множестве $(-\infty, 0) \cap [-3, 1]$ решениями будут $\forall x \in [-3, -2)$. В случае $x > 0$ имеем систему

$$x > f(m)\ ,\ \forall m \in Z\ . \tag{2}$$

В силу ограниченности сверху числом $\pi/2$ значений арктангенса с одной стороны для всех $m \in Z$ $f(m) < 1$. С другой стороны в силу того, что арктангенс принимает любое значение из интервала $(-\pi/2, \pi/2)$, выбором достаточно больших $m \in Z$ значения $f(m)$ можно с любой наперед заданной точностью приблизить к 1.
Поэтому система (2) будет равносильна неравенству $x \geqslant 1$. В результате на множестве $(0, +\infty) \cap [-3, 1]$ единственным решением будет $x = 1$.

6. Найти наименьшее значение выражения $a^2 + (b-1)^2$ на множестве таких чисел a и b, для которых уравнение

$$\Big|\ |x-4| - 2\ \Big| - ax + (4a - b) = 0$$

имеет ровно три различных корня. Указать, при каких a и b достигается это наименьшее значение.

Ответ: наименьшее значение равно $\frac{1}{5}$ и достигается при $a = \pm\frac{2}{5}$, $b = \frac{4}{5}$

Решение. После замены переменной $x - 4 = t$ число решений уравнения не изменится, а само уравнение упростится:

$$\Big|\,|t| - 2\,\Big| = at + b\,. \qquad (3)$$

На рис. 30 изображен график левой части уравнения (3), представляющий собой "w"-образную ломаную. Графиками правой части уравнения (3) будут всевозможные прямые (см. также рис. 30). Анализируя взаимное расположение "w"-ломаной и этих прямых, приходим к выводу, что ровно три различные общие точки они будут иметь в следующих случаях:

$$\{-1 < a < 1\ ,\ b = 2\}\ ;\ \{-1 < a < 0\ ,\ b = -2a\}\ ;\ \{0 < a < 1\ ,\ b = 2a\}\ , \qquad (4)$$

а именно в случаях, когда одним из корней уравнения является :

1) $t = 0$, 2) $t = 2$, 3) $t = -2$.

При этом величина угла наклона прямой $y = at + b$ с положительным направлением оси Ot либо меньше $45°$, либо больше $135°$, в случае 1) прямая может быть параллельна оси Ot (см. рис. 30).

На рис. 31 представлен графический образ множества (4) на координатной плоскости $(a; b)$. Это контур равнобедренного треугольника KOL с удаленными вершинами. При этом вопрос о минимизации выражения $a^2 + (b-1)^2$ есть вопрос о минимизации квадрата расстояния от точки $M(0;1)$, лежащей внутри треугольника KOL, до сторон этого треугольника. Ясно, что этот минимум достигается в двух симметричных относительно оси Ob точках, являющихся основаниями перпендикуляров, проведенных из точки M на стороны LO и KO, это соответственно точки $E\left(\frac{2}{5}\,;\,\frac{4}{5}\right)$, $F\left(-\frac{2}{5}\,;\,\frac{4}{5}\right)$, само наименьшее значение равно $\frac{1}{5}$.

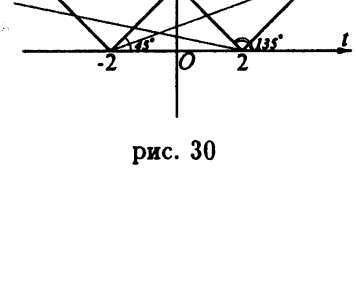


рис. 30

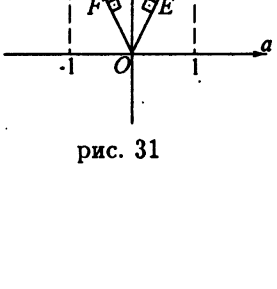


рис. 31

3.2.6. Вариант для самостоятельного решения (отделение экономики) 1995 г.

1. Решить неравенство

$$2\sqrt{x^2-x-2} > 2x-3\,.$$

2. Решить уравнение

$$2|\cos x| + \log_{\operatorname{ctg} x}\left(-\frac{|\sin x|}{\cos x}\right) = 0.$$

3. В трапеции $ABCD$ известны боковые стороны $AB = 49$, $CD = 50$, верхнее основание $BC = 9$ и $\cos(\angle ADC) = 1/5$. Найти диагональ AC .

4. В банк помещен вклад в размере 2100 тыс. руб. под 100 % годовых. В конце каждого из первых шести лет хранения после начисления процентов вкладчик снимал со счета одну и ту же фиксированную сумму. К концу седьмого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада уменьшился по сравнению с первоначальным на 20 %. Какую сумму вкладчик ежегодно снимал со счета ?

5. Найти все $x \in [-1, 4]$, для которых неравенство

$$x \cdot \left(\pi(x-1) + 4 \cdot \operatorname{arctg}\left(5n^2+10n+4\right)\right) > 0$$

выполняется при любых целых n.

6. Найти наименьшее значение выражения $p^2 + (q-2)^2$ на множестве таких чисел p и q, для которых уравнение

$$\Big|\,|x-3|-3\,\Big| - px + 3p - q \;=\; 0$$

имеет ровно три различных корня. Указать, при каких p и q достигается это наименьшее значение.

3.2.7. Вариант с решениями задач (отделение менеджмента) 1995 г. *

1. Решить уравнение

$$\sqrt{x+3} = 9 - x \ .$$

Ответ: $x = 6$.

Решение. Уравнение равносильно квадратному уравнению $x + 3 = (9-x)^2$ с ограничением $x \leqslant 9$. Один из корней равен 6, а другой 13. Ограничению подчиняется лишь $x = 6$.

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{2\cos 2x + 1} = 0 \ .$$

Ответ: $x = \pi n$, $\forall n \in Z$.

Решение. Уравнение равносильно уравнению $\sin 3x = 0$ с ограничением $\cos 2x \neq -1/2$. Находим множество корней $x = \dfrac{\pi n}{3}$, $\forall n \in Z$, и исключаем из него $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k$, $\forall k \in Z$.

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{3x-1}{3x+1}} \left(x - \frac{1}{3} \right) \geqslant 1 \ .$$

Ответ: $\dfrac{1}{3} < x \leqslant \dfrac{2}{3}$.

Решение. Поскольку $x > 1/3$, то основание логарифма меньше 1 и поэтому $x - 1/3 \leqslant \dfrac{x - 1/3}{x + 1/3}$. Делим обе части на положительное число $x - 1/3$ и заключаем, что $1/3 < x \leqslant 2/3$.

4. В первый год разработки месторождения было добыто 100 тыс. тонн железной руды. В течение нескольких следующих лет годовая добыча руды увеличивалась на 25 % по сравнению с каждым предшествующим годом, а затем на протяжении последующих 3 лет поддерживалась на достигнутом уровне. Общий объем добытой руды за все время добычи составил 850 тыс. тонн. Сколько лет разрабатывалось месторождение ?

Ответ: 6 лет .

* См. замечание в начале разбора варианта п. 3.2.5., оно имеет место и применительно к варианту данного пункта.

Решение. Пусть b — объем добычи за первый год, n — число лет, в течение которых добыча возрастала на p процентов ежегодно, $q = 1 + \dfrac{p}{100}$ — соответствующий коэффициент ежегодного роста, m — число лет, в течение которых добыча оставалась неизменной на достигнутом ранее уровне, $n+m$ — искомый срок разработки месторождения, S — общий объем добытого сырья. Тогда уравнение для неизвестной величины n примет вид:

$$b + bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1} + mbq^{n-1} = S\ .$$

Преобразуем его к виду

$$b \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + mb \cdot \frac{q^n}{q} = S$$

и, подставив заданные значения $b = 100$, $q = \dfrac{5}{4}$, $m = 3$, $S = 850$, найдем $n = 3$. Искомое значение $n + m = 6$.

5. В треугольнике ABC сторона $AB = 6$, $\angle BAC = 30°$, радиус описанной окружности равен 5. Найти сторону AC. *Ответ:* $AC = 3\sqrt{3} \pm 4$.

Решение. По заданному радиусу описанной окружности и противолежащему углу находим сторону $BC = 2R\sin(\angle BAC) = 5$. Далее по теореме косинусов составляем для неизвестной стороны AC квадратное уравнение $AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\angle BAC) = BC^2$, и находим его корни $AC = 3\sqrt{3} \pm 4$.

6. Найти все значения параметра p , при которых уравнение

$$x - 2 = \sqrt{-2(p+2)x + 2}$$

имеет единственное решение. *Ответ.* $p \leqslant -\dfrac{3}{2}$.

Решение. Обозначим $a = -2(p+2)$ и перейдем от уравнения к эквивалентной системе

$$\begin{cases} x \geqslant 2\ , \\ (x-2)^2 = ax + 2\ . \end{cases}$$

Нас интересуют те a , при которых квадратное уравнение

$$f(x) = x^2 - (a+4)x + 2 = 0$$

имеет единственный корень на промежутке $x \geqslant 2$. Для данного квадратного трехчлена это требование равносильно неравенству $f(2) \leqslant 0$. Его решениями являются $a \geqslant -1$, откуда находим $p \leqslant -\dfrac{3}{2}$.

3.2.8. Вариант для самостоятельного решения (отделение менеджмента) 1995 г.

1. Решить уравнение

$$\sqrt{x-7} = 13 - x \, .$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\cos 3x}{2\cos 2x - 1} = 0 \, .$$

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{5x-1}{5x+1}} \left(x - \frac{1}{5} \right) \leqslant 1 \, .$$

4. В первый год разработки месторождения было добыто 400 тыс. тонн нефти. В течение нескольких следующих лет годовая добыча нефти увеличивалась на 50 % по сравнению с каждым предшествующим годом, а затем в течение еще одного года поддерживалась на достигнутом уровне. Общий объем добытой нефти за весь период добычи составил 7300 тыс. тонн. Сколько лет разрабатывалось месторождение ?

5. В треугольнике ABC сторона $AB = 24, \angle BAC = 60^\circ$, радиус описанной окружности равен 13 . Найти сторону AC .

6. Найти все значения параметра b, при которых уравнение

$$x - 2 = \sqrt{2(b-1)x + 1}$$

имеет единственное решение.

3.2.9. Вариант с решениями задач (отделение экономики) 1996 г.

Замечание. При разборе данного варианта приводятся более краткие решения, чем в п.п. 3.1.11, 3.1.13, 3.3.11, 3.3.13, 3.4.7. Читателям предоставляется самостоятельно провести необходимые выкладки и рассуждения для более подробных обоснований полученных ответов.

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |-x| - \sqrt[3]{y+3} = 1\,, \\ (-x\sqrt{-x})^2 - y = 10\,. \end{cases}$$

Ответ: $x = -2\,,\ y = -2\,.$

Решение. Сделаем замену $\sqrt[3]{y+3} = z$ и перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases} x \leqslant 0\,, & (1) \\ x + z = -1\,, & (2) \\ x^3 + z^3 = -7\,. & (3) \end{cases}$$

Воспользуемся разложением $x^3 + z^3 = (x+z)(x^2 - xz + z^2)$ и исключим из (2),(3) неизвестное z. Полученное квадратное уравнение $x^2 + x - 2 = 0$ имеет два корня $x_1 = -2\,,\ x_2 = 1\,,$ из которых с учетом (1) выбираем $x = -2\,.$ Ему соответствует $y = -2\,.$

2. Решить неравенство

$$\frac{\log_7(19 - 16x|x|) - \log_{49}(1-4x)^2}{3 - 4x - |4x-3|} \leqslant 0\,.$$

Ответ: $\dfrac{3}{4} < x \leqslant 1\,.$

Решение. Знаменатель отличен от нуля и *отрицателен* при $x > \dfrac{3}{4}\,,$ числитель при этом *неотрицателен*:

$$\log_7(19 - 16x|x|) \geqslant \log_{49}(1-4x)^2 = \log_7|1-4x|\,.$$

В результате исходное неравенство будет равносильно системе

$$\begin{cases} x > 3/4\,, & (1) \\ x \neq 1/4\,, & (2) \\ 19 - 16x|x| > 0\,, & (3) \\ 19 - 16x|x| \geqslant |1-4x|\,. & (4) \end{cases}$$

При решении неравенства (4) раскрываем модули с учетом (1) и получаем квадратное неравенство $4x^2 + x - 5 \leqslant 0$. Его решения образуют отрезок $-\frac{5}{4} \leqslant x \leqslant 1$. Неравенство (3) является следствием (2) и (4).

3. Решить уравнение

$$\left(\operatorname{tg}\frac{19\pi}{3} - \operatorname{tg} x\right) \cdot \sqrt{6\cos\frac{15\pi}{4} \cdot \cos\frac{x}{2} - \cos x - 3} \;=\; 0\,.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi k\,,\ \forall k \in Z\,.$

Решение. Обозначим $t = \cos\frac{x}{2}$, преобразуем подкоренное выражение к виду $-2t^2 + 3\sqrt{2}t - 2$ и найдем его корни: $t_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $t_2 = \sqrt{2}$. Уравнение $\cos\frac{x}{2} = t_2 = \sqrt{2}$ решений не имеет, а уравнение $\cos\frac{x}{2} = t_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ хотя и имеет решения $x = \pm\frac{\pi}{2} + 4\pi n\,,\ \forall n \in Z$, но они не входят в область определения тангенса. Теперь остается среди решений

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n\,,\ \forall n \in Z\,, \qquad (1)$$

уравнения $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\frac{19\pi}{3} = \sqrt{3}$ отобрать те, которые удовлетворяют неравенству $2t^2 - 3\sqrt{2}t + 2 \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant t \leqslant \sqrt{2}$, то есть условиям

$$-\frac{\pi}{2} + 4\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 4\pi k\,,\ k = 0\,;\pm1\,;\ \pm2\,;\ \ldots\,. \qquad (2)$$

Представляя номер n в виде $n = 4q + r$, $q \in Z$, $r = 0\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3$ и подставляя (1) в (2), заключаем, что $m = 0$.

4. В контейнер упакованы комплектующие изделия трех типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тыс. руб. и 12 кг. для первого типа, 500 тыс. руб. и 16 кг. для второго типа, 600 тыс. руб. и 15 кг. для третьего типа. Общий вес комплектующих равен 326 кг. Определить минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере комплектующих изделий.

Ответ: 10500 тыс. руб. и 12600 тыс. руб. .

Решение. Обозначим через m, n, k количества комплектующих изделий первого, второго и третьего типа соответственно. Требуется найти диапазон возможных значений величины

$$f = 100(4m + 5n + 6k) \tag{1}$$

при условии

$$12m + 16n + 15k = 326\ ,\quad m,\ n,\ k \in N\ . \tag{2}$$

Из (2) следует, что число k является четным:

$$k = 2s\ ,\ s \in N\ , \tag{3}$$

и тогда из (2) имеем

$$6m + 8n + 15s = 163\ . \tag{4}$$

Из (4) следует, что число s является нечетным:

$$s = 2p + 1\ ,\ p \in Z\ ,\ p \geqslant 0\ , \tag{5}$$

и тогда из (4) имеем

$$3m + 4n + 15p = 74\ . \tag{6}$$

Из (6) следует, что число n при делении на 3 дает остаток 2 :

$$n = 3q + 2\ ,\ q \in Z\quad q \geqslant 0\ , \tag{7}$$

и тогда из (6) имеем

$$m + 4q + 5p = 22\ . \tag{8}$$

Преобразуем выражение (1) с помощью (3), (5), (7), (8) :

$$f = 100(110 - q + 4p)\ ,\quad p\ ,\ q \in Z\ ,\ p\ ,\ q \geqslant 0\ .$$

Ввиду имеющегося ограничения (8) наибольшее значение f достигается при $p = 4$, $q = 0$, $m = 2$ и равно $f_{\max} = 12600$, а наименьшее — при $p = 0$, $q = 5$, $m = 2$ и равно $f_{\min} = 10500$.

5. В треугольнике ABC с основанием $AC = 8$ проведена биссектриса BL. Известно, что площади треугольников ABL и BLC относятся как 3 : 1. Найти биссектрису BL, при которой высота, опущенная из вершины B на основание AC, будет наибольшей.

Ответ: $BL = 3\sqrt{2}$.

Решение. Треугольники ABL и BCL имеют общую высоту BH, поэтому их основания находятся в том же отношении, что и площади: $AL : LC = 3$. Так как BL — биссектриса треугольника ABC, то

$$AB : BC = 3\ . \tag{1}$$

Введем прямоугольную систему координат с началом в вершине $A(0;0)$ и направлением осей, указанным на рис. 3.32

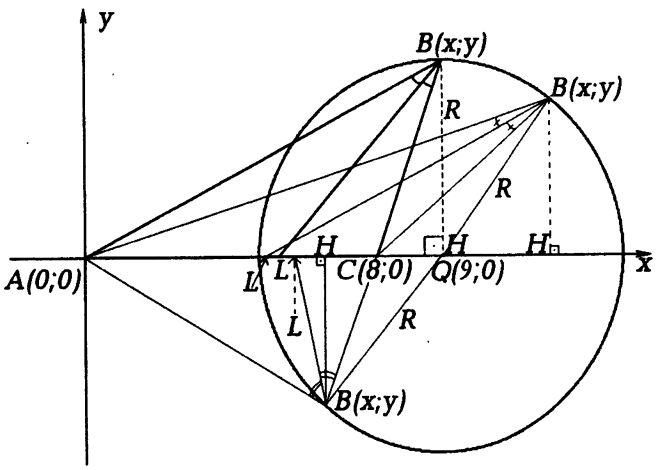


рис. 32

Тогда вершина C будет иметь координаты $(8;0)$. Обозначим координаты вершины B через $(x;y)$. Тогда из (1) будем иметь

$$x^2+y^2=9((x-8)^2+y^2) \;\Leftrightarrow\; (x-9)^2+y^2=9\,. \qquad (2)$$

Равенство (2) означает, что вершина $B(x;y)$ находится на окружности радиуса $R=3$ с центром в точке $Q(9;0)$. Ясно, что высота BH треугольника ABC, опущенная из вершины B, будет наибольшей в случае совпадения ее основания H с центром окружности Q; (см. на рис. 32 указаны различные варианты треугольников ABC) при этом $BH=R=3$. Далее из (1) и того, что $AL+LC=8$, имеем $AL=6$, $LH=AH-AL=3$ и, наконец, по теореме Пифагора находим $BL=\sqrt{BH^2+LH^2}=3\sqrt{2}$.

6. Найти все значения параметра a, при которых фигура, заданная на координатной плоскости условием

$$|y|\leqslant\left(\sqrt{a-|x|}\right)^2+\arcsin(\sin(a-|x|))\,,$$

представляет собой 14-угольник.

Ответ: $\dfrac{5\pi}{2}<a\leqslant\dfrac{7\pi}{2}$.

Решение. Переменные x и y входят в условие задачи под знаком модуля, следовательно, заданная фигура симметрична относительно обеих координатных осей и основные построения достаточно провести в первой четверти, где $0 \leqslant x \leqslant a$, $y \geqslant 0$ и

$$y \leqslant a - x + \arcsin(\sin(a - x)) \ . \qquad (1)$$

Для графического отображения условия (1) построим график функции $y = f(x) = x + \arcsin(\sin x))$:

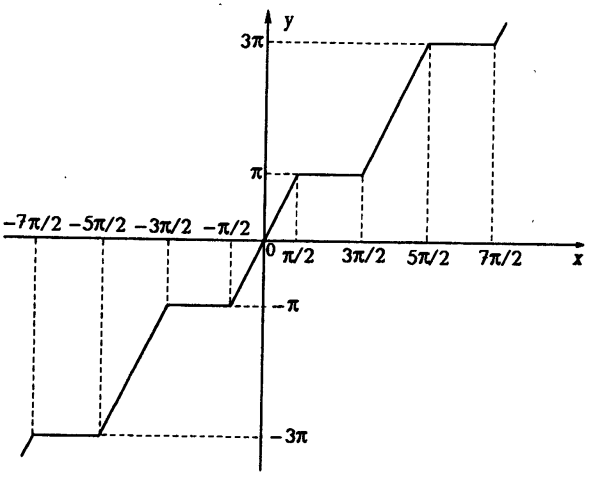


рис. 33

В терминах f условие (1) примет вид

$$y \leqslant f(a - x) = -f(x - a) \ .$$

График функции $y = -f(x - a)$ при интересующих нас значениях $a \geqslant 0$ получается из графика функции $y = f(x)$, изображенного на рис. 3.33, сдвигом *вправо* на расстояние a с последующим зеркальным отражением относительно оси Ox. По мере увеличения параметра a заданная фигура, увеличиваясь в размерах, проходит следующие этапы эволюции: точка $(a = 0) \to$ четырехугольник $\to$ шестиугольник $\to$ 12-угольник $\to$ $\to$ 14-угольник и т.д. Фаза 14-угольника наблюдается в диапазоне значений $\dfrac{5\pi}{2} < a \leqslant \dfrac{7\pi}{2}$. На рис. 3.34 изображен вид 14-угольника для $a = 3\pi$. При остальных $a \in \left(\dfrac{5\pi}{2} \ ; \ \dfrac{7\pi}{2}\right]$ картина качественно не меняется.

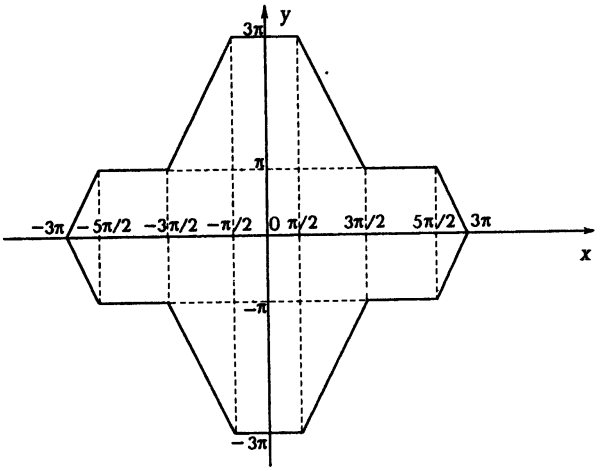


рис. 34

3.2.10. Вариант для самостоятельного решения (отделение экономики) 1996 г.

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |-x| + \sqrt[3]{y-26} = -1\,, \\ (x\sqrt{-x})^2 + y = 7\,. \end{cases}$$

2. Решить неравенство

$$\frac{\log_4(9x|x|+11) - \log_{16}(3x+1)^2}{3x+2-|3x+2|} \leqslant 0\,.$$

3. Решить уравнение

$$\left(\operatorname{tg}\frac{17\pi}{3} - \operatorname{tg} x\right) \cdot \sqrt{\cos x - 10 \cdot \sin\frac{13\pi}{4} \cdot \sin\frac{x}{2} - 5} = 0\,.$$

4. Партия товара упакована в коробки трех типов. Вес и стоимость содержимого одной коробки составляют 9 кг и 320 тыс. руб. для первого типа, 6 кг. и 150 тыс. руб. для второго типа, 4 кг. и 120 тыс. руб. для третьего типа. Суммарная стоимость товара равна 4180 тыс. руб. Определить наименьший и наибольший возможный общий вес партии товара.

5. В треугольнике KLM с основанием $KM = 6$ проведена медиана LP. Известно, что расстояния от точки P до боковых сторон KL и LM относятся как $1 : 2$. Найти медиану LP, при которой площадь треугольника KLM будет наибольшей.

6. Найти все значения параметра a, при которых фигура, заданная на координатной плоскости условием

$$|y| \leqslant \left(\sqrt{a-|x|}\right)^2 + \arcsin(\sin(a-|x|))\,,$$

представляет собой 12-угольник.

3.2.11. Вариант с решениями задач (отделения вечернее и менеджмента) 1996 г. *

1. Решить неравенство

$$\log_4(3-3x)^2 \geqslant \log_2(x^2-1)\ .$$

Ответ: $-4 \leqslant x < -1\ ;\ 1 < x \leqslant 2\ .$

Решение. После перехода к основанию 2 неравенство примет вид

$$\log_2|3-3x| \geqslant \log_2(x^2-1)\ ,$$

что равносильно системе $|3-3x| \geqslant x^2-1 > 0$.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+3^y=2\ , \\ x^3+27^y=26\ . \end{cases}$$

Ответ: $x=-1\ ,\ y=1\ .$

Решение. Сделаем замену $3^y=z$ и перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases} z>0\ , & (1) \\ x+z=2\ , & (2) \\ x^3+z^3=26\ . & (3) \end{cases}$$

Воспользуемся разложением $x^3+z^3=(x+z)(x^2-xz+z^2)$ и исключим из (2),(3) неизвестное x. Полученное квадратное уравнение $z^2-2z-3=0$ имеет два корня $z_1=-1\ ;\ z_2=3$, из которых с учетом (1) выбираем $z=3$. Ему соответствует $x=-1\ ,\ y=1\ .$

3. В контейнер упакованы изделия двух типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тыс. руб. и 12 кг. для первого типа и 600 тыс. руб. и 15 кг. для второго типа. Общий вес изделий равен 321 кг. Определить минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере изделий.

Ответ: 11000 тыс. руб. и 12600 тыс. руб.

---

* См. замечание в начале разбора варианта п. 3.2.9., оно имеет место и применительно к варианту данного пункта.

Решение. Обозначим через m и n количества изделий первого и второго типа соответственно. Требуется найти диапазон возможных значений величины
$$f = 100(4m + 6n) \qquad (1)$$
при условии
$$12m + 15n = 321\ , \quad m, n \in N. \qquad (2)$$
Выразим из (2) m через n (2) и подставим в (1) :
$$f = 100(107 + n)\ .$$
Ввиду имеющегося ограничения (2) наибольшее значение f достигается при $n = 19$ и равно $f_{\max} = 12600$, а наименьшее — при $n = 3$ и равно $f_{\min} = 11000$.

4. Решить уравнение $\sqrt[4]{12} \cdot \sin x = \sqrt{\sin 2x}$.

Ответ: $x = \pi n\ ,\ \forall n \in Z\ ;\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k\ ,\ \forall k \in Z$.

Решение. Уравнение равносильно системе:
$$\begin{cases} \sin x \geqslant 0\ , & (1) \\ \sin x \cdot (\sqrt{3}\sin x - \cos x) = 0\ . & (2) \end{cases}$$
Уравнение (2) выполняется либо при $\sin x = 0$, либо при $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Во втором случае следует провести отбор корней, учитывая неравенство (1).

5. Через точку A, находящуюся вне окружности на расстоянии 7 от ее центра, проведена прямая, пересекающая окружность в точках B и C. Найти радиус окружности, если известно, что $AB = 3$, $BC = 5$. *Ответ:* 5 .

Решение.

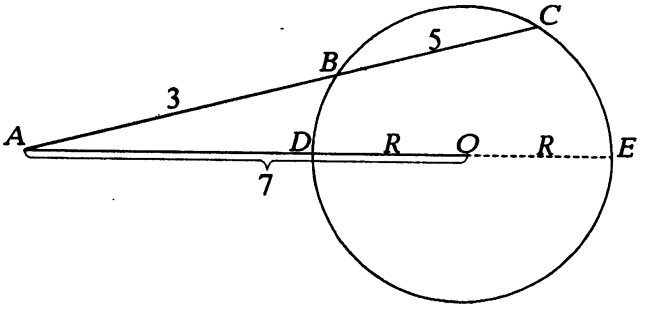


рис. 35

По свойству секущих, проведенных к окружности из одной точки, имеем (см. рис. 35):

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE \ . \qquad (1)$$

Обозначим искомый радиус через R и, подставив в (1) $AB = 3$, $AC = 8$, $AD = 7 - R$, $AE = 7 + R$, получим квадратное уравнение для R .

6. При каких значениях параметра p площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условием

$$|2x + y| \ + \ |x - y + 3| \ \leqslant \ p \ ,$$

будет равна 24 ? *Ответ:* $p = 6$.

Решение. Заданное множество является пустым при $p < 0$, при $p = 0$ это точка с координатами $(x = -1 \ ; \ y = 2)$, а при $p > 0$ — параллелограмм вместе со своими внутренними точками, его центр, точка пересечения диагоналей — точка $(x = -1 \ ; \ y = 2)$, а его стороны, параллельны прямым $x = 0$ и $x + 2y = 0$, что устанавливается путем раскрытия модулей так же, как и в решении задачи 4 варианта п. 3.2.3. На рис. 3.36 изображен вид этого параллелограмма именно для того значения параметра $p = 6$, которому соответствует площадь, равная 24.

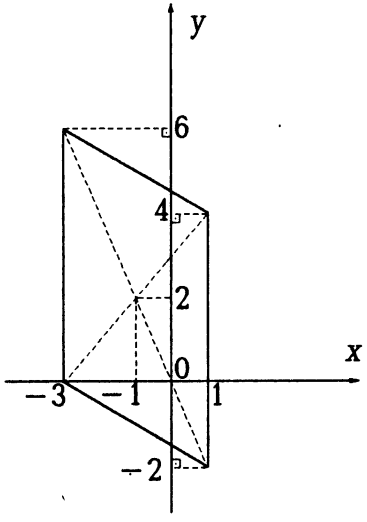


рис. 36

3.2.12. Вариант для самостоятельного решения (отделения вечернее и менеджмента) 1996 г.

1. Решить неравенство

$$\log_9(4+4x)^2 \geqslant \log_3(x^2-1)\ .$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x + y = 1\ , \\ 8^x + y^3 = 37\ . \end{cases}$$

3. В контейнер упакованы изделия двух типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 300 тыс. руб. и 15 кг. для первого типа и 400 тыс. руб. и 18 кг. для второго типа. Общий вес изделий равен 279 кг. Определить минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере изделий.

4. Решить уравнение

$$\sqrt{\sin 2x} = \sqrt[4]{12}\cdot\cos x\ .$$

5. Через точку K, находящуюся вне окружности радиуса 4 , проведена прямая, пересекающая окружность в точках L и M. Найти расстояние от точки K до центра окружности, если известно, что $KL = 4$, $KM = 5$.

6. При каких значениях параметра q площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условием

$$|x+2y| + |x-y-3| \leqslant q\ ,$$

будет равна 54 ?

3.3. Геологический факультет МГУ

3.3.1. Вариант с решениями задач 1993 г.

1. Найти численное значение выражения

$$\left(\frac{8a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{4\sqrt{a}+2\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{4\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{4a-b}\right)^2 .$$

Решение

Область допустимых значений выражения (ОДЗ):

$$\begin{cases} 4a-b\neq 0\,, \\ a\geqslant 0\,, \\ b\geqslant 0\,. \end{cases}$$

$$\left(\frac{8a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{4\sqrt{a}+2\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{4\sqrt{a}+2\sqrt{b}}{4a-b}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{(2\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3}{2(2\sqrt{a}+\sqrt{b})}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{2(2\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(2\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{(2\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2}{2}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{2}{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2=$$

$$=\frac{(2\sqrt{a})^2-2\cdot 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2}{2}\cdot\left(\frac{2}{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2=$$

$$=\frac{\left(2\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}\cdot\frac{4}{\left(2\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}=2\,.$$

Ответ: 2 при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $4a-b\neq 0$.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{1-\cos^2 x}+6\cos 2x=0\,.$$

Решение

$$\sqrt{1-\cos^2 x}+6\cos 2x=0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad |\sin x|+6(1-2\sin^2 x)=0\ .$$

Сделаем замену: $|\sin x|=t$. Исходное уравнение равносильно уравнению $12t^2-t-6=0$. Оно имеет два решения:

$$t_1=-\frac{2}{3}\ ;\ t_2=\frac{3}{4}\ .$$

Уравнение $|\sin x|=-\frac{2}{3}$ решений не имеет; решая уравнение $|\sin x|=\frac{3}{4}$, получаем ответ.

Ответ: $x=\pm\arcsin\frac{3}{4}+\pi n\ ,\ \forall n\in Z\ .$

3. Для рытья котлована выделили два экскаватора. После того, как первый проработал 2 часа, его сменил второй, который за 3 часа закончил работу. Всю работу один второй экскаватор выполнил бы на 4 часа быстрее, чем один первый экскаватор. За какое время выроют котлован оба экскаватора, работая вместе ?

Решение

Пусть скорость работы первого экскаватора — v_1, второго — v_2, полный объем работы — A, искомое время — t. Запишем условия задачи:

$$\begin{cases} 2v_1+3v_2=A\ , \\ \dfrac{A}{v_1}-\dfrac{A}{v_2}=4\ . \end{cases}$$

Необходимо найти $t=\dfrac{A}{v_1+v_2}$.

Сделаем замену: $\frac{v_1}{A}=x$, $\frac{v_2}{A}=y$. Данная система уравнений равносильна следующей:

$$\begin{cases} 2x+3y=1\ , \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=4\ . \end{cases}$$

Выражая x через y из первого уравнения и подставляя его во второе, получим следующую систему уравнений :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1-3y}{2}\,, \\ 12y^2 + y - 1 = 0\,. \end{cases}$$

Последнее уравнение имеет два решения: $y_1 = -\dfrac{1}{3}$; $y_2 = \dfrac{1}{4}$.

Так как $y > 0$, то $y = \dfrac{1}{4}$, $x = \dfrac{1}{8} \Rightarrow t = \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{8}{3}$.

Ответ: 2ч. 40мин. .

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{\mathrm{tg}\frac{\pi}{9}}(x^2) \geqslant \log_{\mathrm{tg}\frac{\pi}{9}}(\sqrt{2x+3})\,.$$

Решение

$$\frac{1}{2}\log_{\mathrm{tg}\frac{\pi}{9}}(x^2) \geqslant \log_{\mathrm{tg}\frac{\pi}{9}}(\sqrt{2x+3}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_{\mathrm{tg}\frac{\pi}{9}}(x^2) \geqslant \log_{\mathrm{tg}\frac{\pi}{9}}(2x+3)\,,$$

$$0 < \mathrm{tg}\frac{\pi}{9} < \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1\,.$$

Область допустимых значений левой и правой частей исходного уравнения:

$$\begin{cases} x^2 > 0\,, \\ 2x + 3 > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

ОДЗ $x > -\dfrac{3}{2}$, $x \neq 0$. Исходное неравенство равносильно преобразуется так:

$$x^2 \leqslant 2x + 3 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x - 3 \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; (x+1)(x-3) \leqslant 0.$$

Решения последнего неравенства: $-1 \leqslant x \leqslant 3$. Учитывая ОДЗ, имеем $\forall x \in [-1, 0) \cup (0, 3]$ — решения исходного неравенства.

Ответ: $[-1, 0) \cup (0, 3]$.

5. На стороне AB треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Прямая DE делит площадь треугольника ABC пополам и образует с прямой AB угол 15°. Найти меры углов треугольника ABC.

Решение

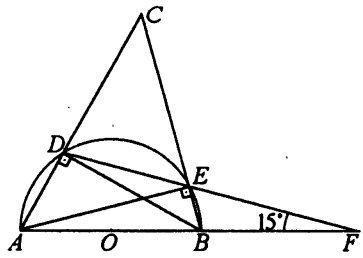


рис. 37

Углы $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — острые (точка C лежит вне круга).

Обозначим A , B , C — меры углов при соответствующих вершинах треугольника ABC, для меры угла ABC, например, будет использоваться и такое обозначение, как $\widehat{ABC}$. Так как четырехугольник $ADEB$ вписан в окружность, то $\widehat{CAB} + \widehat{BED} = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{CAB} = \widehat{DEC}$, аналогично $\widehat{CBA} = \widehat{EDC} \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ECD \sim \triangle ABC$ с коэффициентом подобия $k \Rightarrow$

$$\Rightarrow k = \frac{EC}{AC} = \frac{DC}{BC} = \frac{DE}{AB}\,, \qquad k^2 = \frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

$AE \perp BC$ (AB — диаметр) $\Rightarrow k = \dfrac{EC}{AC} = \cos C = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow C = 45^\circ$.

В силу теоремы о сумме углов треугольника

$A + B + C = 180^\circ \Rightarrow A + B = 135^\circ$.

$\angle ABC$ — внешний угол $\triangle BEF \Rightarrow$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{BEF} + \widehat{BFE} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{DEC} + 15^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{BAC} + 15^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 135^\circ\,, \\ B - A = 15^\circ \end{cases} \Rightarrow$$

$A = 60^\circ$, $B = 75^\circ$. Замечание: может быть наоборот $A = 75^\circ$, $B = 60^\circ$, если точка A лежит между точками B и F .

Ответ: 60° , 75° , 45° .

6. Найти все действительные значения параметра k , при которых ровно одна точка графика функции

$$y = 2x + \left(\lg k \cdot \sqrt{\cos(2k\pi x) + 2\cos(k\pi x) - 3}\,\right) + 1$$

лежит в области $(2x-7)^2 + 4(y-3)^2 \leqslant 25$.

Решение

$$y = 2x + \left(\lg k \cdot \sqrt{\cos(2k\pi x) + 2\cos k\pi x - 3}\right) + 1\ ,\ k \in R$$

Область определения $\lg k$: $k > 0$. Область определения функции

$$\sqrt{\cos(2k\pi x) + 2\cos k\pi x - 3}\ :$$

$$\cos 2k\pi x + 2\cos k\pi x - 3 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^2 k\pi x + \cos k\pi x - 2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\cos k\pi x + 2)(\cos k\pi x - 1) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos k\pi x = 1 \ \Leftrightarrow\ k\pi x = 2\pi n\ ,\ \forall n \in Z\ .$$

Итак, при $k > 0$ $\quad D[f]:\ \{x = \dfrac{2n}{k},\ \forall n \in Z\}$

$$\begin{cases} (2x-7)^2 + 4(y-3)^2 \leqslant 25\ , \\ y = 2x + 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (2x-7)^2 + 4(2x-2)^2 \leqslant 25 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x^2 - 3x + 2 \leqslant 0\ \Leftrightarrow\ (x-1)(x-2) \leqslant 0\ \Leftrightarrow\ 1 \leqslant x \leqslant 2\ .$$

Так как $k > 0$, то

$1 \leqslant x \leqslant 2\ \Leftrightarrow\ 1 \leqslant \dfrac{2n}{k} \leqslant 2\ \Leftrightarrow\ \dfrac{k}{2} \leqslant n \leqslant k\ \Rightarrow$

при $0 < k < 1$ целых точек (целых значений n) нет ;

$1 \leqslant k < 2\ \Leftrightarrow\ \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{k}{2} < 1\ \Rightarrow\ \left[\dfrac{k}{2}, k\right] \supset \{1\}$ — 1 целая точка ;

$k = 2\ \Rightarrow\ \left[\dfrac{k}{2}, k\right] \supset \{1; 2\}$ — 2 целые точки ;

$2 < k < 3\ \Rightarrow\ 1 < \dfrac{k}{2} < 2\ \Rightarrow\ \left[\dfrac{k}{2}, k\right] \supset \{2\}$ — 1 целая точка ;

$3 \leqslant k < 4\ \Leftrightarrow\ \dfrac{3}{2} \leqslant \dfrac{k}{2} < 2\ \Rightarrow\ \left[\dfrac{k}{2}, k\right] \supset \{2; 3\}$ — 2 целые точки ;

$k \geqslant 4$ — длина $\left[\dfrac{k}{2}, k\right] = \dfrac{k}{2}$ не меньше 2 $\Rightarrow$ $\left[\dfrac{k}{2}, k\right] \supset$ более целой 1 точки.

Ответ: $1 \leqslant k < 2\ ;\ 2 < k < 3\ .$

1. Найти численное значение выражения

$$\left(\frac{a\sqrt{a}+27b\sqrt{b}}{3\sqrt{a}+9\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{3\sqrt{a}+9\sqrt{b}}{a-9b}\right)^2 .$$

2. Решить уравнение

$$15\cdot(\cos 2x)\cdot\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}=7 .$$

3. На берегу озера расположены пункты A и B. Из пункта A в пункт B отправился катер, а через 1 час после этого из пункта B в пункт A вышла моторная лодка. Еще через час они встретились и, не останавливаясь, продолжили движение. Катер прибыл в пункт B через 2 часа 20 минут после того, как в пункт A прибыла моторная лодка. Через какое время после начала движения произошла бы их встреча, если бы они одновременно отправились навстречу друг другу ?

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{4}\log_{2\sin\frac{\pi}{7}}(x^2)>\log_{2\sin\frac{\pi}{7}}(\sqrt[4]{3x+4}) .$$

5. Точка M, лежащая вне круга с диаметром AB, соединена с точками Aи B. Отрезки MA и MB пересекают окружность в точках C и D соответственно. Площадь круга, вписанного в треугольник AMB, в 4 раза больше, чем площадь круга, вписанного в треугольник CMD. Найти меры углов треугольника AMB, если известно, что один из них в 2 раза больше другого.

6. Найти все неотрицательные действительные значения параметра a, при которых в области $(y+2)^2-4x\leqslant 0$ лежат ровно три точки графика функции $y=2x\left(\sqrt{\cos(2\pi x)-\cos^4(a\pi x)}-1\right)+2$.

3.3.3. Вариант с решениями задач 1994 г. (май)

1. Какое из чисел меньше $\sqrt[3]{47}$ или $\sqrt{13}$?

Решение

$$\sqrt[3]{47} \vee \sqrt{13} \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{47}\right)^6 \vee \left(\sqrt{13}\right)^6 \Leftrightarrow 47^2 \vee 13^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2209 \vee 2197\ ; \quad 2197 < 2209 \Rightarrow \sqrt{13} < \sqrt[3]{47}\ .$$

Ответ: $\sqrt{13}$.

2. Упростить до численного значения выражение

$$\frac{7\sqrt{3}\sqrt{a} - 7\sqrt{5}\sqrt{b}}{6\sqrt{3}\sqrt{a} + 6\sqrt{5}\sqrt{b}} : \frac{3a - 5b}{9a + 15b + 6\sqrt{15ab}}\ .$$

Решение

Область допустимых значений (ОДЗ) выражения $a \geqslant 0$; $b \geqslant 0$; $3a \neq 5b$. В частности, отсюда вытекает невозможность одновременного обращения в нуль a и b, а потому и необращение в нуль всех выражений, на которые осуществляется деление в исходном выражении.

С помощью формул сокращенного умножения: разности квадратов и квадрата суммы двух чисел, данное выражение преобразуется следующим образом:

$$\frac{7\left(\sqrt{3a} - \sqrt{5b}\right) \cdot 3\left(\left(\sqrt{3a}\right)^2 + \left(\sqrt{5b}\right)^2 + 2\sqrt{3a}\sqrt{5b}\right)}{6\left(\sqrt{3a} + \sqrt{5b}\right)\left(\sqrt{3a} - \sqrt{5b}\right)\left(\sqrt{3a} + \sqrt{5b}\right)} =$$

$$= \frac{7\left(\sqrt{3a} + \sqrt{5b}\right)^2}{2\left(\sqrt{3a} + \sqrt{5b}\right)^2} = \frac{7}{2}\ .$$

Ответ: $7/2$ при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $3a \neq 5b$.

3. Решить неравенство

$$\sqrt{24 - 10x + x^2} > x - 4\ .$$

Решение

$$\sqrt{24 - 10x + x^2} > x - 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)(x-6)} > x - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} (x-4)(x-6) > (x-4)^2\,, \\ (x-4) \geqslant 0\,; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} (x-4)(x-6) \geqslant 0\,, \\ (x-4) < 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} (x-4)(x-6-x+4) > 0\,, \\ (x-4) \geqslant 0\,; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x \geqslant 6\,; \\ x \leqslant 4\,, \end{array}\right. \\ (x-4) < 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 2(x-4) < 0\,, \\ x-4 \geqslant 0\,; \end{array}\right. \\ x < 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing\,; \\ x < 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x < 4\,.$$

Ответ: $x < 4$.

4. Решить уравнение $\sin 5x = \sin 5$.

Решение

$$\sin 5x = \sin 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin\frac{5(x-1)}{2}\cos\frac{5(x+1)}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{5(x-1)}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 1 + \dfrac{2\pi n}{5}\,; \\ \cos\dfrac{5(x+1)}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -1 + \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{2\pi n}{5}\,. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 1 + \dfrac{2\pi n}{5}$; $x = -1 + \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{2\pi n}{5}$; $n = 0$; ± 1 ; ± 2 ; ... .

5. Решить уравнение $(\log_3 x)(5 - 2\log_3 x) = 3$.

Решение

Обозначим $t = \log_3 x$, тогда исходное уравнение примет вид $2t^2 - 5t + 3 = 0$, его решения $t_1 = 1$, $t_2 = \dfrac{3}{2}$, а потому оно оказывается равносильным совокупности простейших логарифмических уравнений,

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3^1 = 3 = x_1\,; \\ \log_3 x = 3/2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3^{3/2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} = x_2\,, \end{array}\right.$$

решения которых x_1 и x_2 дают решения исходного уравнения.

Ответ: $x = 3$; $x = 3\sqrt{3}$.

6. Решить неравенство $|x|(x^4-2x^2-3)\geqslant 0$.

Решение

$x=0$ удовлетворяет неравенству; если $x\neq 0$, то

$$|x|(x^4-2x^2-3)\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^4-2x^2-3\geqslant 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (x^2-3)(x^2+1)\geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; x^2-3\geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})\geqslant 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leqslant -\sqrt{3}\,; \\ x\geqslant \sqrt{3} \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\ (-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty) \;-\; \text{решения последнего неравенства.}$$

Ответ: $x\leqslant -\sqrt{3}\,;\ x=0\,;\ x\geqslant\sqrt{3}$.

7. У треугольника известны длины двух сторон $a=2$, $b=3$ и площадь $S=3\sqrt{15}/4$. Медиана, проведенная к третьей его стороне, меньше ее половины. Найти радиус описанной около этого треугольника окружности.

Решение

Обозначим через γ меру (величину) угла BCA, а через c и m_c — соответственно длины стороны AB и медианы CD $\triangle ABC$.

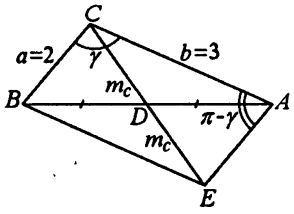


рис. 38

Достроим треугольник ACB до параллелограмма $ACBE$. Так как в параллелограмме диагонали в точке пересечения делятся пополам, противоположные стороны равны и сумма углов, прилежащих одной стороне равна развернутому углу, его диагональ CE будет продолжением медианы CD, ее длина будет равна $2m_c$, длина его стороны AE равна длине BC треугольника BCA, которая равна $a=2$, а величина угла CAE равна $\pi-\gamma$. По формуле площади треугольника

$$S_{\triangle BCA}=\frac{1}{2}ab\sin\gamma \quad \text{имеем:} \quad \sin\gamma=\frac{2S}{ab}=\frac{3\sqrt{15}}{2\cdot 2\cdot 3}=\frac{\sqrt{15}}{4}\,.$$

По теореме косинусов для треугольников ACB и CAE соответственно имеем:

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}, \quad 2m_c=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\gamma}\,.$$

По условию задачи $m_c<c/2\Leftrightarrow c>2m_c\Leftrightarrow -4ab\cos\gamma>0\Leftrightarrow\cos\gamma<0\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ \cos\gamma=-\sqrt{1-\sin^2\gamma}=-\sqrt{1-\frac{15}{16}}=-\sqrt{\frac{1}{16}}=-\frac{1}{4}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ c=\sqrt{4+9+2\cdot 2\cdot 3/4}=\sqrt{16}=4\ \Rightarrow$$

по теореме синусов для треугольника BCA .

$$R_{\text{оп.}}=\frac{c}{2\sin\gamma}=\frac{4\cdot 4}{2\sqrt{15}}=\frac{8}{\sqrt{15}}\ .$$

Ответ: $R_{\text{оп.}}=8/\sqrt{15}$.

8. Из пункта A в пункт B можно доехать тремя маршрутами: или через пункт C, или через пункт D, или напрямую, минуя промежуточные пункты. Расстояния $AB=80$ км, $AC=40$ км, $CB=60$ км, $DB=100$ км, $AD=30$ км. Известно, что пункты A и B , A и C, A и D связывают грунтовые дороги, а пункты C и B , D и B — шоссейные дороги. Скорость на шоссе на 40 км/час больше, чем на грунтовой дороге. Какой маршрут следует выбрать, чтобы скорейшим образом добраться из пункта A в пункт B, если скорость на грунтовой дороге более 15 км/час, но не более 30 км/час?

Решение

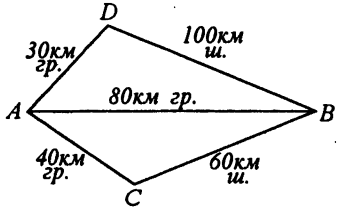


рис. 39

Пусть v (км/ч) — скорость на грунтовой дороге, тогда $(v+40)$(км/ч) — скорость на шоссе;

$$\Rightarrow t_{AB}=\frac{80}{v};\quad t_{ADB}=\frac{30}{v}+\frac{100}{v+40};\quad t_{ACB}=\frac{40}{v}+\frac{60}{v+40}\ .$$

$$\frac{30}{v}+\frac{100}{v+40}\vee\frac{80}{v}\Leftrightarrow\frac{100}{v+40}\vee\frac{50}{v}\Leftrightarrow 2v\vee v+40\Leftrightarrow v\vee 40\ .$$

$$v\leqslant 30\Rightarrow v<40\Rightarrow t_{ADB}<t_{AB}\ .$$

$$\frac{30}{v}+\frac{100}{v+40}\vee\frac{40}{v}+\frac{60}{v+40}\Leftrightarrow\frac{40}{v+40}\vee\frac{10}{v}\Leftrightarrow 4v\vee v+40\Leftrightarrow 3v\vee 40\ .$$

$$v>15\Rightarrow 3v>45>40\Rightarrow t_{ACB}<t_{ADB}<t_{AB}\ .$$

Ответ: маршрут ACB .

1. Какое из чисел больше $\sqrt[3]{58}$ или $\sqrt{15}$?

2. Упростить до численного значения выражение

$$\frac{9\sqrt{7}\sqrt{a}+9\sqrt{3}\sqrt{b}}{8\sqrt{7}\sqrt{a}-8\sqrt{3}\sqrt{b}} : \frac{7a-3b}{28a+12b-8\sqrt{21ab}} .$$

3. Решить неравенство

$$x+5<\sqrt{15+x^2+8x} .$$

4. Решить уравнение

$$\cos 2x = \cos 2 .$$

5. Решить уравнение

$$(2-\log_6 x)\log_6 x = \frac{3}{4} .$$

6. Решить неравенство

$$\frac{1}{|x|}\cdot(x^4-6x^2-16)\leqslant 0 .$$

7. У треугольника известны длины двух сторон $a=6$, $b=8$ и площадь $S=3\sqrt{15}$. Третья его сторона меньше удвоенной медианы, проведенной к ней. Найти радиус вписанной в этот треугольник окружности.

8. Бассейны объемами 1200 м^3, 1400 м^3 и 1600 м^3 можно наполнить: первый - одной первой трубой, второй - сначала 800^3 первой трубой, затем 600^3 второй трубой, третий - сначала 700^3 первой трубой, а затем 900^3 второй трубой. Производительность первой трубы на 400^3/час меньше, чем второй трубы. Какой из бассейнов наполняется быстрее, если производительность второй трубы не менее 700^3/час, но менее 1100^3/час?

3.3.5. *Вариант с решениями задач 1994 г. (июль)*

1. Какое из чисел меньше $2\sqrt{17}$ или $8,(24)$?

Решение

Первый способ. Применим формулу перевода бесконечной периодической десятичной дроби $8,(24) = 8,24242424...24...$ в обыкновенную дробь:

$$2\sqrt{17} \vee 8,(24) \Leftrightarrow 2\sqrt{17} \vee \frac{824-8}{99} = \frac{816}{99} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{17} \vee \frac{408}{99} = \frac{136}{33} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 33\sqrt{17} \vee 136 \Leftrightarrow 17 \cdot 33^2 \vee 136^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1089 \cdot 17 \vee 136^2 \Leftrightarrow 18513 \vee 18496 ,$$

так как $18513 > 18496$, то $2\sqrt{17} > 8,(24)$, отсюда следует ответ.

Второй способ.

$2\sqrt{17} = \sqrt{68} = 8,2462112... > 8,242424...24... = 8,(24)$.

В данном случае приближенное значение $\sqrt{68}$ с любой степенью точности можно получить, применяя алгоритм извлечения квадратного корня из положительного числа (о нем можно прочитать в книге "Элементарная математика", авторы В.В. Зайцев, В.В. Рыжков, М.И. Сканави, М., "Наука", 1974 г. или 1976 г. издания). Здесь также применено правило сравнения положительных бесконечных десятичных дробей.

Ответ: $8,(24)$.

2. Упростить до целого числа выражение

$$3 \cdot \frac{\sqrt{8+2\sqrt{7}}}{\sqrt{8-2\sqrt{7}}} - \frac{\sqrt{3+\sqrt{7}}}{\sqrt{3-\sqrt{7}}} \cdot \sqrt{2} .$$

Решение

$$3 \cdot \frac{\sqrt{8+2\sqrt{7}}}{\sqrt{8-2\sqrt{7}}} - \frac{\sqrt{3+\sqrt{7}}}{\sqrt{3-\sqrt{7}}} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \frac{\sqrt{\left(8+2\sqrt{7}\right)^2}}{\sqrt{8^2-\left(2\sqrt{7}\right)^2}} - \frac{\sqrt{\left(3+\sqrt{7}\right)^2}}{\sqrt{3^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}} \cdot \sqrt{2} =$$

$$= 3 \cdot \frac{8+2\sqrt{7}}{\sqrt{36}} - \frac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{9-7}} \cdot \sqrt{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(8+2\sqrt{7}\right) - \left(3+\sqrt{7}\right) = 4+\sqrt{7}-3-\sqrt{7} = 1 .$$

Ответ: 1 .

3. Решить уравнение $y^2 + 2\sqrt{y^2 + 3y - 4} - 4 + 3y = 0$.

Решение

$y^2 + 2\sqrt{y^2 + 3y - 4} - 4 + 3y = 0 \Leftrightarrow y^2 + 3y - 4 + 2\sqrt{y^2 + 3y - 4} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (t = \sqrt{y^2 + 3y - 4} \Rightarrow t \geqslant 0) \Leftrightarrow t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow (t + 2)t = 0 \Rightarrow$
(так как $t \geqslant 0$)
$t = 0 \Rightarrow y^2 + 3y - 4 = 0 \Rightarrow y = y_1 = -4\ ;\ y = y_2 = 1$.

Ответ: $y = -4\ ;\ y = 1$.

4. Решить уравнение $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$.

Решение

$\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos 3x + 2\cos 3x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x(1 + 2\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} \cos 3x = 0 & \Leftrightarrow & 3x = \pi/2 + \pi n\ ; \\ \cos 2x = -1/2 & \Leftrightarrow & 2x = \pm 2\pi/3 + 2\pi n\ , \end{array} \right.$$

отсюда вытекает ответ.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}\ ;\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n\ ;\ n = 0\ ;\ \pm 1\ ;\ \pm 2\ ;\ \ldots$.

5. Решить неравенство $\sqrt{4z - 3 - z^2} \neq 0$.

Решение

ОДЗ $-z^2 + 4z - 3 \geqslant 0$. Так как при всех таких z $\sqrt{-z^2 + 4z - 3} \geqslant 0$, причем равенство нулю имеет место тогда и только тогда, когда $-z^2 + 4z - 3 = 0$, то

$$\sqrt{4z - 3 - z^2} \neq 0 \Leftrightarrow -z^2 + 4z - 3 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 4z + 3 < 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z - 3) < 0 \ \Rightarrow \text{ ответ.}$$

Ответ: $1 < z < 3$ или $(1, 3)$.

6. Решить неравенство $4\cos x - \sin 2x > 0$.

Решение

$$4\cos x - \sin 2x > 0 \Leftrightarrow 4\cos x - 2\sin x \cos x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2 - \sin x) > 0 \Leftrightarrow (-1 \leqslant \sin x \leqslant 1) \Leftrightarrow \cos x > 0 \ \Rightarrow \text{ ответ.}$$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\ ,\ k = 0\ ;\ \pm 1\ ;\ \pm 2\ ;\ \ldots$.

7. Технология изготовления дискет состоит из четырех этапов. На каждом из них увеличивается содержание кремния на определенное количество процентов по отношению к их количеству на предыдущем этапе: на первом этапе — на 25%, на втором этапе — на 20%, на третьем этапе — на 10%, на четвертом этапе — на 8%. На сколько процентов в результате увеличится содержание кремния ?

Решение

Пусть A — первоначальное количество кремния. Так как увеличение на 25% ; 20% ; 10% ; 8% означает соответственно увеличение в $\frac{5}{4}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{11}{10}$; $\frac{27}{25}$ раз, то (по формуле сложного процента на стр. 23) окончательное количество кремния в дискете будет равно

$$A \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{27}{25} = A \cdot \frac{1782}{1000} = A \cdot 1,782 \,,$$

что составляет $178,2\%$ от A , а это означает увеличение количества кремния на $78,2\%$.

Ответ: 78,2% .

8. Четырехугольник $ABCD$ таков, что в него можно вписать и около него можно описать окружности. Диаметр описанной окружности совпадает с диагональю AC. Доказать, что модули разностей длин его противоположных сторон равны.

Доказательство

Пусть длины сторон AB ; BC ; CD ; DA четырехугольника $ABCD$ соответственно равны a ; b ; c ; d . Так как в $ABCD$ можно вписать окружность, то $a + c = b + d$. Так как AC — диаметр окружности, $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$.

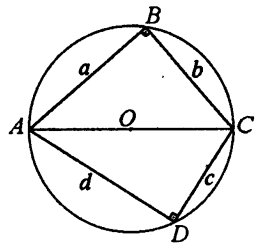


рис. 40

Следовательно, по теореме Пифагора

$$a^2 + b^2 = |AC|^2 = c^2 + d^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - c^2 = d^2 - b^2 \,, \\ a + c = b + d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-c)(a+c) = (d-b)(b+d) \,, \\ a + c = b + d \end{cases}$$

$$\Rightarrow a - c = d - b \Leftrightarrow a - c = -(b - d) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |a - c| = |b - d| \Leftrightarrow |a - c| = |d - b| \Leftrightarrow |c - a| = |b - d| \Leftrightarrow |c - a| = |d - b| \,,$$

что и требовалось доказать.

9. Четыре бригады разрабатывали месторождение горючих сланцев в течение трех лет, работая с постоянной для каждой бригады производительностью. На втором году в течение четырех месяцев работа не производилась, а все остальное время (то есть в течение 32 месяцев) работала только одна из бригад. Отношения времен работ первой, второй, третьей и четвертой бригад и количества выработанной продукции соответственно равны:

в первый год	$4 : 1 : 2 : 5$	и	10 млн. т. ;
во второй год	$2 : 3 : 2 : 1$	и	7 млн. т. ;
в третий год	$5 : 2 : 1 : 4$	и	14 млн. т. .

Сколько млн. т. горючих сланцев выработали бы за 4 месяца четыре бригады, работая все вместе ?

Решение

Пусть x ; y ; z ; t (млн. т.) — объемы добычи горючих сланцев за 1 месяц соответственно первой; второй; третьей и четвертой бригадами, тогда искомая величина равна

$$4(x+y+z+t) .$$

В силу условий задачи (так как, в частности, в году 12 месяцев $4+1+2+5=12$; $2+3+2+1=8$; $5+2+1+4=12$) объемы добычи сланцев в первый; второй; третий годы соответственно равны:

$$4x+y+2z+5t \ ; \ 2x+3y+2z+t \ ; \ 5x+2y+z+4t \ ,$$

откуда мы получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x+y+2z+5t=10 \ , \\ 2x+3y+2z+t=7 \ , \\ 5x+2y+z+4t=14 \ . \end{cases}$$

Для определения суммы $x+y+z+t$ умножим первое уравнение на α, второе уравнение — на β, третье уравнение — на γ, причем α , β , γ будут подобраны из условий

$$4\alpha+2\beta+5\gamma=\alpha+3\beta+2\gamma=2\alpha+2\beta+\gamma=5\alpha+\beta+4\gamma \ ,$$

при которых, *если сложить* все полученные уравнения, то коэффициенты при x, y, z, t *будут равны*. Получаем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} 4\alpha+2\beta+5\gamma=\alpha+3\beta+2\gamma \ , \\ 4\alpha+2\beta+5\gamma=2\alpha+2\beta+\gamma \ , \\ 4\alpha+2\beta+5\gamma=5\alpha+\beta+4\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha-\beta=-3\gamma \ , \\ \alpha=-2\gamma \ , \\ \alpha=\beta+\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta=-3\gamma \ , \\ \alpha=-2\gamma \ , \\ \alpha=\beta+\gamma \ . \end{cases}$$

Последней системе удовлетворяют, например, $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = -1$. Проводя теперь указанную операцию, мы получим

$$9(x+y+z+t) = 27 \;\Leftrightarrow\; x+y+z+t = 3 \;\Leftrightarrow\; 4(x+y+z+t) = 12 .$$

Ответ: 12 млн. т.

10. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$. Через вершину B проведена диагональ. Найти отношение площади сечения этого куба плоскостью, перпендикулярной указанной диагонали и проходящей через ее середину, к площади его полной поверхности.

Решение

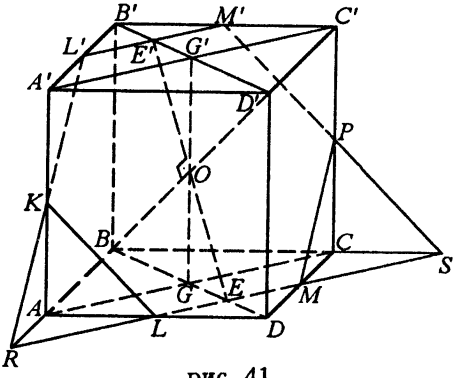


рис. 41

Пусть длина ребра куба равна a, тогда длина диагонали его грани будет равна $\sqrt{2}a$, а длина диагонали куба будет равна $\sqrt{3}a$. Следовательно, $\cos(\angle BD'B') = \sqrt{2}/\sqrt{3}$. Точка O — середина диагонали BD'.

Построение сечения

В плоскости $BB'D'D$ из точки O восстановим перпендикуляр к BD', он пересечет *диагональ* $B'D'$ грани $A'B'C'D'$ в точке E', так как

$$|D'E'| = \frac{|D'O|}{\cos(\angle E'D'O)} = \frac{|D'O|}{\sqrt{2}/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{2}a < \sqrt{2}a = |D'B'| ,$$

аналогичным образом он пересечет *диагональ* BD в точке E. Через точку E' проводим $L'M'$ параллельно $A'C'$, а через точку E проводим LM параллельно AC, откуда: $L'M'$ принадлежит плоскости $A'B'C'D'$, LM принадлежит плоскости $ABCD$, L' принадлежит ребру $A'B'$, M' принадлежит ребру $B'C'$, L принадлежит ребру AD, M принадлежит ребру CD .

Отметим, что в силу параллельности AC и $A'C'$, а также транзитивности свойства параллельности прямых вытекает параллельность LM и $L'M'$.

В силу свойств куба

$$\left\{\begin{array}{l} A'C' \perp BB'D'D\,, \\ AC \perp BB'D'D \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} L'M' \perp BB'D'D\,, \\ LM \perp BB'D'D \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow LM \parallel L'M' \text{ и } \left\{\begin{array}{l} L'M' \perp BB'D'D\,, \\ LM \perp BB'D'D\,. \end{array}\right. \text{ Из } \left\{\begin{array}{l} BD' \perp EE'\,, \\ BD' \perp LM \end{array}\right. \text{ вытекает,}$$

что диагональ BD' перпендикулярна плоскости, проходящей через LM и EE'. Так как точка E' принадлежит $L'M'$ и $L'M' \parallel LM$, то этой же плоскости будет принадлежать и $L'M'$. Следовательно, эта плоскость содержит искомое сечение.

Продолжим LM и AB до пересечения в точке R, а также продолжим LM и BC до пересечения в точке S. Соединим точки R и L', а также соединим точки S и M', обозначим за K точку пересечения RL' и AA' и за P точку пересечения $M'S$ и CC', откуда вытекает, что шестиугольник $LKL'M'PM$ — искомое сечение.

Так как $|D'E'| = 3a\sqrt{2}/4$, то $|B'E'| = a\sqrt{2}/4 = |E'G'|$, где G' — точка пересечения диагоналей $A'C'$ и $B'D'$ грани $A'B'C'D'$. $L'M' \parallel A'C' \Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle B'L'M' \sim \triangle B'A'C'$ с коэффициентом подобия

$$k = \frac{|B'E'|}{|B'G'|} = \frac{1}{2} = \frac{|B'L'|}{|B'A'|} = \frac{|B'M'|}{|B'C'|} = \frac{|L'M'|}{|A'C'|}\,.$$

Следовательно, $|L'M'| = a\sqrt{2}/2$, $|B'L'| = |B'M'| = a/2 = |A'L'| = |C'M'|$, в частности, $\triangle B'L'M'$ — прямоугольный и равнобедренный, а потому градусные меры его острых углов равны 45°. Аналогично доказывается, что $|LM| = a\sqrt{2}/2$, $|DL| = |DM| = a/2 = |AL| = |CM|$, в частности, $\triangle DLM$ — прямоугольный и равнобедренный, а потому $\widehat{DLM} = \widehat{DML} = 45°$. Следовательно, меры вертикальных с ними углов $\widehat{RLA} = \widehat{SMC} = 45°$. Так как $\triangle RAL$ и $\triangle SCM$ прямоугольные, то и $\widehat{LRA} = \widehat{MSC} = 45°$. Следовательно, $\triangle LRA$ и $\triangle MSC$ равнобедренные и прямоугольные, а потому $|AL| = |AR| = |CM| = |CS| = a/2$. Треугольники AKR и $A'KL'$ прямоугольные, имеют по равному катету ($|AR| = |A'L'| = a/2$) и равному острому углу ($\angle RKA = \angle A'KL'$), следовательно, они равны, а потому $|AK| = |KA'| = a/2$. Теперь из равенства шести прямоугольных треугольников $ARL; ARK; ALK; KA'L'; B'L'M'; DML$ по двум катетам вытекает:

$$|AK| = |AR| = |AL| = |KA'| = |A'L'| = |L'B'| = |B'M'| = |DL| = |DM| = \frac{a}{2}$$

и на основе теоремы Пифагора мы имеем:

$$|KR| = |KL| = |RL| = |KL'| = |L'M'| = |LM| = \frac{a\sqrt{2}}{2} .$$

Отсюда, в частности, следует, что $\triangle RKL$ — равносторонний.

Поэтому $\widehat{KRL} = \widehat{RKL} = \widehat{KLR} = 60°$, откуда $\widehat{LKL'} = \widehat{KLM} = 120°$.

Аналогичным образом доказываются равенства $a/2$ длин отрезезков CP ; PC' ; CS , а так как $|CM| = |CD| - |DM| = a/2 =$
$= |C'B'| - |B'M'| = |C'M'|$, то имеет место равенство четырех прямоугольных треугольников CMP ; CSP ; CMS ; $PC'M'$ по двум катетам. Следовательно, применяя также теорему Пифагора, мы имеем:

$$|PS| = |PM| = |SM| = |PM'| = \frac{a\sqrt{2}}{2} .$$

Отсюда, в частности, следует, что $\triangle SPM$ — равносторонний. Следовательно, $\widehat{PSM} = \widehat{SPM} = \widehat{PMS} = 60°$, откуда $\widehat{MPM'} = \widehat{PML} = 120°$.

Так как $LM \parallel L'M'$ или что то же самое $RS \parallel L'M'$ по свойству внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей $\widehat{KL'M'} = 180° - \widehat{KRL} = 180° - \widehat{PSM} = \widehat{PM'L'} = 120°$.

Таким образом, мы получили, что у построенного сечения куба — шестиугольника $LKL'M'PM$ равны все стороны и все внутренние углы. Следовательно, этот шестиугольник — *правильный*.

По формуле площади правильного n-угольника с длиной стороны b

$$S = \frac{nb^2}{4} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{180°}{n}\right) ,$$

при $n = 6$, $b = a\sqrt{2}/2$ имеем:

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{6b^2 \operatorname{ctg} 30°}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4} .$$

В силу того, что площадь полной поверхности куба с длиной стороны, равной a, $S_{\text{п.п.}}$ равна $6a^2$, искомое отношение площадей равно

$$\frac{a^2 \cdot 3\sqrt{3}}{a^2 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{\sqrt{3}}{8} .$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

1. Какое из чисел меньше $2\sqrt{14}$ или $7,(48)$?

2. Упростить до целого числа выражение

$$5 \cdot \frac{\sqrt{7-2\sqrt{6}}}{\sqrt{7+2\sqrt{6}}} + 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3+\sqrt{6}}}{\sqrt{3-\sqrt{6}}} .$$

3. Решить уравнение $10 - z^2 - 5\sqrt{z^2 - 3z - 10} + 3z = 0$.

4. Решить уравнение $\sin 2x - \sin 6x + \sin 10x = 0$.

5. Решить неравенство $\sqrt{-8 - 6y - y^2} \neq 0$.

6. Решить неравенство $3 \sin x + \sin 2x < 0$.

7. Процесс очищения воды в водохранилище от содержания в ней тяжелых металлов состоял из четырех этапов. На каждом из этапов их содержание уменьшалось на определенное количество процентов по отношению к их количеству на предыдущем этапе: на первом этапе — на 25%, на втором этапе — на 20%, на третьем этапе — на 15%, на четвертом этапе — на 10%. На сколько процентов в результате уменьшилось их содержание ?

8. Четырехугольник $ABCD$ таков, что около него можно описать и в него можно вписать окружности. Разность длин сторон AD и BC равна разности длин сторон AB и CD. Доказать, что диагональ AC - диаметр описанной окружности.

Указание. Использовать аналогичные обозначения и применить такие же рассуждения, что и в начале решения восьмой задачи разобранного варианта. Затем получить равенство квадратов разностей длин противоположных сторон четырехугольника, откуда будет вытекать равенство суммы квадратов длин сторон четырехугольника, лежащих по одну сторону от диагонали AC, сумме квадратов длин его сторон, лежащих по другую сторону от диагонали AC. Далее, применяя теорему косинусов для треугольников ABC и ADC, на основе равенства суммы противолежащих углов вписанного четырехугольника развернутому углу получить равенство нулю косинусов углов при вершинах B и D четырехугольника $ABCD$.

9. Четыре бригады разрабатывали месторождение железной руды в течение трех лет, работая с постоянной для каждой бригады производительностью. По одному месяцу на первом и третьем году работа не велась, а все остальное время (то есть в течение 34 месяцев) работала только одна из бригад. Отношения времен работ первой, второй, третьей и четвертой бригад и количества выработанной продукции соответственно равны:

в первый год	3 : 2 : 4 : 2	и	10 млн. т.;
во второй год	4 : 2 : 5 : 1	и	9 млн. т.;
в третий год	4 : 3 : 3 : 1	и	8 млн. т..

Сколько млн. т. железной руды выработали бы за 7 месяцев четыре бригады, работая все вместе ?

10. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, в нем проведена диагональ через вершину B, а через вершину B' (конец ребра BB') проведено сечение этого куба перпендикулярно указанной диагонали. Найти отношение площади этого сечения к площади полной поверхности куба. В каком отношении сечение делит эту диагональ ?

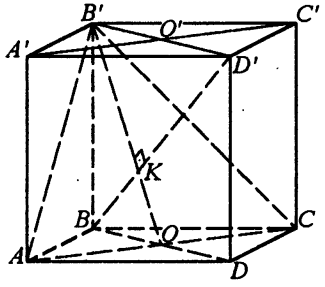


рис. 42

Указание. Проводя в плоскости $BB'D'D$ $B'K \perp BD'$, K принадлежит диагонали BD' доказать, что продолжение $B'K$ попадет в точку O пересечения диагоналей грани куба $ABCD$, затем доказать, что искомое сечение — треугольник $AB'C$.

3.3.7. Вариант с решениями задач 1995 г. (май)

1. Решить неравенство

$$\frac{7}{(x-2)(x-3)}+\frac{9}{x-3}+1\leqslant 0\,.$$

Решение

Приведем к общему знаменателю слагаемые в левой части неравенства, при этом оно преобразуется в равносильное ему неравенство, имеющее вид:

$$\frac{7+9(x-2)+(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)}\leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{7+9x-18+x^2-2x-3x+6}{(x-2)(x-3)}\leqslant 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{x^2+4x-5}{(x-2)(x-3)}\leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{(x+5)(x-1)}{(x-2)(x-3)}\leqslant 0\,.$$



рис. 43

Решая полученное неравенство методом интервалов (это символически показано на рис. 43), мы получим, что исходному неравенству удовлетворяют те и только те значения x, для которых $-5\leqslant x\leqslant 1$ и $2<x<3$.

Ответ: $-5\leqslant x\leqslant 1\,;\; 2<x<3\,.$

2. Решить уравнение

$$\log_2(11-x)+\log_2(x+1)=\log_2[(x+1)(x^2+5x-5)]\,.$$

Решение

$$\text{ОДЗ}\quad\begin{cases} x+1>0\,,\\ 11-x>0\,,\\ x^2+5x-5>0 \end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases} -1<x<11\,,\\ x^2+5x-5>0\,. \end{cases}$$

В силу формулы для суммы логарифмов одного основания уравнение переписывается в виде

$$\log_2(11-x)(x+1)=\log_2[(x+1)(x^2+5x-5)]\overset{\text{ОДЗ}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\ (11-x)(x+1)=(x+1)(x^2+5x-5)\ \Leftrightarrow\ (x+1)(x^2+6x-16)=0\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ (x+1)(x+8)(x-2)=0\ .$$

Полученное уравнение, очевидно, имеет три решения:

$$x=-8\ ;\ x=-1\ ;\ x=2\ .$$

Так как ОДЗ удовлетворяет лишь $x=2$ (в этом можно убедиться непосредственной подстановкой этого значения x в неравенство $x^2+5x-5>0$), то мы и получаем единственное решение исходного уравнения $x=2$.

Ответ: $x=2$.

3. Решить уравнение $\sqrt{\sin x}=-\cos x$.

Решение

С учетом неотрицательности значений квадратного корня исходное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases}\sin x=(-\cos x)^2\ ,\\ -\cos x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x=1-\sin^2 x\ ,\\ \cos x\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2 x+\sin x-1=0\ ,\\ \cos x\leqslant 0\ ,\end{cases}$$

где, в частности, было применено основное тригонометрическое тождество.

Положим $t=\sin x$, тогда с учетом области изменения функции синус $-1\leqslant t\leqslant 1$, но так как первоначально $\sin x$ находился под знаком квадратного корня и затем при почленном возведении исходного уравнения в квадрат — стал равен неотрицательному выражению — $0\leqslant t\leqslant 1$.

Уравнение принимает вид:

$$t^2+t-1=0\ .$$

Его решения это $t=t_1=-(\sqrt{5}+1)/2<0$ и потому не подходит, а также $t=t_2=(\sqrt{5}-1)/2>0$ и $(\sqrt{5}-1)/2<(3-1)/2=1$, это значение t уже подходит. Мы имеем:

$$\begin{cases}\sin x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\ ,\\ \cos x\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=x_1=\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n\ ;\\ x=x_2=\pi-\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n\ ,\ \forall n\in Z\ ,\end{array}\right.\\ \cos x\leqslant 0\end{cases}$$

Так как

$$0<\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\frac{\pi}{2}\ ,$$

то $\cos x_1 > 0$ и потому эта серия значений x отпадает ; но уже

$$\frac{\pi}{2} < \pi - \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \pi ,$$

поэтому $\cos x_2 < 0$ и, следовательно, эта серия значений x является решением исходного уравнения.

Ответ: $x = \pi - \arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n$, $n = 0$; ± 1 ; ± 2 ; ... .

4. Решить неравенство $25^{-x} - 5^{-x+1} \geqslant 50$.

Решение

С учетом свойств степеней исходное неравенство преобразуется в серию равносильных ему неравенств следующим образом:

$$25^{-x} - 5^{-x+1} \geqslant 50 \Leftrightarrow (5\cdot 5)^{-x} - 5\cdot 5^{-x} \geqslant 50 \Leftrightarrow (5^{-x})^2 - 5\cdot 5^{-x} - 50 \geqslant 0.$$

Положим $t = 5^{-x}$, в силу области изменения показательной функции $t > 0$. При этом неравенство принимает вид $t^2 - 5t - 50 \geqslant 0$. Решения соответствующего квадратного уравнения $t^2 - 5t - 50 = 0$ это

$$t = t_1 = \frac{5 - \sqrt{25+200}}{2} = \frac{5-\sqrt{225}}{2} = \frac{5-15}{2} = -5 \quad \text{и}$$

$$t = t_2 = \frac{5 + \sqrt{25+200}}{2} = \frac{5+\sqrt{225}}{2} = \frac{5+15}{2} = 10 .$$

Тогда решения квадратного неравенства относительно t будут следующие $t \leqslant -5$ и $t \geqslant 10$, но с учетом того, что $t > 0$ подходит лишь $t \geqslant 10$.

Исходное неравенство свелось к неравенству $5^{-x} \geqslant 10$. В силу возрастания показательной функции с основанием $5 > 1$ получаем

$$-x \geqslant \log_5 10 = \log_5(5\cdot 2) = \log_5 5 + \log_5 2 = 1 + \log_5 2 \Leftrightarrow x \leqslant -(1+\log_5 2) .$$

Последнее неравенство и дает окончательный ответ.

Ответ: $x \leqslant -1 - \log_5 2$.

5. Поезд, идущий с постоянной скоростью из пункта A в пункт B , был задержан у семафора на 16 мин. Расстояние от семафора до пункта B равно 80 км. При каких значениях первоначальной скорости поезд прибудет в пункт B не позже запланированного срока, если после задержки он увеличил скорость на 10 км./час ?

Решение

Обозначим за v — первоначальную скорость поезда (в км./час.), а за x — расстояние от пункта A до пункта стоянки (в км.). Тогда расстояние между пунктами A и B будет равно $x+80$ км.

$\dfrac{x+80}{v}$ — запланированное время движения (в часах).

Так как 16 мин. $= 4/15$ час. и по условию $v+10$ км./час. — скорость поезда после стоянки, фактически затраченное время поездом на путь из A в B с учетом стоянки равно (в часах)

$$\frac{x}{v}+\frac{4}{15}+\frac{80}{v+10}\,.$$

В силу условия прибытия поезда в пункт B не позже запланированного срока должно выполняться неравенство

$$\frac{x}{v}+\frac{4}{15}+\frac{80}{v+10}\leqslant\frac{x+80}{v}\,.$$

Это неравенство равносильно следующей серии неравенств (с учетом того, что по смыслу задачи $v>0$)

$$\frac{80}{v}-\frac{80}{v+10}\geqslant\frac{4}{15}\;\Leftrightarrow\;\frac{300(v+10-v)}{v(v+10)}\geqslant 1\;\Leftrightarrow\;v^2+10v-3000\leqslant 0\,.$$

Решения соответствующего квадратного уравнения $v^2+10v-3000=0$ это

$$v=v_1=-5-\sqrt{25+3000}=-5-\sqrt{3025}=-5-55=-60\quad\text{и}$$

$$v=v_2=-5+\sqrt{25+3000}=-5+\sqrt{3025}=-5+55=50\,.$$

Тогда решения квадратного неравенства относительно v будут следующие $-60\leqslant v\leqslant 50$, но с учетом того, что $v>0$ окончательным ответом являются следующие значения v : $0<v\leqslant 50$.

Ответ: $0<v\leqslant 50$ км./час .

6. Биссектриса одного из острых углов прямоугольного треугольника в точке пересечения с высотой, опущенной на гипотенузу, делится на отрезки, отношение длин которых равно $1+\sqrt{2}$, считая от вершины. Найти величины острых углов треугольника.

Решение

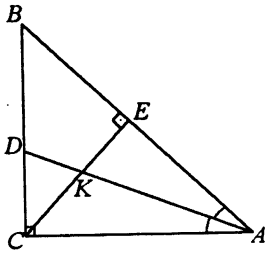


рис. 44

Пусть AD — биссектриса, CE — высота, о которых говорится в условии задачи, K — точка их пересечения, $\angle CAB$ и $\angle CBA$ — острые углы прямоугольного $\triangle ACB$, их величины $\widehat{CAB} = \alpha$, $\widehat{CBA} = \beta$. Тогда по условию

$$\frac{|AK|}{|KD|} = 1 + \sqrt{2}\,.$$

Рассмотрим $\triangle AKE$ и $\triangle ACD$. Они прямоугольные и у них $\angle CAD = \angle DAB$. Следовательно, $\triangle AKE \sim \triangle ACD$, а потому имеют место равенства

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|AD|}{|AK|} = \frac{|AK|+|KD|}{|AK|} = 1+\frac{|KD|}{|AK|} = 1+\frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1+(\sqrt{2}-1)\,,$$

$$\text{откуда} \qquad \frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \beta = \alpha = 45^\circ\,.$$

Ответ: 45°.

7. Пусть $f(x) = \sqrt{x^2-4x+4}-3$, $g(x) = \sqrt{x}-a$, a — параметр. Решить относительно x неравенство $f(g(x)) \leqslant 0$.

Решение

$$\text{ОДЗ } x \geqslant 0\,; \quad f(x) = \sqrt{x^2-4x+4}-3 = \sqrt{(x-2)^2}-3 = |x-2|-3\,,$$

а потому неравенство $f(g(x)) \leqslant 0$ преобразуется следующим образом

$$f(g(x)) = |\sqrt{x}-a-2|-3 \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; |\sqrt{x}-a-2| \leqslant 3 \;\Leftrightarrow\; -3 \leqslant \sqrt{x}-a-2 \leqslant 3 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a-1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant a+5\,.$$

Ввиду того, что при всех $x \geqslant 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geqslant 0$ при $a+5<0$ или $a<-5$ неравенство не имеет решений;

при $a+5 \geqslant 0$, $a-1 \leqslant 0$ или $-5 \leqslant a \leqslant 1$

$$a-1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant a+5 \Leftrightarrow 0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant a+5 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant (a+5)^2 ;$$

при $a > 1$ или $a-1 > 0$

$$a-1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant a+5 \Leftrightarrow (a-1)^2 \leqslant x \leqslant (a+5)^2 .$$

Решение задачи завершено.

Ответ:	$\varnothing$ при $a < -5$; $0 \leqslant x \leqslant (a+5)^2$ при $-5 \leqslant a \leqslant 1$; $(a-1)^2 \leqslant x \leqslant (a+5)^2$ при $a > 1$.

8. Изобразить фигуру, образованную всеми точками $(x;y)$ декартовой плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$x^2 + y^2 + 6(x - |y|) \leqslant 0 .$$

Найти площадь этой фигуры.

Решение

Преобразуем левую часть неравенства, фигурирующего в условии этой задачи, применяя метод выделения полного квадрата, и то, что $y^2 = |y|^2$, тогда это неравенство преобразуется так :

$$x^2 + 6x + 9 + |y|^2 - 6|y| + 9 \leqslant 18 \Leftrightarrow (x+3)^2 + (|y| - 3)^2 \leqslant (3\sqrt{2})^2 .$$

А) Пусть $y \leqslant 0$, тогда $|y| = -y$, неравенство при этом принимает вид

$$(x+3)^2 + (-y-3)^2 \leqslant (3\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y+3)^2 \leqslant (3\sqrt{2})^2 .$$

Множество точек $M(x;y)$ на координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют последнему неравенству, представляет собой внутренность круга вместе с его границей радиуса $3\sqrt{2}$ с центром в точке $O_1(-3;-3)$, которая также расположена не выше оси абсцисс Ox.

Б) Пусть $y \geqslant 0$, тогда $|y| = y$, неравенство при этом принимает вид

$$(x+3)^2 + (y-3)^2 \leqslant (3\sqrt{2})^2 .$$

Множество точек $M(x;y)$ на координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют последнему неравенству, представляет собой внутренность круга вместе с его границей радиуса $3\sqrt{2}$ с центром в точке $O_1(-3;3)$, эта внутренность также расположена не ниже оси абсцисс Ox.

На нижеследующем рис. 45 изображена система координат с изображенной на ней искомой фигурой

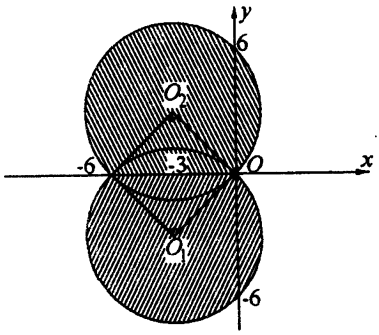


рис. 45

Общий участок границ фигур, полученных в каждом из случаев А) и Б), представляет собой отрезок оси Ox $-6 \leqslant x \leqslant 0$. Пусть A — $A(-6;0)$. Так как

$$|O_1O|^2 + |O_1A|^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 18 + 18 = 36 = 6^2 = |OA|^2$$

и также

$$|O_2O|^2 + |O_2A|^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 18 + 18 = 36 = 6^2 = |OA|^2 ,$$

$\triangle OAO_1$ и $\triangle OAO_2$ — прямоугольные с прямыми углами при вершинах O_1 и O_2 соответственно. Поэтому построенная фигура представляет собой объединение взятыми 2 раза тремя четвертями круга радиуса $3\sqrt{2}$ и равнобедренного прямоугольного треугольника с длинами катетов также равными $3\sqrt{2}$. Ее площадь будет равна

$$2 \cdot \left(\frac{3}{4}\pi\left(3\sqrt{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(3\sqrt{2}\right)^2\right) = 27\pi + 18 .$$

Задача решена полностью. **Ответ:** $27\pi + 18$.

9. Для каждого значения параметра a решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{\log_2(|a|x^2 - 3x + 4)}{\log_2(-3x + 4)} = 5^{-|x|(x+1)^2} , \\ x \leqslant 1 . \end{cases}$$

Решение

Так как при всех x и a $\Rightarrow$ $|a|x^2 \geqslant 0$, то левая часть неравенства определена при следующих значениях x (ОДЗ)

$$\begin{cases} 4-3x>0\,, \\ \log_2(4-3x)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-3x>0\,, \\ 4-3x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\dfrac{4}{3}\,, \\ x\neq 1\,. \end{cases}$$

С учетом условия $x \leqslant 1$ задача свелась к следующей: при всех значениях параметра a решить фигурирующее в системе уравнение при условии $x<1$.

Условие $x<1 \Leftrightarrow 4-3x>1$. В силу возрастания логарифмической функции с основанием $2>1$, условия $|a|x^2 \geqslant 0$, из которого получаем

$$|a|x^2-3x+4 \geqslant -3x+4>1\,,$$

мы имеем $\log_2(|a|x^2-3x+4) \geqslant \log_2(-3x+4) > \log_2 1 = 0$.

Следовательно, левая часть неравенства при рассматриваемых x больше или равна 1.

Так как при всех значениях x, в том числе и $x<1$ $\Rightarrow$ $|x|(x+1)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow -|x|(x+1)^2 \leqslant 0$, в силу возрастания показательной функции 5^x правая часть неравенства при рассматриваемых x меньше или равна $5^0=1$.

Следовательно, исходная система свелась к системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\log_2(|a|x^2-3x+4)}{\log_2(-3x+4)}=1\,, \\ 5^{-|x|(x+1)^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(|a|x^2-3x+4)=\log_2(-3x+4)\,, \\ 5^{-|x|(x+1)^2}=5^0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |a|x^2-3x+4=-3x+4\,, \\ -|x|(x+1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a|x^2=0\,, \\ |x|(x+1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0\,, \\ x=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} a=0\,, \\ \left[\begin{array}{l} x=0\,; \\ x=-1\,. \end{array}\right. \end{cases}$$

Полученные значения x, очевидно, меньше 1, поэтому последние две системы относительно x и a дают окончательный ответ.

Ответ: $x=-1$; $x=0$ при $a=0$; $x=0$ при $a\neq 0$.

3.3.8. Вариант для самостоятельного решения 1995 г. (май)

1. Решить неравенство $\dfrac{20}{(x-3)(x-4)} + \dfrac{10}{x-4} + 1 \leqslant 0$.

2. Решить уравнение

$$\log_3(11-x) + \log_3(x+2) = \log_3[(x+2)(x^2+3x-10)] .$$

3. Решить уравнение $\sqrt{\cos x} = -\sin x$.

4. Решить неравенство $9^{-x} - 3^{-x+2} \geqslant 36$.

5. Поезд, идущий с постоянной скоростью из пункта A в пункт B, был задержан на полустанке на 24 мин. Расстояние от полустанка до пункта B равно 96 км. При каких значениях первоначальной скорости поезд прибудет в пункт B не позже запланированного срока, если после задержки он увеличил скорость на 12 км./час ?

6. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к его гипотенузе, делит биссектрису одного из острых углов на отрезки, отношение длин которых равно $3 + 2\sqrt{3}$, считая от вершины. Найти величины острых углов треугольника.

7. Пусть $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9} - 2$, $g(x) = \sqrt{x} - a$, a — параметр. Решить относительно x неравенство

$$f(g(x)) \leqslant 0 .$$

8. Изобразить фигуру, образованную всеми точками $(x;y)$ декартовой плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$x^2 + y^2 + 4(x - |y|) \leqslant 0 .$$

Найти площадь этой фигуры.

9. Для каждого значения параметра a решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{\log_3(|a|x^2 - 4x + 5)}{\log_3(-4x+5)} = 2^{-|x|(x+3)^2} , \\ x \leqslant 1 . \end{cases}$$

3.3.9. Вариант с решениями задач 1995 г. (июль)

1. Решить уравнение $\sqrt{5x-6}+x=4$.

Решение

С учетом неотрицательности значений квадратного корня исходное уравнение равносильно следующей системе

$$\begin{cases} 5x-6=(4-x)^2, \\ 4-x\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-6=16-8x+x^2, \\ x\leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-13x+22=0, \\ x\leqslant 4, \end{cases}$$

Корни полученного квадратного уравнения находятся по формулам

$$x_1=\frac{13-\sqrt{169-88}}{2}=\frac{13-\sqrt{81}}{2}=\frac{13-9}{2}=2<4;$$

$$x_2=\frac{13+\sqrt{169-88}}{2}=\frac{13+\sqrt{81}}{2}=\frac{13+9}{2}=11>4.$$

Теперь очевидно, что подходит, то есть является решением исходного уравнения, только $x=x_1=2$.

Ответ: $x=2$.

2. Решить неравенство $x^2-6\geqslant |x|$.

Решение

С учетом того, что $x^2=|x|^2$ и $|x|\geqslant 0$, исходное неравенство преобразуется следующим образом

$$|x|^2-|x|-6\geqslant 0 \Leftrightarrow (|x|-3)(|x|+2)\geqslant 0 \Leftrightarrow |x|-3\geqslant 0 \Leftrightarrow |x|\geqslant 3,$$

откуда, раскрывая модуль, и получаем окончательный ответ.

Ответ: $x\leqslant -3$; $x\geqslant 3$.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3\cdot\sqrt{x-y}=0, \\ 2y^2+y=21+2xy. \end{cases}$$

Решение

В силу того, что по ОДЗ $x-y\geqslant 0$,

$$x^3\cdot\sqrt{x-y}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=0; \\ x-y=0, \end{array}\right.$$

совокупность решений данной системы уравнений является объединением решений следующих систем

$$\begin{cases} x = 0\,, \\ 2y^2 + y - 21 = 0\,, \\ y \leqslant 0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} x = y\,, \\ y = 21\,, \end{cases}$$

при этом вторые уравнения в этих системах получаются в результате подстановки соответственно $x = 0$ и $x = y$ из первых уравнений во второе уравнение исходной системы, а условие $y \leqslant 0$ — при подстановке $x = 0$ в ОДЗ.

Корни полученного квадратного уравнения $2y^2 + y - 21 = 0$ находятся по формулам

$$y_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 168}}{4} = \frac{-1 - \sqrt{169}}{4} = \frac{-1 - 13}{4} = -\frac{7}{2} < 0\,,$$

$$y_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 168}}{4} = \frac{-1 + \sqrt{169}}{4} = \frac{-1 + 13}{4} = 3 > 0\,,$$

второй из которых, стало быть, является посторонним.

Ответ: $x = 0\,,\ y = -7/2$ и $x = 21\,,\ y = 21\,.$

4. Решить неравенство

$$\frac{3^x - 2}{x^2 - 6x + 5} \leqslant 0\,.$$

Решение

Множество решений этого неравенства является объединением множеств решений следующих систем неравенств

$$\begin{cases} 3^x - 2 \geqslant 0\,, \\ x^2 - 6x + 5 < 0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} 3^x - 2 \leqslant 0\,, \\ x^2 - 6x + 5 > 0\,. \end{cases}$$

Корни квадратного уравнения $x^2 - 6x + 5 = 0$ это $x_1 = 1\,;\ x_2 = 5\,.$ Поэтому, решая квадратные неравенства, а также и простейшие показательные неравенства $3^x \geqslant 2$ и $3^x \leqslant 2$, мы получим соответственно следующие системы

$$\begin{cases} x \geqslant \log_3 2\,, \\ 1 < x < 5 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} x \leqslant \log_3 2\,, \\ \left[\begin{array}{l} x < 1\,; \\ x > 5\,. \end{array}\right. \end{cases}$$

Так как $\log_3 2 < \log_3 3 = 1$, соответственно последние первая и вторая системы дают $1 < x < 5$ и $x \leqslant \log_3 2$ что и является окончательным ответом. **Ответ:** $x \leqslant \log_3 2\,;\ 1 < x < 5\,.$

5. Решить уравнение

$$[2\sqrt{3}\sin(\pi x+3\pi)-\operatorname{tg}(\pi x-\pi/2)]\log_2(4-x^2)=0\ .$$

Решение

ОДЗ $4-x^2>0 \Leftrightarrow -2<x<2$ и $\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)\neq 0$. Следовательно, данное уравнение с учетом применения формул приведения к тригонометрическим выражениям будет равносильно следующей системе

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\log_2(4-x^2)=0\ ;\\ \operatorname{ctg}(\pi x)-2\sqrt{3}\sin(\pi x)=0\ ,\end{array}\right.\\ \sin(\pi x)\neq 0\ ,\\ -2<x<2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}4-x^2=1\ ;\\ \cos(\pi x)-2\sqrt{3}\sin^2(\pi x)=0\ ,\end{array}\right.\\ \sin(\pi x)\neq 0\ ,\\ -2<x<2\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=-\sqrt{3}\ ;\\ x=\sqrt{3}\ ;\\ 2\sqrt{3}\cos^2(\pi x)+\cos(\pi x)-2\sqrt{3}=0\ ,\end{array}\right.\\ \sin(\pi x)\neq 0\ ,\\ -2<x<2\ .\end{array}\right.$$

Положим $t=\cos(\pi x)$, откуда $-1\leqslant t\leqslant 1$, при этом квадратное уравнение относительно $\cos(\pi x)$ примет вид $2\sqrt{3}t^2+t-2\sqrt{3}=0$. Корни этого уравнения находятся по формуле этих корней

$$t=t_1=\frac{-1-\sqrt{1+4\cdot(2\sqrt{3})^2}}{4\sqrt{3}}=\frac{-1-\sqrt{49}}{4\sqrt{3}}=\frac{-1-7}{4\sqrt{3}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}<-1\ ,$$

$$0<t=t_2=\frac{-1+\sqrt{49}}{4\sqrt{3}}=\frac{-1+7}{4\sqrt{3}}=\frac{6}{4\sqrt{3}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}<1\ .$$

Таким образом, подходит только $t=t_2$, при этом в силу основного тригонометрического тождества $\sin(\pi x)\neq 0$.

Решения уравнения $\cos(\pi x)=\sqrt{3}/2$ имеют вид $x=\pm 1/6+2n$, $\forall n\in Z$, но условию $-2<x<2$ из этой серии решений удовлетворяют только $x=1/6$; $x=-1/6$; $x=11/6$; $x=-11/6$. Объединяя эти решения с полученными ранее $x=\sqrt{3}$; $x=-\sqrt{3}$; получим окончательный ответ.

Ответ: $x=\pm 1/6$; $x=\pm 11/6$; $x=\pm\sqrt{3}$.

6. Имеются два слитка, содержащие медь. Масса второго слитка на 3 кг. больше, чем масса первого слитка. Процентное содержание меди в первом слитке — 10%, а во втором — 40%. После сплавливания этих двух

слитков получился слиток, процентное содержание меди в котором — 30%. Определить массу полученного слитка.

Решение

Обозначим за x (в кг.) массу первого слитка, тогда масса второго слитка будет равна $x+3$ кг. В соответствии с данными в условии задачи $0,1x$ кг. и $0,4(x+3)$ кг. — количества меди соответственно в первом и во втором слитке. После их сплавливания вес общего слитка станет равным $2x+3$ кг., а стало быть, количество меди в нем — $0,5x+1,2$ кг. По условию задачи это количество составляет $0,3$ от общего веса нового слитка. Поэтому для определения его общей массы получим уравнение $\dfrac{0,5x+1,2}{2x+3}=0,3$. Оно решается следующим образом: $\dfrac{0,5x+1,2}{2x+3}=0,3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0,5x+1,2=0,6x+0,9 \Leftrightarrow 0,1x=0,3 \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow 2x+3=9$.

Задача решена полностью. **Ответ: 9 кг.**

7. Около треугольника ABC описана окружность. Продолжение биссектрисы CK треугольника ABC пересекает эту окружность в точке L, причем CL — диаметр данной окружности. Найти отношение длин отрезков BL и AC, если синус угла BAC равен $1/4$.

Решение

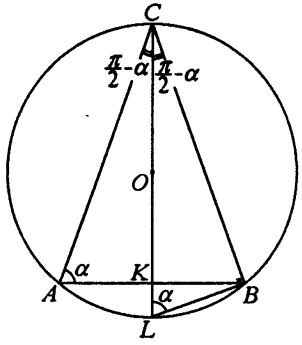


рис. 46

См. рис. 46. $\angle CLB=\angle CAB$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности, $\angle CBL$ — прямой, так как он опирается на диаметр окружности. Поэтому, обозначая $\widehat{CLB}=\alpha$, и еще с учетом того, что CL — биссектриса $\angle ACB$, мы получим

$$\widehat{CAB}=\widehat{CLB}=\alpha \Rightarrow \widehat{ACK}=\widehat{KCB}=\frac{\pi}{2}-\alpha .$$

Следовательно, в $\triangle AKC$, $\triangle BKL$ и $\triangle BKC$ соответственно углы $\angle AKC$, $\angle BKL$ и $\angle BKC$ — прямые, то есть эти треугольники — прямоугольные.

$\triangle BKC = \triangle AKC$, так как у них общий катет CK и равны прилежащие ему острые углы, поскольку CK — биссектриса $\angle ACB$.

Поэтому $|AK| = |BK|$.

Так как у $\triangle AKC$ и $\triangle BKL$ соответственно равные острые углы, например, $\angle KAC = \angle KLB$, то

$$\triangle AKC \sim \triangle BKL \;\Rightarrow\; \frac{|BL|}{|AC|} = \frac{|BK|}{|KC|} = \frac{|AK|}{|KC|} = \operatorname{ctg}\alpha\,.$$

По условию $\sin\alpha = 1/4$, поэтому по формуле, связывающей квадраты котангенса и синуса угла, имеем

$$\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1 = 16 - 1 = 15 \;\Rightarrow\; \operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{15} = \frac{|BL|}{|AC|}\,.$$

Ответ: $\sqrt{15}$.

8. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$9^x < 20\cdot 3^x + a$$

не имеет ни одного целочисленного решения.

Решение

Положим $t = 3^x$, в силу области изменения показательной функции $t > 0$. Так как в силу свойств степеней $9^x = (3\cdot 3)^x = (3^x)^2 = t^2$, неравенство принимает вид $t^2 - 20t - a < 0$.

Обозначим $f(t) = t^2 - 20t - a = (t-10)^2 - 100 - a$. Заметим, что при любом значении $t \;\Rightarrow\; f(10+t) = f(10-t)$, и в силу свойств квадратного трехчлена $f(t)$, имея положительный коэффициент при t^2 (равный 1), он может принимать отрицательные значения только на интервале вида $(10-r, 10+r)$, где $r > 0$. Ближайшее к значению $t = 10$ значение этого аргумента, которому соответствует целое значение x, это $t = 9 \leftrightarrow x = 2$. Поэтому условию задачи удовлетворяют те и только те значения параметра a, при которых $f(9) \geqslant 0$, то есть $1 - 100 - a = -99 - a \geqslant 0$ или $a \leqslant -99$. Задача полностью решена. Ответ: $a \leqslant -99$.

3.3.10. Вариант для самостоятельного решения 1995 г. (июль)

1. Решить уравнение $\sqrt{4x-8}+x=5$.

2. Решить неравенство $x^2-8 \geqslant 2|x|$.

3. Решить систему уравнений $\begin{cases} y^2 \cdot \sqrt{y-x}=0, \\ 3x^2=14-x+3xy. \end{cases}$

4. Решить неравенство $\dfrac{6^x-5}{x^2-5x+4} \leqslant 0$.

5. Решить уравнение

$$\left[2\cos\left(\pi x-\frac{3\pi}{2}\right)+3\operatorname{ctg}\,(\pi x+3\pi)\right]\cdot\log_3(4-x^2)=0.$$

6. Имеются два сосуда с раствором соли, причем во втором сосуде раствора на 2 литра больше, чем в первом сосуде. Процентное содержание соли в растворе в первом сосуде — 20%, а во втором — 50%. При сливании растворов из обоих сосудов вместе получился раствор, процентное содержание соли в котором равно 40%. Определить количество раствора, которое было во втором сосуде.

7. Около треугольника ABC описана окружность. Продолжение биссектрисы AD треугольника ABC пересекает эту окружность в точке E, причем AE — диаметр данной окружности. Найти отношение длин отрезков EC и AB, если косинус угла ABC равен $1/3$.

8. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$16^x < 30 \cdot 4^x - a$$

не имеет ни одного целочисленного решения.

3.3.11. Вариант с решениями задач 1996 г. (май)

1. Решить неравенство

$$\frac{1}{x-1996} \leqslant \frac{x}{x-1996} .$$

Решение

Неравенство равносильно системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \neq 1996 , \\ \dfrac{x-1}{x-1996} \geqslant 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \neq 1996 , \\ (x-1)(x-1996) \geqslant 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant 1 ; \\ x > 1996 , \end{array} \right.$$

откуда непосредственно следует ответ.

Ответ: $x \leqslant 1 \ ; \ x > 1996 .$

2. Решить уравнение

$$\cos 7x + 2\cos\frac{7x}{2} = \frac{1}{2} .$$

Решение

Обозначим $t = \cos\dfrac{7x}{2} \ \Rightarrow \ -1 \leqslant t \leqslant 1$, $\cos 7x = 2t^2 - 1$ (в последнем равенстве применена формула $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ при $\alpha = 7x/2$). Тогда уравнение преобразуется следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \leqslant t \leqslant 1 , \\ 2t^2 - 1 + 2t - \dfrac{1}{2} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1 \leqslant t \leqslant 1 , \\ 4t^2 + 4t - 3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1 \leqslant t \leqslant 1 , \\ t = \dfrac{1}{2} \ , \ t = -\dfrac{3}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left(t = \frac{1}{2} \ , \ t = -\frac{3}{2} \ — \text{ корни квадратного уравнения } 4t^2 + 4t - 3 = 0 \right)$$

$\Leftrightarrow \ t = \dfrac{1}{2}$. Получили простейшее тригонометрическое уравнение:

$$\cos\frac{7x}{2} = \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow \ \frac{7x}{2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \ \Leftrightarrow \ x = \pm\frac{2\pi}{21} + \frac{4\pi n}{7} \ , \ n = 0 \ ; \ \pm 1 \ ; \ \pm 2 \ ; \ \ldots .$$

Ответ: $x = \pm\dfrac{2\pi}{21} + \dfrac{4\pi n}{7} \ , \ n = 0 \ ; \ \pm 1 \ ; \ \pm 2 \ ; \ \ldots \ .$

3. Решить уравнение

$$\log_{\frac{x-1}{|2x-3|}}(x-1) = 2 .$$

Решение

ОДЗ $\begin{cases} x-1>0\,, \\ 2x-3\neq 0\,, \\ 0<\dfrac{x-1}{|2x-3|}\neq 1\,. \end{cases}$ В силу определения логарифма уравнение

сводится к следующему: $x-1=\dfrac{(x-1)^2}{(2x-3)^2} \quad \Leftrightarrow \qquad (*)$

$$\Leftrightarrow\ (x-1)\left(1-\frac{x-1}{(2x-3)^2}\right)=0\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} 2x-3\neq 0\,, \\ \left[\begin{array}{l} x=1\,; \\ 4x^2-13x+10=0\,. \end{array}\right. \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение $4x^2-13x+10=0$, с учетом еще и $x=1$ получим следующие три корня уравнения $(*)$ $x=1$; $x=2$; $x=5/4$. Проверяя полученные значения x на их принадлежность ОДЗ, получаем, что $x=1$ не удовлетвлряет первому условию ОДЗ, а $x=2$ не удовлетворяет третьему условию ОДЗ; $x=5/4$ удовлетворяет всем трем условиям ОДЗ и потому является единственным решением исходного уравнения.

Ответ: $x=\dfrac{5}{4}$.

4. Решить неравенство

$$2\cdot 2^{-2x^2}-7\cdot 2^{-x^2}+3>0\,.$$

Решение

Обозначим $t=2^{-x^2}$, откуда в силу области изменения и возрастания показательной функции 2^x и с учетом того, что $-x^2\leqslant 0\Rightarrow 0<t\leqslant 1$. Тогда $2^{-2x^2}=t^2$ и исходное неравенство сводится к квадратному неравенству: $2t^2-7t+3>0$. Решая это квадратное неравенство, получим следующие условия на $t=2^{-x^2}$:

$$\begin{cases} 0<t\leqslant 1\,, \\ \left[\begin{array}{l} t<\frac{1}{2}=2^{-1}\,; \\ t>3=2^{\log_2 3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{-x^2}<2^{-1}\,; \\ 2^{-x^2}>2^{\log_2 3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2>1\,; \\ x^2<-\log_2 3<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\ x>1$ или $x<-1$.

Ответ: $x<-1\,;\ x>1\,.$

5. В одном декалитре кислотного раствора 96% объема составляет кислота. Сколько воды можно долить, чтобы концентрация кислоты в полученном растворе была не больше 40%?

Решение

Обозначим за x декалитров (дл.) ($x \geqslant 0$) искомое количество добавляемой воды, тогда объем полученного раствора станет равным $(1+x)$ дл. Так как по условию исходный раствор содержит 96% кислоты и его объем равен 1 дл, то это количество кислоты равно $0,96$ дл., поэтому процентное содержание кислоты в новом растворе равно $((0,96)/(1+x)) \cdot 100$, которое по условию не превосходит 40 . Следовательно, для нахождения искомой величины получаем *неравенство*

$$\frac{0,96}{1+x} \cdot 100 \leqslant 40 \quad \Leftrightarrow \quad 96 \leqslant 40+40x \;\Leftrightarrow\; x \geqslant \frac{56}{40} = 1,4\,.$$

Ответ: не менее 1,4 дл.

6. Катеты прямоугольного треугольника равны 36 см и 48 см. Найти расстояние от центра вписанной в треугольник окружности до высоты, проведенной к гипотенузе.

Решение

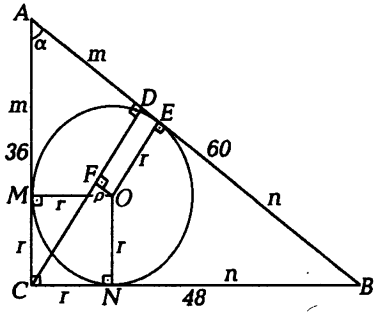


рис. 47

По теореме Пифагора $|AB| = \sqrt{|AC|^2+|BC|^2} = \sqrt{36^2+48^2} = \sqrt{12^2\cdot(3^2+4^2)} = \sqrt{12^2\cdot 5^2} = 12\cdot 5 = 60$. Пусть O — центр вписанной в $\triangle ACB$ окружности, $CD \perp AB, OF \perp CD, E$ — точка касания вписанной в треугольник ABC окружности и стороны $AB \Rightarrow OE \perp AB \Rightarrow OFDE$ — прямоугольник, а потому $\rho = \rho(O;CD) = |OF| = |DE|$ (см. рис. 47). Обозначим через M и N соответственно точки касания вписанной в $\triangle ACB$ окружности и сторон AC , BC . В силу равенства

касательных, проведенных из одной точки к окружности (см. рис. 47),

$$|AM| = |AE| = m\ ,\ |BN| = |BE| = n\ ,\ |CM| = |CN| = r\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ P = |AC| + |BC| + |AB| = 2(m+n+r)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |AE| = m = \frac{P-2(n+r)}{2} = \frac{P-2|BC|}{2} = \frac{|AC|+|AB|-|BC|}{2} =$$

$$= \frac{36+60-48}{2} = \frac{12}{2}\cdot(3+5-4) = 24\ .$$

Из прямоугольных треугольников ACD и ACB получаем:

$$|AD| = |AC|\cos\alpha = |AC|\cdot\frac{|AC|}{|AB|} = 36\cdot\frac{36}{60} = \frac{108}{5}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \rho = |DE| = |AE| - |AD| = 24 - \frac{108}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4\ .$$

Ответ: 2,4 см.

7. Решить уравнение

$$\sin 5|x| = \sin(-3)\ .$$

Решение

$$\sin\alpha = \sin\beta\ \Leftrightarrow\ \sin\alpha - \sin\beta = 0\ \Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) = 0\ \Leftrightarrow\ \alpha = \beta + 2\pi k\ , \\ \cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0\ \Leftrightarrow\ \alpha = \pi - \beta + 2\pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} \alpha = (-1)^n\cdot\beta + \pi n\ , \\ k\ ,\ n\ =\ 0\ ;\ \pm1\ ;\ \pm2\ ;\ \ldots \end{array}$$

На основе полученных соотношений непосредственно получаем:

$$5|x| = (-1)^n\cdot(-3) + \pi n\ \Leftrightarrow\ |x| = (-1)^{n+1}\cdot\frac{3}{5} + \frac{\pi n}{5}\ .$$

Так как $|x| \geqslant 0$, то n принимает значения : 1 ; 2 ; ... . Следовательно, $x = \pm\left((-1)^{n+1}\cdot\dfrac{3}{5} + \dfrac{\pi n}{5}\right)$, где n принимает только указанные значения.

Ответ: $x = \pm\left((-1)^{n+1}\cdot\dfrac{3}{5} + \dfrac{\pi n}{5}\right)\ ,\ n = 1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ .$

8. Найти все значения a, для которых неравенство

$$ax^2 + 1 > 4x - 3a$$

выполняется для всех x из интервала $(-1, 0)$.

Решение

1 способ

Пусть $a = 0$, при этом неравенство принимает вид: $4x < 1 \Leftrightarrow x < 1/4$, то есть для всех $x \in (-1, 0)$ неравенство выполняется и потому $a = 0$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a > 0$, обозначая $b = 1/a \Rightarrow b > 0$ и разделив обе части неравенства на a, приведем его к виду:

$$x^2 - 4bx + b + 3 > 0 .$$

Последнее неравенство выполняется при всех $x \in R$, если дискриминант D квадратного трехчлена $f(x) = x^2 - 4bx + b + 3$ отрицателен, то есть

$$\frac{D}{4} = 4b^2 - b - 3 = (b-1)(4b+3) < 0 \Rightarrow 0 < b < 1 \Leftrightarrow a > 1 .$$

Следовательно, и значения $a > 1$ удовлетворяют условию задачи.

Если же $D \geqslant 0 \Leftrightarrow (b-1)(4b+3) \geqslant 0 \Rightarrow b \geqslant 1 \Leftrightarrow 0 < a \leqslant 1$, то выпишем корни квадратного трехчлена $f(x)$:

$$x_1 = 2b - \sqrt{(b-1)(4b+3)} \leqslant x_2 = 2b + \sqrt{(b-1)(4b+3)} .$$

В силу свойств квадратного трехчлена (промежутков его знакопостоянства) неравенство $x^2 - 4bx + b + 3 > 0$ при всех $x \in (-1, 0)$ выполняется тогда и только тогда, когда или $x_2 \leqslant -1$ или $x_1 \geqslant 0$. При решении соответствующих неравенств относительно параметра b учитываем, что $b \geqslant 1$, поэтому

$$x_1 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2b \geqslant \sqrt{(b-1)(4b+3)} \Leftrightarrow 4b^2 \geqslant 4b^2 - b - 3 \Leftrightarrow b \geqslant -3 ,$$

то есть при $b \geqslant 1$ неравенство $x_1 \geqslant 0$ выполняется, а потому так как $x_2 \geqslant x_1$, то также $x_2 \geqslant 0$.

Таким образом, все значения $0 < a \leqslant 1$ удовлетворяют условию задачи.

Пусть теперь $a < 0$, снова, обозначая $b = 1/a \Rightarrow b < 0$ и разделив обе части неравенства на a, приведем его к виду:

$$x^2 - 4bx + b + 3 < 0 .$$

Это неравенство имеет решения только в случае $D > 0$, то есть $(b-1)(4b+3) > 0 \Rightarrow$ (с учетом $b < 0$) $b < -3/4$. В силу свойств квадратного трехчлена (промежутков его знакопостоянства) с учетом $D > 0$

неравенство $x^2-4bx+b+3<0$ при всех $x\in(-1,0)$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_1\leqslant -1$ и $x_2\geqslant 0$. При решении соответствующих неравенств относительно параметра b учитываем, что $b<-3/4$, поэтому

$$x_2\geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{(b-1)(4b+3)}\geqslant -2b \;\Leftrightarrow\; 4b^2-b-3\geqslant 4b^2 \;\Leftrightarrow\; b\leqslant -3\,,$$

$$x_1\leqslant -1 \;\Leftrightarrow\; 2b+1\leqslant \sqrt{(b-1)(4b+3)}\,.$$

Так при $b<-3/4$ $2b+1<-1/2<0$, то последнее неравенство при указанных значениях b выполняется. Следовательно, условию задачи удовлетворяют только те отрицательные значения параметра a, при которых $1/a=b\leqslant -3 \;\Leftrightarrow\; a\geqslant -1/3$. Итак, окончательно условию задачи удовлетворяют только значения $a\geqslant -1/3$.

2 способ

(с применением производной и свойства непрерывности функции, которые поступающие могут использовать при решении задач)

$$ax^2+1>4x-3a \;\Leftrightarrow\; a(x^2+3)>4x-1 \;\Leftrightarrow\; a>\frac{4x-1}{x^2+3}\,. \qquad (*)$$

Положим,

$$f(x)=\frac{4x-1}{x^2+3} \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{(4x-1)'(x^2+3)-(4x-1)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}=$$

$$=\frac{4(x^2+3)-2x(4x-1)}{(x^2+3)^2}=\frac{-4x^2+2x+12}{(x^2+3)^2}=-\frac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2}>0$$

при всех $x\in[-1,0]$. Поэтому на отрезке $[-1,0]$ функция $f(x)$ возрастает и, следовательно, принимает наибольшее значение при $x=0$, равное $-1/3$. Следовательно, при любом $a\geqslant -1/3$ неравенство $(*)$ будет выполняться при всех $-1<x<0$.

Однако в силу непрерывности функции $f(x)$ (которая принимает все свои промежуточные значения между $f(-1)=-5/4$ и $f(0)=-1/3$) уже при любом $a<-1/3$ обязательно найдется $x_0\in(-1,0)$, для которого $f(x_0)\geqslant a$, и поэтому такие значения a не будут удовлетворять условию задачи.

Ответ: $a\geqslant -\dfrac{1}{3}$.

3.3.12. *Вариант для самостоятельного решения 1996 г. (май)*

1. Решить неравенство $\dfrac{x}{1996-x} \leqslant \dfrac{1}{1996-x}$.

2. Решить уравнение $2\cos 5x + 4\cos\dfrac{5x}{2} = 1$.

3. Решить уравнение $\log_{\frac{x-2}{|2x-5|}}(x-2) = 2$.

4. Решить неравенство $3\cdot 3^{-2x^2} - 7\cdot 3^{-x^2} + 2 > 0$.

5. В одном декалитре кислотного раствора 96% объема составляет кислота. Сколько воды можно долить, чтобы концентрация воды в полученном растворе была не меньше 60%?

6. Гипотенуза и катет прямоугольного треугольника равны, соответственно, 60 см. и 36 см. Найти расстояние от точки пересечения биссектрис треугольника до высоты, проведенной к гипотенузе.

7. Решить уравнение $\sin 2|x| = -\sin 1$.

8. Найти все значения a , для которых неравенство

$$ax^2 - 3 > 2(2-a)x - 4a$$

выполняется для всех x из интервала $(-2,-1)$.

3.3.13. Вариант с решениями задач 1996 г. (июль)

1. Решить уравнение

$$\sqrt{3x-5} = x - 11 .$$

Решение

Уравнение равносильно системе

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 11 \geqslant 0 , \\ 3x - 5 = (x-11)^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geqslant 11 , \\ x^2 - 25x + 126 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geqslant 11 , \\ \left[\begin{array}{l} x = 7 ; \\ x = 18 \end{array} \right. \end{array} \right. \Rightarrow \; x = 18 .$$

Ответ: $x = 18$.

2. Определить, какие из чисел -4 , -1 , 1 , 4 являются решениями неравенства

$$\left| \frac{1}{2} - \log_{10} 5 \right| \cdot x \leqslant \frac{1}{2} - \log_{10} 5 .$$

Решение

Так как $10 < 25 \;\Rightarrow\; 10^{\frac{1}{2}} < 5 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} < \log_{10} 5$, поэтому, раскрывая модуль в левой части неравенства, приведем его к виду:

$$\left(\log_{10} 5 - \frac{1}{2} \right) \cdot x \leqslant \frac{1}{2} - \log_{10} 5 \;\Leftrightarrow\; \left(\log_{10} 5 - \frac{1}{2} \right) \cdot x \leqslant - \left(\log_{10} 5 - \frac{1}{2} \right) \;\Leftrightarrow\; x \leqslant -1$$

Следовательно, из указанных чисел неравенству удовлетворяют $x = -4$; $x = -1$.

Ответ: $x = -4$; $x = -1$.

3. Найти все решения уравнения

$$\frac{\cos 10x - \cos 8x}{2x^2 + \pi x - \pi^2} = \frac{\cos 6x - \cos 4x}{2x^2 + \pi x - \pi^2} ,$$

принадлежащие интервалу $(0, \pi)$.

Решение

Уравнение равносильно системе

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x^2 + \pi x - \pi^2 \neq 0 , \\ \cos 10x - \cos 8x = \cos 6x - \cos 4x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x^2 + \pi x - \pi^2 \neq 0 , \\ \cos 8x - \cos 10x = \cos 4x - \cos 6x \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (2x - \pi)(x + \pi) \neq 0 , \\ 2(\sin x)(\sin 9x) = 2(\sin x)(\sin 5x) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \neq \pi/2 \; , \; x \neq -\pi , \\ (\sin x)(\sin 9x - \sin 5x) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \neq \pi/2\ ,\ x \neq -\pi\ , \\ 2(\sin x)(\sin 2x)(\cos 7x) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \neq \pi/2\ ,\ x \neq -\pi\ , \\ 4(\sin^2 x)(\cos x)(\cos 7x) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \neq \pi/2\ ,\ x \neq -\pi\ , \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = 0\ ; \\ \cos x = 0\ ; \\ \cos 7x = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \neq \pi/2\ ,\ x \neq -\pi\ , \\ \left[\begin{array}{l} x = \pi n\ ; \\ x = \pi/2 + \pi n\ ; \\ x = \pi/14 + \pi n/7\ , \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad \forall n \in Z\ .$$

С учетом условий $x \in (0, \pi)$ и $x \neq \pi/2$ условию задачи удовлетворяют только $x = \pi/14 + \pi n/7$ при $n = 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6$.

Ответ: $x = \pi/14\ ;\ 3\pi/14\ ;\ 5\pi/14\ ;\ 9\pi/14\ ;\ 11\pi/14\ ;\ 13\pi/14$.

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_9(-27x)} > \frac{1}{\log_3(-x)}\ .$$

Решение

$$\text{ОДЗ} \left\{ \begin{array}{l} -x > 0\ , \\ \log_3(-x) \neq 0\ , \\ \log_3(-27x) \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < 0\ , \\ -x \neq 1\ , \\ -27x \neq 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x < 0\ , \\ x \neq -1\ , \\ x \neq -1/27\ . \end{array} \right.$$

Положим, $t = \log_3(-x)$ тогда

$$\log_9(-27x) = \frac{\log_3(-27x)}{\log_3 9} = \frac{\log_3(-x) + \log_3 27}{2} = \frac{t+3}{2}\ ,$$

следовательно, неравенство примет вид:

$$\frac{2}{t+3} > \frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{2}{t+3} - \frac{1}{t} > 0 \Leftrightarrow \frac{t-3}{t(t+3)} > 0\ .$$

Решая это неравенство методом интервалов, получим $t > 3$ и $-3 < t < 0$ — его решения. С учетом возрастания функции $y = \log_3 x$ получаем:
$t > 3 \Leftrightarrow \log_3(-x) > 3 = \log_3 27 \Leftrightarrow -x > 27 \Leftrightarrow x < -27$.
$-3 < t < 0 \Leftrightarrow -3 < \log_3(-x) < 0 \Leftrightarrow \log_3(1/27) < \log_3(-x) < \log_3 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1/27 < -x < 1 \Leftrightarrow -1 < x < -1/27$.
Объединяя эти решения x , получаем ответ.

Ответ: $x < -27\ ;\ -1 < x < -1/27$.

5. Решить систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - xy & = & 20y\ , \\ 5xy - 5y^2 & = & 4x\ . \end{array} \right.$$

Решение

Система уравнений равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} x(x-y) &= 20y\,, \\ 5y(x-y) &= 4x\,. \end{cases}$$

Очевидно, что пара $x=0\,;\ y=0$ является решением системы уравнений. Очевидно также, что никакая пара $(x_0\,;\ 0)$ и $(0\,;\ y_0)$, где $x_0\neq 0$, $y_0\neq 0$ не является решением этой системы. Следовательно, решением системы может быть только пара вида $x_0\,;\ y_0$, где $x_0\neq 0$, $y_0\neq 0$. Полагая $x\neq y$, разделив почленно первое уравнение на второе и полагая $t=x/y$, получим следующее уравнение

$$\frac{t}{5}=\frac{5}{t}\ \Leftrightarrow\ t^2=25\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} t=-5\,; \\ t=5 \end{array}\right.\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} x=-5y\,; \\ x=5y\,. \end{array}\right.$$

Подставляя эти соотношения, например, в первое уравнение, с учетом $y\neq 0$, соответственно получим следующие пары решений системы:

$-5y(-5y-y)=20y\ \Leftrightarrow\ 6y=4\ \Leftrightarrow\ y=2/3\ \Rightarrow\ x=-10/3\,;$

$5y(5y-y)=20y\ \Leftrightarrow\ 4y=4\ \Leftrightarrow\ y=1\ \Rightarrow\ x=5\,.$

Полагая теперь $x=y$, получим $y=0$ из первого уравнения системы и $x=0$ из второго уравнения, но пара $x=y=0$ как решение системы уже ранее получена.

Ответ: $x=0, y=0\,;\ x=5, y=1\,;\ x=-10/3, y=2/3\,.$

6. В двух банках в конце года на каждый счет начисляется прибыль: в первом банке — 60% к текущей сумме на счете, во втором — 40% к текущей сумме на счете. Вкладчик в начале года часть имеющихся у него денег положил в первый банк, а остальные деньги — во второй банк, с таким расчетом, чтобы через два года суммарное количество денег на обоих счетах удвоилось. Какую долю денег вкладчик положил в первый банк?

Решение

Пусть x — первоначальное количество денег, положенное в первый банк, а y — первоначальное количество денег, положенное во второй банк, тогда $x+y$ — суммарное количество денег, положенное в оба банка. Из условий задачи в соответствии с начисляемой прибылью за два года в первом банке стало денег $x(1+0,6)^2$, а во втором — $y(1+0,4)^2$. Так как суммарное количество денег в банках за два года удвоилось, то получаем следующее уравнение:

$$x(1+0,6)^2+y(1+0,4)^2=2(x+y)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2,56x+1,96y=2x+2y\ \Leftrightarrow\ 0,56x=0,04y\ \Leftrightarrow\ y=14x\,.$$

Доля денег, первоначально положенная в первый банк равна

$$\frac{x}{x+y}=\frac{x}{x+14x}=\frac{x}{15x}=\frac{1}{15}\,.$$

Ответ: 1/15 .

7. В трапеции ABCD боковая сторона AD перпендикулярна основаниям и имеет длину 9 см. Длина основания CD равна 12 см, а длина отрезка AO, где O — точка пересечения диагоналей трапеции, равна 6 см. Найти площадь треугольника BOC.

Решение

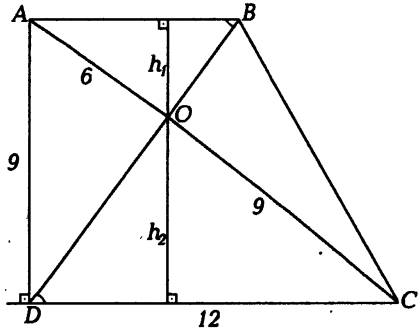


рис. 48

По теореме Пифагора для треугольника ACD

$|AC|=\sqrt{|AD|^2+|CD|^2}=\sqrt{9^2+12^2}=\sqrt{81+144}=\sqrt{225}=15$,

следовательно, $|OC|=|AC|-|AO|=15-6=9$.

У треугольников DOC и AOB $\angle ABO=\angle ODC$ как внутренние накрест лежащие при $AB\parallel CD$ (так как AB и CD — основания трапеции) и секущей BD , а $\angle AOB=\angle DOC$ как вертикальные. Следовательно, по двум соответственно равным углам $\triangle AOB\sim\triangle COD$ с коэффициентом подобия $k=\dfrac{|AO|}{|OC|}=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$. А потому $\dfrac{2}{3}=\dfrac{|AB|}{|DC|}=\dfrac{h_1}{h_2}$, где h_1 и h_2 — длины высот, проведенных к сторонам AB и CD соответственно. Поскольку $AB\parallel CD$, то $h_1+h_2=|AD|=9$ (см. рис. 48). Следовательно, для определения h_1 и h_2 получаем систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{h_1}{h_2}=\dfrac{2}{3}\,,\\ h_1+h_2=9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}h_1=\dfrac{2h_2}{3}\,,\\ h_1+h_2=9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}h_1=\dfrac{2h_2}{3}\,,\\ \dfrac{5}{3}\cdot h_2=9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}h_1=\dfrac{18}{5}\,,\\ h_2=\dfrac{27}{5}\,.\end{array}\right.$$

Искомая площадь треугольника вычисляется так:

(см. рис. 48) $S_{\triangle BOC} = S_{\triangle DBC} - S_{\triangle DOC} =$

$$= \frac{1}{2} \cdot |DC| \cdot (|AD| - h_2) = \frac{1}{2} \cdot |DC| \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{18}{5} = \frac{108}{5} = 21,6 \ .$$

Ответ: $21,6$ см.^{2} .

8. Найти все действительные значения параметра a , при которых для любого действительного b уравнение

$$\cos(b + ab + bx) + 2\cos b^2 x = 3a^2$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение

Пусть a_0 удовлетворяет условию задачи, тогда, в частности, при $b = 0$ уравнение должно иметь решение. Подставляя в уравнение $b = 0$, получаем

$$\cos 0 + 2\cos 0 = 3a^2 \ \Leftrightarrow \ 3 = 3a^2 \ \Leftrightarrow \ a^2 = 1 \ \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ или $a = -1$ или $a = 1$, то есть только эти значения a могут удовлетворять условию задачи.

Пусть $a = -1$, тогда уравнение принимает вид:

$$\cos bx + 2\cos b^2 x = 3 \ ,$$

и, очевидно, имеет решение, например, $x = 0 \qquad \forall b \in R$.
Следовательно, $a = -1$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть теперь $a = 1$, тогда уравнение принимает такой вид:

$$\cos(2b + bx) + 2\cos b^2 x = 3 \qquad (*)$$

и должно иметь хотя бы одно решение при любом b , в частности при $b = 1$. Однако при $b = 1$ уравнение $(*)$ принимает следующий вид :

$$\cos(2 + x) + 2\cos x = 3 \ .$$

Так как $\cos(x + 2) \leqslant 1$ и $2\cos x \leqslant 2$, то последнее уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} \cos(x+2) = 1 \ , \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 2\pi n \ , \\ x = 2\pi k \ , \end{cases} \qquad n \ , \ k \ = \ 0 \ ; \ \pm 1 \ ; \ \pm 2 \ ; \ \ldots \ .$$

Из последней системы получаем следующее равенство: $2\pi k = 2(\pi n - 1) \ \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \ 1 = \pi(n - k)$. Но в силу иррациональности числа π последнее равенство невозможно ни при каких целых значениях n и k . Поэтому при $b = 1$ уравнение $(*)$ не имеет решений. Следовательно, $a = 1$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a = -1$.

3.3.14. Вариант для самостоятельного решения 1996 г. (июль)

1. Решить уравнение $\sqrt{4x-4} = x-9$.

2. Определить, какие из чисел -3 , -1 , 1 , 3 являются решениями неравенства $\left|\frac{1}{3} - \log_6 2\right| \cdot x \leqslant \frac{1}{3} - \log_6 2$.

3. Найти все решения уравнения

$$\frac{\sin 4x + \sin 6x}{2x^2 - 5\pi x + 2\pi^2} = \frac{\sin 8x + \sin 10x}{2x^2 - 5\pi x + 2\pi^2} ,$$

принадлежащие интервалу $(0, \pi)$.

4. Решить неравенство $\frac{1}{\log_2(-x)} < \frac{1}{\log_4(-2x)}$.

5. Решить систему уравнений $\begin{cases} y^2 + xy &= 42x , \\ 6x^2 + 6xy &= 7y . \end{cases}$

6. В двух банках в конце года на каждый счет начисляется прибыль: в первом банке — 50% к текущей сумме на счете, во втором — 75% к текущей сумме на счете. Вкладчик в начале года часть имеющихся у него денег положил в первый банк, а остальные деньги — во второй банк, с таким расчетом, чтобы через два года суммарное количество денег на обоих счетах утроилось. Какую долю денег вкладчик положил в первый банк?

7. В трапеции ABCD боковая сторона AB перпендикулярна основаниям и имеет длину 6 см. Длина основания AD равна 8 см, а длина отрезка DO, где O — точка пересечения диагоналей трапеции, равна 6 см. Найти площадь треугольника COD .

8. Найти все действительные значения параметра b , при которых для любого действительного a уравнение

$$\cos(a + ab + ax) + 4\cos a^2 x = 5b^2$$

имеет хотя бы одно решение.

3.4. Институт стран Азии и Африки МГУ (ИСАА) (социально-экономическое отделение)

3.4.1. Вариант с решениями задач 1993 г.

1. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-5x+8}}{3-x} \geqslant 1 .$$

Решение

$$\frac{\sqrt{x^2-5x+8}}{3-x} \geqslant 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x>0 , \\ \dfrac{x^2-5x+8}{x^2-6x+9} \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 , \\ x \geqslant 1 . \end{cases}$$

Ответ: $1 \leqslant x < 3$.

2. Сумма третьего и пятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму первых семи членов этой прогрессии.

Решение

$a_3 + a_5 = 8, \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_7 = ?$

$(a_1 + 2d) + (a_1 + 4d) = 2a_1 + 6d = 8 \quad \Rightarrow \quad a_1 + 3d = 4$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_7 = n \cdot a_1 + \frac{(n-1)\cdot n}{2} \cdot d = \{n = 7\} = 7a_1 + 21d =$$

$$= 7(a_1 + 3d) = 28 .$$

Ответ: 28 .

3. На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая основание этого треугольника в точке D. Найти расстояние от вершины A до центра окружности, если $AD = \sqrt{3}$, а угол ABC равен 120° .

Решение

Вписанный угол BDC опирается на диаметр $\Rightarrow \angle BDC = 90° \Rightarrow AD = DC = \sqrt{3}$.

$\triangle BDC: \quad BC = DC \cdot \dfrac{1}{\cos 30°} = 2 \Rightarrow OC = 1 .$

$\triangle ACO: \quad AO^2 = AC^2 + OC^2 - 2 \cdot AC \cdot OC \cdot \cos 30° = 7 .$

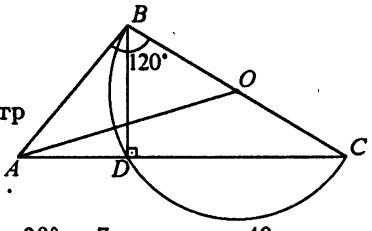


рис. 49

Ответ: $AO = \sqrt{7}$.

4. Решить уравнение

$$\log_x(3x-2)-2=\sqrt{\log^2{}_x(3x-2)+4\log_x\left(\frac{x}{3x-2}\right)}\,.$$

Решение

$$\log_x(3x-2)-2=\sqrt{\log^2{}_x(3x-2)+4\log_x\left(\frac{x}{3x-2}\right)}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \log_x(3x-2)-2=\sqrt{\log^2{}_x(3x-2)-4\log_x(3x-2)+4}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \log_x(3x-2)-2=\sqrt{(\log_x(3x-2)-2)^2}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \log_x(3x-2)-2=|\log_x(3x-2)-2|\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \log_x(3x-2)\geqslant 2=\log_x x^2\,.$$

ОДЗ $\dfrac{2}{3}<x<1\,,\ 1<x\,.$

$$\begin{cases}\dfrac{2}{3}<x<1\,,\\ 3x-2\leqslant x^2\end{cases}\ \Rightarrow\ \frac{2}{3}<x<1\,;\quad \begin{cases}x>1\,,\\ 3x-2\geqslant x^2\end{cases}\ \Rightarrow\ 1<x\leqslant 2\,.$$

Ответ: $\dfrac{2}{3}<x<1\,;\ 1<x\leqslant 2\,.$

5. Решить уравнение

$$\sin^2 x + 3x^2 \cdot \cos x + 3x^2 = 0 \ .$$

Решение

Исходное уравнение равносильно следующему уравнению

$$-\sin^2 x = 3x^2(\cos x + 1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - 1 = 3x^2(\cos x + 1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \ ; \\ \cos x - 1 = 3x^2 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \ \Rightarrow \ x = \pi + 2\pi n \ , \ \forall n \in Z \ ; \\ 1 \geqslant \cos x = 1 + 3x^2 \geqslant 1 \ \Rightarrow \ x = 0 \ . \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 0 \ ; \ x = \pi + 2\pi n \ , \ \forall n \in Z \ .$

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$x^2 + 2 \mid x - a \mid \geqslant a^2$$

справедливо для всех действительных x .

Решение

$$x^2 + 2 \mid x - a \mid \geqslant a^2 \ : \qquad (1)$$

1) $x \geqslant a \Rightarrow (x^2 - a^2) + 2(x - a) \geqslant 0 \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ (x - a)(x + a + 2) \geqslant 0 \ . \qquad (2)$$

Так как неравенство (1) справедливо при всех x, то неравенство (2) должно быть справедливым при всех $x \geqslant a$, а это возможно тогда и только тогда, когда $-a - 2 \leqslant a$ или $a \geqslant -1$;

2) $x \leqslant a \Rightarrow (x^2 - a^2) - 2(x - a) \geqslant 0 \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ (x - a)(x + a - 2) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ (x - a)(x - (-a + 2)) \geqslant 0 \ . \qquad (3)$$

Аналогично неравенство (3) должно быть справедливым при всех $x \leqslant a$, а это возможно тогда и только тогда, когда $a \leqslant -a + 2$ или $a \leqslant 1$.

Ответ: $-1 \leqslant a \leqslant 1 \ .$

3.4.2. Вариант для самостоятельного решения 1993 г.

1. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-7x+14}}{4-x} \geqslant 1 .$$

2. Сумма третьего и седьмого членов арифметической прогрессии равна 4. Найти сумму первых девяти членов этой прогрессии.

3. В прямоугольном треугольнике ABC с равными катетами AC и BC на стороне AC как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону AB в точке M. Найти расстояние от вершины B до центра окружности, если $BM = \sqrt{2}$.

4. Решить уравнение

$$\log_x(6x-5) - 2 = \sqrt{\log^2{}_x(6x-5) - 4\log_x\left(\frac{6x-5}{x}\right)} .$$

5. Решить уравнение

$$\cos^2 x + \sqrt{x-\frac{\pi}{2}} \cdot \sin x + \sqrt{x-\frac{\pi}{2}} = 0 .$$

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$x^2 + 5 \cdot |\, x + a \,| \geqslant a^2$$

справедливо для всех действительных x .

3.4.3. Вариант с решениями задач 1994 г.

1. Биржа запланировала провести торги в июле и августе. Если объем торгов в июле оставить на запланированном уровне, а план на август повысить в три раза, то суммарный объем торгов, проводимых в течение этих двух месяцев, возрастет в два раза. Найти отношение объемов торгов, запланированных на июль и на август, и выяснить, во сколько раз надо увеличить план на июль, оставляя неизменным план на август, чтобы суммарный объем торгов, проводимых за эти два месяца, возрос в три раза.

Решение

Пусть x — объем торгов в июле, y — объем торгов в августе, α — количество раз, в которое надо увеличить объем торгов в июле, чтобы в три раза увеличился общий суммарный объем торгов за два месяца — июль и август. В силу условий задачи имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 3y = 2(x + y)\ , \\ \alpha x + y = 3(x + y)\ . \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы имеем $x = y$, откуда $x : y = 1 : 1$. Подставляя $y = x$ во второе уравнение, получим:

$$(\alpha + 1)x = 6x \quad \Rightarrow \quad \alpha = 5\ .$$

Ответ: $1 : 1$, в 5 раз .

2. Решить уравнение $\quad 2^{x \log_2 7} \cdot 7^{x^2+x} = 1\ .$

Решение

По свойству степеней и основному логарифмическому тождеству

$$2^{x \log_2 7} \cdot 7^{x^2+x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(2^{\log_2 7}\right)^x \cdot 7^{x^2+x} = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ 7^x \cdot 7^{x^2+x} = 1 \ \Leftrightarrow \ 7^{x^2+2x} = 1 = 7^0 \ \Leftrightarrow \ x^2 + 2x = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x = x_1 = -2; \quad x = x_2 = 0\ .$$

Ответ: $x = 0$; $x = -2$.

3. Окружность, центр которой лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, касается катетов AC и BC соответственно в точках E и D. Найти величину угла ABC, если известно, что $AE = 1$, $BD = 3$.

Решение

Пусть $|OD| = |OE| = r$, где r — радиус окружности. Так как D и E — точки касания окружности сторон AC и BC треугольника ACB, $OD \perp BC$, $OE \perp AC$. Пусть $\angle BAC = \alpha^\circ$, тогда $\angle ABC = 90^\circ - \alpha^\circ$. Следовательно,

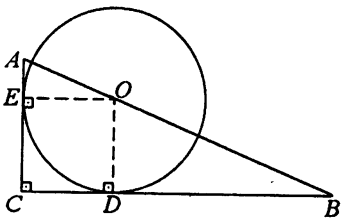


рис. 50

$$r = |AE| \cdot \operatorname{tg}\alpha^\circ = |BD| \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha^\circ) ,$$

или в силу условий задачи $\operatorname{tg}\alpha^\circ = 3\operatorname{ctg}\alpha^\circ \Rightarrow \operatorname{tg}^2\alpha^\circ = 3$, откуда (так как $0^\circ < \alpha^\circ < 90^\circ$) $\operatorname{tg}\alpha^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow \angle BAC = 60^\circ \Rightarrow \angle ABC = 30^\circ$.

Ответ: 30° .

4. Решить неравенство

$$2\sin x - 1 \leqslant \sqrt{6\sin^2 x - 6\sin x - 12} .$$

Решение

$$\text{ОДЗ}\ \sin^2 x - \sin x - 2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\sin x + 1)(\sin x - 2) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin x \leqslant -1 ; \\ \sin x \geqslant 2 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = -1 ,$$

так как для всех действительных значений $x \Rightarrow -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$. Поскольку все значения x , при которых $\sin x = -1$, удовлетворяют исходному неравенству, то только они и являются его решениями.

Ответ: $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\forall n \in Z$.

5. Решить неравенство

$$\left| x - 4^{1+\sqrt{3-x}} \right| \leqslant \frac{5x}{3} - 4 \cdot 4^{\sqrt{3-x}} .$$

Решение

ОДЗ $x \leqslant 3$, $4^{1+\sqrt{3-x}} = 4 \cdot 4^{\sqrt{3-x}}$. В силу возрастания функции 4^x и того, что при любом $x \leqslant 3$ $\sqrt{3-x} \geqslant 0$, $4 \cdot 4^{\sqrt{3-x}} \geqslant 4 \cdot 4^0 = 4$, причем равенство достигается только при $x = 3$, а потому при каждом $x \leqslant 3$ следует

$$x - 4 \cdot 4^{\sqrt{3-x}} \leqslant -1 \quad \Rightarrow \quad \left| x - 4 \cdot 4^{\sqrt{3-x}} \right| \geqslant 1 \quad \text{и}$$

$$\frac{5x}{3} - 4 \cdot 4^{\sqrt{3-x}} \leqslant 1\,, \quad \text{то есть}$$

$$1 \leqslant \left| x - 4 \cdot 4^{\sqrt{3-x}} \right| \leqslant \frac{5x}{3} - 4 \cdot 4^{\sqrt{3-x}} \leqslant 1\,.$$

Так как в цепочке этих неравенств равенства имеют место только при $x = 3$, то $x = 3$ — единственное решение этого неравенства.

Ответ: $x = 3$.

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$a^2x^2 + 2a(\sqrt{2}-1)x + \sqrt{x-2} = 2\sqrt{2} - 3$$

имеет решение ?

Решение

Так как $2\sqrt{2} - 3 = -(2 - 2\sqrt{2} + 1) = -(\sqrt{2}-1)^2$, то исходное уравнение равносильно уравнению

$$a^2x^2 + 2a(\sqrt{2}-1)x + (\sqrt{2}-1)^2 = -\sqrt{x-2} \Leftrightarrow (ax + \sqrt{2} - 1)^2 = -\sqrt{x-2}\,.$$

Левая часть последнего уравнения при всех a и x неотрицательна (то есть $\geqslant 0$), а правая часть при всех $x \geqslant 2$ неположительна (то есть $\leqslant 0$) ($x \geqslant 2$ — ОДЗ), поэтому последнее равенство возможно в том и только в том случае, когда

$$\begin{cases} -\sqrt{x-2} = 0\,, \\ (ax + \sqrt{2} - 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0\,, \\ (2a + \sqrt{2} - 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\,, \\ 2a = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad a = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$, при этом единственным решением уравнения является $x = 2$.

Ответ: $a = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$.

3.4.4. Вариант для самостоятельного решения 1994 г.

1. Суммарный доход двух предприятий возрастает втрое, если доход первого предприятия остается неизменным, а доход второго увеличится в четыре раза. Найти отношение первоначальных доходов этих предприятий и выяснить, во сколько раз надо увеличить доход первого предприятия, оставляя первоначальным доход второго, чтобы их суммарный доход возрос в четыре раза.

2. Решить уравнение

$$3^{x\log_3 5}\cdot 5^{x^2-3x}=1\,.$$

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD прямого угла ACB; DM и DN являются соответственно высотами треугольников ADC и BDC. Найти AC, если известно, что $AM=4$, $BN=9$.

4. Решить неравенство

$$2\cos x-1\leqslant\sqrt{8\cos^2 x-8\cos x-16}\,.$$

5. Решить неравенство

$$\left|x-7^{1+\sqrt{6-x}}\right|\leqslant\frac{4x}{3}-7\cdot 7^{\sqrt{6-x}}\,.$$

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$a^2x^2+2a(\sqrt{3}-1)x+\sqrt{x-4}=2\sqrt{3}-4$$

имеет решение ?

3.4.5. Вариант с решениями задач 1995 г.

1. Найти x, если известно, что числа

$$-1 \quad , \quad x+2 \quad , \quad \sin(\arcsin x) \, ,$$

взятые в указанном порядке, образуют геометрическую прогрессию.

Решение

$\sin(\arcsin x) = x$, где $-1 \leqslant x \leqslant 1$, так как $\arcsin x$ определен только при таких значениях x. Числа -1, $x+2$, x образуют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $(x+2)^2 = (-1)\cdot x \Leftrightarrow x^2+5x+4=0$. Решения последнего уравнения $x=-4$, $x=-1$. С учетом того, что $-1 \leqslant x \leqslant 1$, получаем, что единственным значением x, удовлетворяющим условию задачи, является $x=-1$.

Ответ: $x=-1$.

2. Решить уравнение

$$\log_2(x^2-4x+3) - \log_2(x-1)\cdot\log_2(x-3) = 1 \, .$$

Решение

ОДЗ $x>3$. Так как $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$, то в силу свойств логарифмов исходное уравнение преобразуется в серию равносильных ему уравнений следующим образом:

$$\log_2(x-1)+\log_2(x-3)-\log_2(x-1)\cdot\log_2(x-3)=1 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \; [\log_2(x-1)-1]-\log_2(x-3)\cdot[\log_2(x-1)-1]=0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \; [\log_2(x-1)-1]\cdot[1-\log_2(x-3)]=0 \, .$$

Последнее уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\log_2(x-1)=1 \quad \text{и} \quad \log_2(x-3)=1 \, .$$

Решая каждое из этих уравнений, получаем следующие значения x: $x=3$; $x=5$. С учетом ОДЗ получаем единственное решение исходного уравнения: $x=5$.

Ответ: $x=5$.

3. На счет, который вкладчик имел в начале первого квартала, начисляется в конце этого квартала r_1 процентов, а на тот счет, который вкладчик имел в начале второго квартала, начисляется в конце этого квартала r_2 процентов, причем $r_1+r_2=150$. Вкладчик положил на счет в начале первого квартала некоторую сумму и снял в конце того же квартала половину этой суммы. При каком значении r_1 счет вкладчика в конце второго квартала окажется максимально возможным?

Решение

Пусть $x = 1 + \frac{r_1}{100}$, $y = 1 + \frac{r_2}{100}$. По условию задачи

$$x + y = 2 + \frac{r_1 + r_2}{100} = 2 + \frac{150}{100} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}.$$

Пусть счет вкладчика в начале первого квартала был равен $A > 0$. Тогда в конце второго квартала он будет равен

$$\left(Ax - \frac{A}{2}\right) \cdot y = A \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{7}{2} - x\right).$$

Произведение выражений в круглых скобках представляет собой квадратный трехчлен

$$-\left(x^2 - 4x + \frac{7}{4}\right) = -(x-2)^2 + 2,25,$$

значения которого не превосходят $2,25$ при любом значении x. Максимального значения это выражение, а стало быть, и выражение для суммы вклада в конце второго квартала достигают при $x = 2$, оно равно $2,25 \cdot A$. Если $x = 2$, то $r_1 = 100$.

Ответ: $r_1 = 100$.

4. Сторона AB треугольника ABC равна 3, $BC = 2 \cdot AC$, E — точка пересечения продолжения биссектрисы CD данного треугольника с описанной около него окружностью, $DE = 1$. Найти AC.

Решение

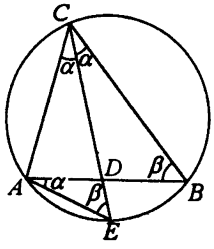


рис. 51

В силу свойства биссектрисы угла треугольника и так как $AB = 3$ мы имеем

$$\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AC} = 2,\ BD + AD = 3,\ \Rightarrow\ AD = 1,\ BD = 2.$$

Так как по условию $DE = 1$, то $AD = DE$. Следовательно, $\triangle ADE$ — равнобедренный, а потому (см. рис. 51) $\alpha = \beta$. В силу того, что вписанные в окружность углы, опирающиеся на одну дугу, равны, и того, что E — биссектриса угла, мы имеем следующую цепочку равенств:

$$\angle ACE = \angle BCE = \angle DAE = \angle CEA = \angle CBD\ .$$

(см. рис. 51). В частности, $\angle ACE = \angle AEC$ и $\angle CBD = \angle BCD$. Из этого следует, что $\triangle ACE$ и $\triangle CDB$ — равнобедренные, а из этого в свою очередь вытекают равенства $CD = BD = 2$, $CE = CD + DE = 3$. Из того, что равнобедренные треугольники ACE и CDB имеют по крайней мере по два соответственно равных угла (см. рис. 51), вытекает: $\triangle ACE \sim \triangle DCB$. Откуда и в силу того, что $BC = 2AC$, имеем

$$\frac{AC}{CE} = \frac{CD}{BC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ AC \cdot BC = CE \cdot CD = 3 \cdot 2 = 6 \ \Rightarrow\ 2 \cdot AC^2 = 6 \ \Rightarrow AC^2 = 3 \ \Rightarrow AC = \sqrt{3}\ .$$

Ответ: $AC = \sqrt{3}$.

5. Решить неравенство

$$\sqrt{4x - x^2 - 3} \cdot (\sqrt{2} \cdot \cos x - \sqrt{1 + \cos 2x}) \geqslant 0\ .$$

Решение

Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} 4x - x^2 - 3 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 1\ ;\ x = 3\ ; \\ \left\{\begin{array}{l} \sqrt{2}\cos x - \sqrt{2\cos^2 x} \geqslant 0\ , \\ 4x - x^2 - 3 > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos x - |\cos x| \geqslant 0\ , \\ (x-1)\cdot(x-3) < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos x \geqslant 0\ , \\ 1 < x < 3\ . \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Следовательно, $x = 1$; $x = 3$; $1 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ — решения исходного неравенства, откуда и получаем окончательный ответ.

Ответ: $1 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$; $x = 3$.

6. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$x^2 + 4x + 6a \cdot |x + 2| + 9a^2 \leqslant 0$$

имеет не более одного решения.

Решение

Перепишем исходное неравенство в виде

$$(x + 2)^2 + 6a \cdot |x + 2| + 9a^2 - 4 \leqslant 0 .$$

Так как $(x + 2)^2 = |x + 2|^2$, то, введя обозначение $t = |x + 2|$ (откуда $t \geqslant 0$), исходное неравенство можно будет переписать в следующем виде:

$$t^2 + 6at + 9a^2 - 4 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t + 3a)^2 \leqslant 4 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leqslant t + 3a \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -2 - 3a \leqslant t \leqslant 2 - 3a .$$

Следовательно, не более одного решения (то есть либо не имеет вовсе, либо имеет единственное решение) исходное неравенство будет иметь при $2 - 3a \leqslant 0 \Leftrightarrow a \geqslant \frac{2}{3}$.

Ответ: $a \geqslant \frac{2}{3}$.

1. Найти x, если известно, что числа

$$4\ ,\ x-3\ ,\ \cos(\arccos x)\ ,$$

взятые в указанном порядке, образуют геометрическую прогрессию.

2. Решить уравнение

$$\log_2(x-2)\cdot\log_2(x-4)=\log_2(x^2-6x+8)-1\ .$$

3. На счет, который вкладчик имел в начале первого месяца, начисляется в конце этого месяца r_1 процентов, а на тот счет, который вкладчик имел в начале второго месяца, начисляется в конце этого месяца r_2 процентов, причем $r_1+r_2=30$. Вкладчик положил на счет в начале первого месяца некоторую сумму и снял в конце того же месяца пятую часть этой суммы. При каком значении r_1 счет вкладчика в конце второго месяца окажется максимально возможным ?

4. AM — биссектриса треугольника ABC, $BM=2$, $CM=3$, D — точка пересечения продолжения AM с окружностью, описанной около данного треугольника, $MD=2$. Найти AB.

5. Решить неравенство

$$\sqrt{2-x-x^2}\cdot(\sqrt{2}\cdot\sin x-\sqrt{1-\cos 2x})\geqslant 0\ .$$

6. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$x^2-6x+4a\cdot|x-3|+4a^2\leqslant 0$$

имеет не более одного решения.

3.4.7. Вариант с решениями задач 1996 г.

1. Решить неравенство

$$3 \cdot 4^x - 7 \cdot 2^{x+1} - 5 \leqslant 0 \, .$$

Решение

Положим, $y = 2^x \Rightarrow y > 0$. В силу свойств степеней $2^{x+1} = 2y$, $4^x = y^2$, следовательно, неравенство примет вид $3y^2 - 14y - 5 \leqslant 0$. Его решения $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$, где y_1 и y_2 соответственно меньший и больший корни уравнения $3y^2 - 14y - 5 = 0$. y_1 и y_2 определяются по формулам:

$$y_1 = \frac{7 - \sqrt{7^2 + 3 \cdot 5}}{3} = \frac{7-8}{3} = -\frac{1}{3} \, , \; y_2 = \frac{7 + \sqrt{7^2 + 3 \cdot 5}}{3} = \frac{7+8}{3} = 5 \, .$$

Таким образом, исходное неравенство сводится к виду $2^x \leqslant 5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2^x \leqslant 2^{\log_2 5}$, откуда в силу возрастания функции 2^x получаем ответ.

Ответ: $x \leqslant \log_2 5$.

2. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условиями

$$\begin{cases} y \geqslant -|x| - 1 \, , \\ y \leqslant -2|x| + 3 \, . \end{cases}$$

Решение

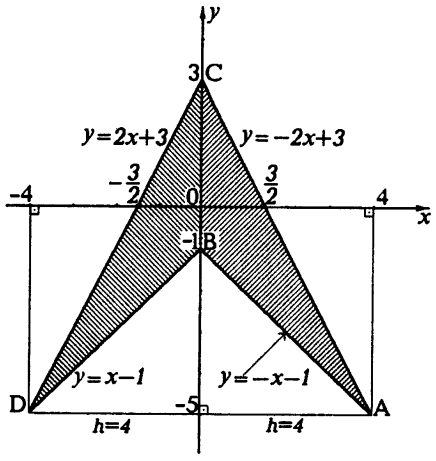


рис. 52

Пусть $x \geqslant 0$, тогда искомая фигура содержит точки, расположенные не левее оси ординат, не выше точек прямой $y = -2|x| + 3 = -2x + 3$ и не ниже точек прямой $y = -|x| - 1 = -x - 1$ (см. на рис. 52 заштрихованную фигуру справа от оси ординат). Следовательно, абсциссы x этих точек удовлетворяют неравенствам $x \geqslant 0$ и $-x - 1 \leqslant -2x + 3 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 4$, причем при $x = 4$ $-x - 1 = -2x + 3 = -5$. $A(4; -5)$ — точка пересечения прямых $y = -x - 1$ и $y = -2x + 3$. Таким образом, искомой фигуре принадлежат внутренние и граничные точки треугольника ACB, где $B(0; -1)$, $C(0; 3)$. $S_{\triangle ABC} = |BC| \cdot h/2 = 4 \cdot 4/2 = 8$.

Аналогично при $x \leqslant 0$, мы придем к тому, что искомой фигуре принадлежат также внутренние и граничные точки треугольника DBC (см. на рис. 52 заштрихованную фигуру слева от оси ординат), где $D(-4; -5)$ — точка пересечения прямых $y = -|x| - 1 = x - 1$ и $y = -2|x| + 3 = 2x + 3$. Этот треугольник симметричен треугольнику ABC относительно оси Oy, его площадь тоже равна 8, а потому площадь искомой фигуры равна 16 ед^2.

Ответ: 16 ед^2.

3. Найти область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{36 - x^2} \cdot \log_3(x^2 + 2x - 8)}{2\sin x - 1}.$$

Решение

Область определения указанной функции состоит из тех и только тех значений x, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 36 - x^2 \geqslant 0, \\ x^2 + 2x - 8 > 0, \\ \sin x - \dfrac{1}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+6)(x-6) \leqslant 0, \\ (x+4)(x-2) > 0, \\ \sin x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leqslant x \leqslant 6, \\ \left[\begin{array}{l} x < -4; \\ x > 2, \end{array}\right. \\ x \neq \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x \neq \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -6 \leqslant x < -4; \\ 2 < x \leqslant 6, \end{array}\right. \\ x \neq \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x \neq \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, \end{cases} \qquad n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots .$$

В силу того, что $3,14 < \pi < 3,15$ при всех $n \leqslant -2$ и $n \geqslant 1$ не существует значений x, удовлетворяющих последней системе. Далее при $n = -1$ и $n = 0$ с учетом только что указанных неравенств для числа π соответственно имеем:

$$-6 < -\frac{11 \cdot 3,15}{6} < -\frac{11\pi}{6} < -\frac{11 \cdot 3,14}{6} < -4 < -\frac{7 \cdot 3,15}{6} < -\frac{7\pi}{6} < 0 < 2 ,$$

$$0 < \frac{\pi}{6} < \frac{4}{6} = \frac{2}{3} < 2 < \frac{5 \cdot 3,14}{6} < \frac{5\pi}{6} < \pi < 4 < 6 .$$

На рис. 53 символически штриховками указаны промежутки значений переменной x, которые как раз и составляют искомую область определения.

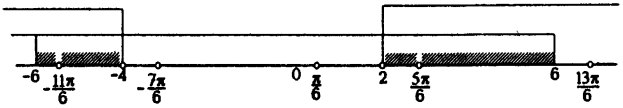


рис. 53

Ответ: $-6 \leqslant x < -\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{11\pi}{6} < x < -4$; $2 < x < \frac{5\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6} < x \leqslant 6$.

4. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x+2} - x + 4) \geqslant -1 + \log_{\frac{1}{2}} 3 .$$

Решение

Исходное неравенство равносильным образом преобразуется так:

$$\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x+2} - x + 4) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{2}} 3 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x+2} - x + 4) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 6 .$$

В силу убывания функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ последнее неравенство с учетом области определения логарифма равносильно следующей системе:

$$0 < \sqrt{x+2} - x + 4 \leqslant 6 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} \leqslant x + 2 , & \text{(А)} \\ \sqrt{x+2} > x - 4 & \text{(Б)} \end{cases}$$

Решаем неравенство (А) :

$$\sqrt{x+2} \leqslant x + 2 \Leftrightarrow 0 \leqslant x + 2 \leqslant (x+2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geqslant 0 , \\ (x+2)(x+2-1) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2 , \\ (x+2)(x+1) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 ; \\ x \geqslant -1 . \end{array} \right.$$

Решаем неравенство (Б) :

$$\sqrt{x+2} > x-4 \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x+2 \geqslant 0\,, \\ x-4<0\,; \\ x+2>(x-4)^2\,, \\ x-4 \geqslant 0 \end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \leqslant x < 4\,; \\ \begin{cases} x^2-9x+14<0\,, \\ x \geqslant 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \leqslant x < 4\,; \\ \begin{cases} (x-2)(x-7)<0\,, \\ x \geqslant 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \leqslant x < 4\,; \\ \begin{cases} 2<x<7\,, \\ x \geqslant 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \leqslant x < 4\,; \\ 4 \leqslant x < 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \leqslant x < 7\,.$$

Остается выписать значения x , удовлетворяющие условиям (А) и (Б) одновременно: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-2\,; \\ x \geqslant -1\,, \end{array}\right. \\ -2 \leqslant x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=-2\,;\ -1 \leqslant x < 7\,.$

Ответ: $x=-2\,;\ -1 \leqslant x < 7\,.$

5. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает сторону AB в точке D , а сторону BC в точке E . Найти угол BDC, если $BD : EC = 1 : 2$, $BE : AD = 2 : 7$, а угол ABC равен 60°.

Решение

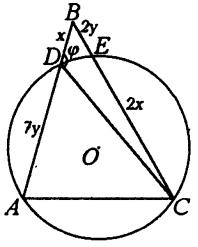


рис. 54

Положим $BD = x$, $BE = 2y$, тогда в силу условий задачи $CE = 2x$, $AD = 7y$. По свойству секущих, проведенных к окружности из одной точки ($BD \cdot BA = BE \cdot BC$), имеем $x(7y+x) = 2y(2y+2x)$, откуда

$$x^2+3xy-4y^2=0 \Leftrightarrow x^2+4xy-xy-4y^2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(x+4y)-y(x+4y)=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+4y)=0\,.$$

С учетом положительности x и y (по смыслу задачи) последнее равенство возможно лишь при $x=y$, а потому $BC=4x$. Применим теорему косинусов к треугольнику BCD , так как $\angle DBC = 60°$, $\cos 60° = 1/2$, то

$$DC = \sqrt{x^2 + (4x)^2 - 2x \cdot 4x \cos 60^\circ} = \sqrt{17x^2 - 4x^2} = x\sqrt{13}\,.$$

Теперь положим, $\angle BDC = \varphi$, $0 < \varphi < \pi$, применяя еще раз теорему косинусов к треугольнику BCD, получаем:

$$(4x)^2 = x^2 + 13x^2 - 2 \cdot x \cdot x\sqrt{13} \cdot \cos\varphi \;\Leftrightarrow\; 2x^2 = -2x^2\sqrt{13} \cdot \cos\varphi \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \cos\varphi = -1/\sqrt{13}\,.$$

Окончательно с учетом $0 < \varphi < \pi$ получаем ответ.

Ответ: $\arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{13}}\right)$.

6. При каких значениях параметра a неравенство

$$\log_{\frac{2a-15}{5}}\left(\frac{\sin x + \sqrt{3}\cos x + a - 5}{5}\right) > 0$$

выполняется для любых значений x ?

Решение

Представим правую часть неравенства в виде $0 = \log_{\frac{2a-15}{5}} 1$ и, применяя формулу вспомогательного аргумента, положим,

$$f(x) = \frac{\sin x + \sqrt{3}\cos x + a - 5}{5} = \frac{2\sin(x + \pi/3) + a - 5}{5}\,.$$

Так как наибольшее значение синуса ($\max \sin(x + \pi/3) = 1$), а его наименьшее значение ($\min \sin(x + \pi/3) = -1$), то

$$\max f(x) = \frac{2 + a - 5}{5} = \frac{a - 3}{5}\,,\quad \min f(x) = \frac{-2 + a - 5}{5} = \frac{a - 7}{5}\,.$$

Поэтому с учетом возрастания и убывания логарифмической функции неравенство при всех x выполняется тогда и только тогда, когда соответственно или

$$\begin{cases} \dfrac{2a-15}{5} > 1\,, \\ \min f(x) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 15 > 5\,, \\ a - 7 > 5 \end{cases} \Leftrightarrow a > 12\,, \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{2a-15}{5} < 1\,, \\ \min f(x) > 0\,, \\ \max f(x) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 2a - 15 < 5\,, \\ a - 7 > 0\,, \\ a - 3 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7{,}5 < a < 10\,, \\ 7 < a < 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 7{,}5 < a < 8\,.$$

Ответ: $7{,}5 < a < 8$; $a > 12$.

1. Решить неравенство

$$4 \cdot 9^x - 5 \cdot 3^{x+1} - 4 \geqslant 0 \, .$$

2. Найти площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условиями $\begin{cases} y \geqslant |x| - 1 \, , \\ y \leqslant -2|x| + 5 \, . \end{cases}$

3. Найти область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{40 + 3x - x^2} \cdot \log_5(x^2 - 9)}{2 \sin x - \sqrt{3}} \, .$$

4. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{x+3} - x + 3) \geqslant -2 + \log_{\frac{1}{4}} \frac{3}{8} \, .$$

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Продолжение стороны AB за точку B пересекается с продолжением стороны CD в точке E. Найти угол ADE, если $CE = 2BE$, $AB : EC = 7 : 2$ и косинус угла AED равен $\frac{7}{8}$.

6. При каких значениях параметра a неравенство

$$\log_{\frac{-2a-13}{5}} \left(\frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x - a - 4}{5} \right) > 0$$

выполняется для любых значений x ?

3.5. Варианты выездных письменных экзаменов по математике, проводившихся в Обнинске, Якутске, Надыме, Элисте, Пангоды, Нефтекамске, Магнитогорске, Челябинске, Архангельске, Мурманске, Саяногорске, Петропавловске-Камчатском в 1995 — 1996 годах

3.5.1. Вариант для самостоятельного решения Обнинск 1995 г.

1. Решить неравенство $\dfrac{-2}{x-1} \leqslant 1$.

2. Решить уравнение $|x-1|+|x+2|=3$.

3. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(5x-2) \leqslant \log_{\frac{1}{3}}(1-2x)$.

4. Решить уравнение $\cos 2x = \sqrt{3}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+2$.

5. Решить уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{x+4}=2-x$.

6. В треугольнике ABC найти величину угла CAB, если произведение квадрата длины стороны BC на сумму длин сторон AC и AB равняется сумме кубов длин сторон AC и AB .

7. В автопарке имеются машины двух марок — ЛиАЗы и Икарусы. В один из дней на линию вышли одна треть ЛиАЗов и все Икарусы, причем машин на линии оказалось не более 8. На другой день на линию вышли половина Икарусов и все ЛиАЗы, при этом машин вышло не более 10. Определить, какое наибольшее количество машин может быть в автопарке и сколько при этом среди них ЛиАЗов и Икарусов ?

8. Биссектрисы BE и AD треугольника ABC пересекаются в точке Q . Найти площадь треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BQD равна 1 и $2AC = 3AB$, $3BC = 4AB$.

9. Существуют ли значения параметра a , $a < -\sqrt{3}$, при которых уравнение $x^2 + 2(a+1)x - a^3 - 2a^2 - a - 0,5 = 0$ имеет ровно одно решение ?

10. Дана геометрическая прогрессия с первым членом $b_1 = 1/3$ и знаменателем $q = 2$ и арифметическая прогрессия с первым членом $a_1 = 2$, причем сумма ее n первых членов при некотором значении n_0 достигает наибольшего значения. Найти все значения разности d арифметической прогрессии, при которых существуют такие значения n_*, что суммы первых n_*, членов арифметической и геометрической прогрессий равны одному и тому же целому числу.

11. Решить систему $\begin{cases} |y| + 0,5 \leqslant \dfrac{1}{|x| + 0,5}, \\ 3^{|\sin 8x - \sin 4x|} = 5^{4y^4 - 9y^2}. \end{cases}$

12. Основанием четырехугольной пирамиды служит ромб с острым углом α и стороной a. Основание высоты пирамиды совпадает с центром окружности, касающейся стороны ромба и обеих диагоналей. Найти площадь боковой поверхности пирамиды и наибольшее боковое ребро, если высота пирамиды равна h.

3.5.2. Вариант для самостоятельного решения Якутск 1995 г.

1. Решить неравенство $\dfrac{6 + 2x}{7x} \leqslant 0$.

2. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{x-2} \geqslant 1$.

3. Решить неравенство $3^{x-0,5} - 3^{-x-0,5} \geqslant 2$.
Найти его наименьшее целое положительное решение.

4. Решить уравнение $\dfrac{|x^3| - |3x|}{\sqrt{3x^2 - 4x - 2} - 2 + |x|} = 0$.

5. Известно, что $\sin x + \cos x = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. Найти $\sin 2x$.

6. Решить уравнение $\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^{(3x-x^2)\operatorname{ctg} x}\right)^{100} = (9^{\operatorname{ctg} x})^{7x}$.

7. Найти первый член геометрической прогрессии, если известно, что ее третий член равен -15, а его квадрат в сумме с седьмым и удвоенным пятым членами дает 0.

8. Найти наибольший член последовательности
$a_n = -2n^2 + 27n - 45$, $n = 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ \ldots$.

9. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность радиуса 5. Найти периметр и площадь этого четырехугольника, если $AB = CD = 12$.

10. Найти все значения a, при каждом из которых любое решение системы уравнений $\begin{cases} y - 2a\log_2 x = 1, \\ y + a^2 \log_2 x = 1. \end{cases}$
удовлетворяет неравенству $y < 1 + x$.

3.5.3. Вариант для самостоятельного решения Надым, Элиста 1995 г.

1. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{6x-x^2-5}}{x-5} \leqslant 1$.

2. Найти сумму первых 50-ти общих членов арифметических прогрессий: $a_n = 1, 4, 7, 10, 13, \ldots$ и $b_n = 3, 8, 13, 18, \ldots$.

3. Решить неравенство $\log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} x > \log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{13x+21}{18}}$.

4. Сравнить $\sin 20^\circ + \sin 100^\circ$ и $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

5. Решить уравнение $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} + \sqrt{x+1} = 6$.

6. На укладе шпал работало две бригады с общим числом рабочих не более 21, одна из которых уложила 1600, а другая 2240 шпал. После их объединения они стали работать лучше и уложили 4080 шпал за то же время. Вычислить, сколько рабочих было в бригадах и число укладываемых каждым рабочим шпал до и после объединения, если каждый рабочий до объединения и после него укладывает одно и то же число шпал, как и другой.

7. Решить уравнение $\left(\sqrt{3-22x-16x^2}\right) \cdot (1 - |x| - \sin \pi x) = 0$.

8. Треугольник ABC с $\angle A = 20^\circ$ и $\angle C = 40^\circ$ вписан в окружность единичного радиуса. Вычислить площадь четырехугольника, образованного вершинами A и C, центром вписанной в $\triangle ABC$ окружности и следом биссектрисы угла B на описанной окружности.

9. Найти a и b, при которых уравнение $|bx - x^2| = a$ имеет три различных корня и их сумма равна $3/2$.

10. Вычислить величину радиуса вписанного в четырехгранную пирамиду шара, если известно, что ее высоты являются корнями некоторого уравнения четвертой степени, свободный член которого равен 300 , коэффициент при первой степени равен -120 .

3.5.4. Вариант для самостоятельного решения Пангоды 1995 г.

1. Решить неравенство $\dfrac{x+7}{x+3} \leqslant x+1$.

2. Решить уравнение $\log_2 \sin x + \log_2 \cos x = -1$.

3. Пусть a_1, a_2, ... , a_{20} арифметическая прогрессия, $a_3 + a_7 + a_{14} + a_{18} = 10$. Найти $a_1 + a_2 + \ \ldots \ + a_{20}$.

4. В треугольнике ABC известны стороны $AC = 5$, $BC = 7$ и высота $AD = 4$. Найти сторону AB .

5. Решить неравенство $x + 4 < \sqrt{-x^2 - 8x - 12}$.

6. Найти сумму всех трехзначных чисел, делящихся на 7 .

7. Если искомое двузначное число увеличить на 46, то получится число, произведение цифр которого равно 6. Сумма цифр искомого числа равна 14. Найти все такие числа.

8. Решить уравнение $1 - \sin x = \cos x - \sin x$.

9. При каких a один корень уравнения $ax^2 + x + 1 = 0$ больше 2, а другой корень меньше 2 ?

10. В треугольнике ABC точка L делит пополам отрезок BC , а точка K делит пополам отрезок BL . Из точки A через точки K и L проведены лучи и на них отложены вне треугольника ABC отрезок LD , равный AL , и отрезок KF , равный $AK/3$. Найти отношение площади треугольника ABC к площади четырехугольника $KLDF$.

3.5.5. Вариант для самостоятельного решения
Надым, Саяногорск, Нефтекамск, Мурманск 1996 г.

1. Решить неравенство $\left(\frac{1}{x+1}\right)^2 \geqslant \frac{1}{9}$.

2. Решить неравенство $\left(2^{\sqrt{x-3}}\right)^2 > \frac{2^x}{64}$.

3. Решить неравенство $\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)^2 \geqslant 12 + \log_3(27x^2)$.

4. Решить уравнение $\cos 2x = 4\sqrt{5}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+7$.

5. Решить систему уравнений $\begin{cases} |x+y| + \dfrac{1}{x-y} = 5, \\ 2|x+y| - \dfrac{1}{x-y} = 4. \end{cases}$

6. Длину кирпича увеличили на 25%, ширину — на 30%, а высоту уменьшили на 40%. Увеличился или уменьшился от этого объем кирпича и на сколько процентов ?

7. Произведение всех членов геометрической прогрессии b_1, b_2, ... b_{25}, имеющих нечетные номера, в 7 раз больше, чем произведение всех ее членов с четными номерами. Найти b_{13}.

8. Высота BH параллелограмма $ABCD$ площадью 8 пересекает диагональ AC в точке O. Площадь треугольника BOC равна 3. В каком отношении точка H делит сторону AD ? Какое наименьшее значение при этом может иметь длина стороны AB ?

9. В треугольнике ABC длины всех сторон — целые числа, причем длины AB и BC — простые числа, $\angle B = 120^\circ$. Найти AC.

10. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + 2x - a = 3\sin b + 4\cos b$$

хотя бы при одном b имеет единственное решение ?

1. Решить неравенство $\dfrac{1}{\log_2 x - 1} > 2$.

2. Решить уравнение $|2x-1| + |x+2| - |3-x| = 2$.

3. Дорога из пункта A в пункт B идет сначала в гору, затем — с горы. При движении из A в B автобус тратит 6 минут на подъеме и 2 минуты на спуске, а на движение из B в A автобус тратит 7 минут. Определить, во сколько раз скорость на спуске больше скорости на подъеме, если известно, что эти скорости не зависят от того, едет ли автобус из A в B или обратно?

4. Фигура состоит из параллелограмма с диагоналями d_1 и d_2 и прямоугольника, одна из сторон которого совпадает со стороной параллелограмма, а другая — вдвое больше нее. Найти наибольшее всевозможное значение площади этой фигуры, учитывая, что кроме стороны параллелограмм и прямоугольник не имеют общих точек.

5. Решить неравенство $\sqrt{4\sin^3 x + 5} \leqslant 2\sin x + 1$.

6. Решить уравнение $\log_{\sin x}(x^2-7x+13) = \log_{\sin^2 x+2}(x^2-7x+13)$.

7. В треугольнике ABC заданы все три его высоты. Определить стороны треугольника и радиус вписанной в него окружности.

8. Найти все значения параметра a , при которых выражение

$$\frac{(a-1)(x^2+2)+(a^2-3a+2)(x^2+1)+(a+1)(x^4+3x^2+2)}{(x^2+1)(x^2+2)}$$

не зависит от x .

9. Плоскость пересекает обе грани и ребро двугранного угла, причем ребро составляет с этой плоскостью угол α , а прямая, являющаяся его проекцией на эту плоскость, совпадает с одной из линий пересечения плоскости с гранями угла. Известно, что величина угла между линиями пересечения равна β , а углы, образованные линиями пересечения и ребром, острые. Найти величину двугранного угла γ при $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/3$.

10. Найти все значения параметра m , при которых сумма корней уравнения $3^t+3m+(m^2+1)3^{-t} = 0$ принимает наименьшее значение и найти это значение.

Указание к задаче 7: пусть a , b , c — стороны треугольника, а h_a , h_b , h_c — соответственно проведенные к ним высоты, тогда

$$a = \frac{2S_\triangle}{h_a}\ ,\ b = \frac{2S_\triangle}{h_b}\ ,\ c = \frac{2S_\triangle}{h_c}\ , \qquad (*)$$

подставляя в формулу Герона,

$$S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{4}\ ,$$

где $2p = a+b+c$, полученные выражения сторон, будем иметь выражение площади треугольника через его высоты, а из него с учетом $(*)$ и находим искомые выражения сторон;

радиус вписанной окружности определяется из формулы:

$$r = \frac{2S_\triangle}{a+b+c} = \frac{h_a h_b h_c}{h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a}\ .$$

3.5.7. Вариант для самостоятельного решения
Магнитогорск, Петропавловск-Камчатский 1996 г.

1. Решить неравенство $\log_2(11x-5) \leqslant 1$.

2. Решить неравенство $\dfrac{-2}{1-\dfrac{1}{3-x}} \leqslant 1$.

3. Найти сумму всех натуральных двузначных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 3.

4. Найти отношение площадей квадрата и правильного двенадцатиугольника, вписанных в одну и ту же окружность.

5. См. задачу 3. варианта п. 3.5.6.

6. См. задачу 4. варианта п. 3.5.6.

7. См. задачу 7. варианта п. 3.5.6.

8. Найти все решения уравнения

$$9^{\sin^2 x} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{\cos^2 x} = 6$$

и указать, какие из них одновременно являются корнями уравнения

$$\sin(2\sqrt{2}x - 17\sqrt{2}\pi) = 0\ .$$

9. См. задачу 9. варианта п. 3.5.6.

10. Указать все значения параметра b , для каждого из которых из неравенства $|x-b-1| + |x+b-13| \leqslant 8$ следует неравенство $\log_b(x^2-x-2) > 1$.

1. Решить неравенство $\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}} < 1$.

2. Решить уравнение $\cos 4x = 8\sin^4 x - 1$.

3. Первый член геометрической прогрессии равен первому члену арифметической прогрессии, второй — второму, а третий — четвертому. Какому члену арифметической прогрессии равен четвертый член геометрической прогрессии ?

4. Решить неравенство $\log_\pi \pi x^2 < \log_e ex$.

5. Какую наибольшую часть плоскости можно покрыть неперекрывающимися кругами одного радиуса ?

6. Решить уравнение $\sqrt{x}(x^2+x-4) = 4x^2 - 10x + 8$.

7. Решить систему уравнений $\begin{cases} |x+y| + |x-y| \leqslant 1 , \\ y = \cos\left(\dfrac{2\pi x}{3}\right) . \end{cases}$

8. Вычислить величину угла A треугольника ABC , если величина угла B равна $36°$ и известно, что биссектриса угла C делит пополам угол между медианой и высотой, исходящими из этого угла.

9. Найти все значения параметра a , при которых неравенство

$$a(a^2-1)x^2 \leqslant a(2ax+1)$$

выполнено при любых значениях x .

10. Пирамида $SABC$ вписана в шар, центр которого лежит на прямой, определяемой ее высотой SH; на этой же прямой лежит также центр вписанного в эту пирамиду шара. Найти расстояние между центрами шаров, если $SA = 6$, $AB = 9$.

3.6. Ответы

Ответы к варианту 3.1.2.

1. $(\,(5-\sqrt{13})/2\,,\ 1\,]\cup[\,4\,,\ (5+\sqrt{13})/2)$.

2. $\left[\,\dfrac{\pi}{6}\,,\ \dfrac{\pi}{2}\,\right]$. 3. $[\,\log_2 17\,,\ 6\,]$. 4. $\dfrac{8}{3}$.

5. 1) $b=(-a^2-1)/2$, $\forall a\in R$, точка M—$M(-2;-1)$;
   2) $a=b=0$, точка M—$M(-1;0)$.

6. $(-\infty\,,\ -\sqrt{2}/2)\cup(\sqrt{2}/2\,,\ +\infty)$.

Ответы к варианту 3.1.4.

1. $-\dfrac{4}{3}\,;\ -\dfrac{2}{3}$. 2. $\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$. 3. $[\,0\,,\ +\infty)$.

4. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 5. $1\,;\ \dfrac{17}{16}$. 6. $\sqrt{217}$.

Ответы к варианту 3.1.6.

1. $\pm\dfrac{1}{3}\cdot\arccos(1-\sqrt{2})+\dfrac{2\pi n}{3}$, $n=0\,;\ \pm1\,;\ \pm2\,;\ \ldots$.

2. $\{2\}\cup[\,3\,,\ 11\,]$. 3. $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n=0\,;\ 1\,;\ 2\,;\ \ldots$.

4. 60 . 5. $75+25\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{49}$. 6. $2\sqrt{6}$.

Ответы к варианту 3.1.8.

1. 9 . 2. $\left(0\,,\ \dfrac{1}{2}\right)\cup[\,1\,,\ 2)\cup(3\,,\ 6\,]$.

3. $2\pi-\arccos(\log_2(\sqrt{6}-1))\,;\ 2\pi+\arccos(\log_2(\sqrt{6}-1))$.

4. $(0\,,\ \sqrt{a^2+1}-a\,]$ при $a\geqslant-1\,;\ (0\,,\ -a-\sqrt{a^2-1}\,]\cup$
   $\cup[\,-a+\sqrt{a^2-1}\,,\ -a+\sqrt{a^2+1}\,]$ при $a<-1$.

5. 1) $\dfrac{p^2}{4(1+p)}<\dfrac{r}{R}\leqslant\dfrac{p^2}{2(1+p)}$; 2) $\dfrac{p}{p+1}\sqrt{4(p+1)Rr-p^2R^2}$.

6. $\dfrac{36-9\sqrt{6}}{5}$.

Ответы к варианту 3.1.10.

1. $\{-11\,;\,16\}$. 2. $\{2\,;\,\sqrt{3}\}\,;\,\{\sqrt{3}\,;\,2\}$. 3. $\dfrac{\sqrt{(4b^2-c^2)(4c^2-b^2)}}{30}$.

4. $\left(-\dfrac{11\pi}{6}\,,\,-\dfrac{3\pi}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{3\pi}{2}\,,\,-\dfrac{7\pi}{6}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{6}\,,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2}\,,\,\dfrac{5\pi}{6}\right)\cup\left(\dfrac{13\pi}{6}\,,\,7\right]$.

5. 17. 6. $\dfrac{57\sqrt{2}-64}{36}$.

Ответы к варианту 3.1.12.

1. $\left[-\dfrac{2}{7}\,,\,-\dfrac{1}{7}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{7}\,,\,0\right]$. 2. $-2\,;\,-\dfrac{11}{2}$.

3. $\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n\,,\ n=0\,;\,\pm1\,;\,\pm2\,\ldots$. 4. $\sqrt{10}$.

5. $\{2\,;\,1\}\,;\,\{2\,;\,-1\}\,;\,\{-2\,;\,1\}\,;\,\{-2\,;\,-1\}$. 6. $43\cdot\left(\dfrac{2}{15}+\dfrac{4\sqrt{30}}{99}+\dfrac{14}{55}\right)$.

Ответы к варианту 3.1.14.

1. 12. 2. 6 литров.

3. $\log_3\frac{-(a+2)+\sqrt{a^2+2a-8}}{2}$ при $a\leqslant-6$;
$\log_3\frac{-(a+2)\pm\sqrt{a^2+2a-8}}{2}$ при $-6<a<-4$;
0 при $a=-4$; $\varnothing$ при $a>-4$;
единственное решение при $a\leqslant-6$ и $a=-4$.

4. $\left[0\,,\,\dfrac{15+2\sqrt{42}}{57}\right)$. 5. $\left\{9\,;\,\dfrac{\sqrt{87}-3}{13}\,;\,\dfrac{70-6\sqrt{87}}{13}\right\}$. 6. 1 ; 16.

Ответы к варианту 3.2.2.

1. $(\log_3 2\,,\,1)\cup(\log_3 4\,,\,+\infty)$. 2. $\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi n}{2}\,,\ n=0\,;\,\pm1\,;\,\pm2\,;\,\ldots$.

3. $[-1\,,\,0\,]\cup\{8\}$. 4. $14+2\sqrt{10}$. 5. 6 месяцев. 6. 13.

Ответы к варианту 3.2.4.

1. $\{-5\,;\,-7\}\,;\ \{0\,;\,0\}\,;\ \{5\,;\,7\}$. 2. $[\,0\,,\,5\,]$.
3. $\frac{\pi}{2}+2\pi n\,,\ n=2\,;\,3\,;\,4\,;\,\ldots\,;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi m\,,\ m=1\,;\,0\,;\,-1\,;\,-2\,;\,\ldots$.
4. $(x-2)^2+(y-5)^2=20$. 5. 4000 или 8000 велосипедов. 6. $7:6$.

Ответы к варианту 3.2.6.

1. $(-\infty\,,\,-1\,]\cup\left(\frac{17}{8}\,,\,+\infty\right)$. 2. $\frac{4\pi}{3}+2\pi n\,,\ n=0\,;\,\pm1\,;\,\pm2\,\ldots$.
3. $50\,;\ 4\sqrt{154}$. 4. 2120 тыс.руб. 5. $\{-1\}\cup(2\,,\,4\,]$.
6. $\frac{2}{5}$ достигается при $p=\pm\frac{3}{5}\,,\ q=\frac{9}{5}$.

Ответы к варианту 3.2.8.

1. 11. 2. $\frac{\pi}{2}+\pi n\,,\ n=0\,;\,\pm1\,;\,\pm2\,\ldots$. 3. $\left[\frac{4}{5}\,,\,+\infty\right)$.
4. 6 лет. 5. $12\pm5\sqrt{3}$. 6. $\left[\frac{3}{4}\,,\,+\infty\right)$.

Ответы к варианту 3.2.10.

1. $\{-2\,;\,-1\}$. 2. $\left[-1\,,\,-\frac{2}{3}\right)$.
3. $\frac{2\pi}{3}+4\pi k\,,\ k=0\,;\,\pm1\,;\,\pm2\,\ldots$.
4. 123 кг ; 158 кг. 5. $\sqrt{41}$. 6. $\left(\frac{3\pi}{2}\,,\frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответы к варианту 3.2.12.

1. $[-3\,,\,-1)\cup(1\,,\,5]$. 2. $\{2\,;\,-3\}$. 3. 5700 тыс. руб. ; 6100 тыс. руб.
4. $\frac{\pi}{2}+\pi n\,;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\,,\ n=0\,;\,\pm1\,;\,\pm2\,;\,\ldots$. 5. 6. 6. 9.

Ответы к варианту 3.3.2.

1. 3 при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $a - 9b \neq 0$.
2. $\pm \arccos \frac{5}{6} + \pi n$, $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$.
3. $\frac{5}{4}$ часа. 4. $(-1, 0) \cup (0; 4)$.
5. $80°$, $60°$, $40°$. 6. $\left[\frac{3}{4}, 1\right) \cup \left(1, \frac{5}{4}\right]$.

Ответы к варианту 3.3.4.

1. $\sqrt{15}$. 2. $9/2$ при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $7a \neq 3b$.
3. $(-\infty, -5)$. 4. $\pm(1 \pm \pi n)$, $n = 0; 1; 2; \ldots$.
5. $\sqrt{6}$; $6\sqrt{6}$. 6. $[-\sqrt{8}, 0) \cup (0, \sqrt{8}]$.
7. $\frac{\sqrt{15}}{3}$. 8. второй бассейн.

Ответы к варианту 3.3.6.

1. $2\sqrt{14}$. 2. 13. 3. -2; 5.
4. $\frac{\pi n}{6}$; $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$.
5. $(-4, -2)$. 6. $(-\pi + 2\pi n, 2\pi n)$, $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$.
7. 54,1%. 9. 28 млн. т. 10. $\frac{\sqrt{3}}{12}$, 1 : 2.

Ответы к варианту 3.3.8.

1. $[-2, -1] \cup (3, 4)$. 2. 3.
3. $-\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n$, $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$.
4. $(-\infty, -1 - 2\log_3 2]$. 5. $0 < v \leqslant 48$ км./час. 6. $30°$, $60°$.
7. $\varnothing$ при $a < -5$; $0 \leqslant x \leqslant (a+5)^2$ при $-5 \leqslant a \leqslant -1$; $(a+1)^2 \leqslant x \leqslant (a+5)^2$ при $a > -1$.
8. $12\pi + 8$. 9. $\{-3\} \cup \{0\}$ при $a = 0$; $\{0\}$ при $a \neq 0$.

Ответы к варианту 3.3.10.

1. 3 . 2. $(-\infty\,,\ -4\,]\cup[\,4\,,\ +\infty)$. 3. $\{-7/3\,;\ 0\}\cup\{14\,;\ 14\}$.
4. $(-\infty\,,\ \log_6 5\,]\cup(1\,,\ 4)$. 5. $\pm 1/3\,;\ \pm 5/3\,;\ \pm\sqrt{3}$.
6. 4 л. 7. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. 8. $[\,224\,,\ +\infty)$.

Ответы к варианту 3.3.12.

1. $(-\infty\,,\ 1\,]\cup(1996\,,\ +\infty)$.
2. $\pm\dfrac{2\pi}{15}+\dfrac{4\pi n}{5}$, $n=0\,;\ \pm 1\,;\ \pm 2\,;\ \ldots$.
3. $\dfrac{9}{4}$. 4. $(-\infty\,,\ -1)\cup(1\,,\ +\infty)$. 5. не менее 1,4 дл.
6. $\dfrac{12}{5}$ см. 7. $\pm\left((-1)^{n+1}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi n}{2}\right)$, $n=1\,;\ 2\,;\ \ldots$.
8. $\left[-\dfrac{1}{3}\,,\ +\infty\right)$.

Ответы к варианту 3.3.14.

1. 17 . 2. $-3\,;\ -1$.
3. $\pi/14\,;\ 3\pi/14\,;\ 5\pi/14\,;\ 9\pi/14\,;\ 11\pi/14\,;\ 13\pi/14$.
4. $(-\infty\,,\ -2)\cup\,(-1\,,\ -0{,}5)$.
5. $\{0\,;\ 0\}\,;\ \{1\,;\ 6\}\,;\ \{1{,}4\,;\ -8{,}4\}$. 6. $\dfrac{1}{13}$.
7. 9,6 см.^{2} . 8. -1 .

Ответы к варианту 3.4.2.

1. $[\,2\,,\ 4)$. 2. 18 . 3. $\sqrt{5}$.
4. $\left(\dfrac{5}{6}\,,\ 1\right)\cup(1\,,\ 5\,]$. 5. $\dfrac{\pi}{2}\,;\ -\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n=1\,;\ 2\,;\ 3\ \ldots$.
6. $\left[-\dfrac{5}{2}\,,\ \dfrac{5}{2}\right]$.

Ответы к варианту 3.4.4.

1. $1:2$, в 10 раз . 2. 0 ; 2 . 3. 10 .
4. $\pi + 2\pi n$, $n = 0$; ± 1 ; ± 2 ; ... .
5. 6 . 6. $\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$.

Ответы к варианту 3.4.6.

1. 1 . 2. 6 . 3. 25 . 4. $\sqrt{10}$.
5. $\{-2\} \cup [\,0\,,\,1\,]$. 6. $\left[\,\dfrac{3}{2}\,,\,+\infty\right)$.

Ответы к варианту 3.4.8.

1. $[\,\log_3 4\,,\,+\infty)$. 2. 12 .
3. $\left[\,-5\,,\,-\dfrac{4\pi}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{4\pi}{3}\,,\,-3\right) \cup \left(3\,,\,\dfrac{7\pi}{3}\right) \cup \left(\dfrac{7\pi}{3}\,,\,8\,\right]$.
4. $\{-3\} \cup [\,-2\,,\,6)$. 5. $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)$.
6. $(-\infty\,,\,-11) \cup (-7\,,\,-6{,}5)$.

Ответы к варианту 3.5.1.

1. $(-\infty\,,\,-1\,] \cup (1\,,\,+\infty)$. $[\,-2\,,\,1\,]$. 3. $\left[\,\dfrac{3}{7}\,,\,\dfrac{1}{2}\right)$.
4. $\pm 5\pi/6 + 2\pi k$, $k = 0$; ± 1 ; ± 2 ; ... .
5. 0 . 6. $60°$.
7. 12 машин , 6 ЛиАЗов , 6 Икарусов .
8. $\dfrac{115}{16}$. 9. Да , $-1 - 1/\sqrt[3]{2}$. 10. -3 ; $-1/2$.
11. $\{0\,;\,0\}$; $\left\{0\,;\,\pm\dfrac{3}{2}\right\}$; $\left\{\pm\dfrac{\pi}{12}\,;\,0\right\}$; $\left\{\pm\dfrac{\pi}{4}\,;\,0\right\}$; $\left\{\pm\dfrac{5\pi}{12}\,;\,0\right\}$.
12. $S_{\text{б}} = \dfrac{a}{2}(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$, где

$$h_1 = \sqrt{h^2 + 2a^2 \sin^2\frac{\alpha}{4} \sin^2\frac{\pi-\alpha}{4}}\ ;\ h_2 = \sqrt{h^2 + 2a^2 \sin^2\frac{3\alpha}{4} \sin^2\frac{\pi-\alpha}{4}}\ ;$$

$$h_3 = \sqrt{h^2 + a^2\left(\sin\alpha - \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\pi-\alpha}{4}\right)^2}\,;$$

$$h_4 = \sqrt{h^2 + a^2\left(\sin\alpha - \sqrt{2}\sin\frac{3\alpha}{4}\sin\frac{\pi-\alpha}{4}\right)^2}\,;$$

$$\max l_6 = \sqrt{h^2 + 2a^2\sin^2\frac{\alpha}{4}\sin^2\frac{\pi-\alpha}{4} + \frac{a^2}{4}\left(3\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} - 1\right)^2}\,.$$

Ответы к варианту 3.5.2.

1. $[-3\,,\,0)$. 2. $[-1\,,\,0)$. 3. $[\log_3(\sqrt{3}+2)\,,\,+\infty)$, 2.
4. $-\sqrt{3}$. 5. $\frac{1}{2}$. 6. 3,14; $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n=0\,;\,\pm1\,;\,\pm2\,;\,\ldots$.
7. -5. 8. 46 при $n=7$. 9. 48, 120.
10. $(-\infty\,,\,-2)\cup(-2\,,\,+\infty)$.

Ответы к варианту 3.5.3.

1. $[1\,,\,5)$. 2. 19025. 3. $\left(0\,,\,\frac{3}{2}\right)$.
4. $\sin 20^\circ + \sin 100^\circ > \frac{\sqrt{6}}{2}$.
5. 0. 6. 5 рабочих, 7 рабочих; 320 шпал, 340 шпал.
7. $-\frac{3}{2}\,;\,-1\,;\,\frac{1}{8}$. 8. $\frac{3\cos 10^\circ}{2}$. 9. $\left\{\frac{1}{4}\,;\,1\right\}$. 10. $\frac{5}{2}$.

Ответы к варианту 3.5.4.

1. $[-4\,,\,-3)\cup(1\,,\,+\infty)$. 2. $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n=0\,;\,\pm1\,;\,\pm2\,;\,\ldots$.
3. 50. 4. $2\sqrt{29}\,;\,4\sqrt{2}$. 5. $[-6\,,\,-4+\sqrt{2})$. 6. 70336.
7. 77 и 86. 8. $-\frac{\pi}{4}+\pi n\,;\,-\frac{\pi}{4}+\frac{(-1)^n\pi}{4}+\pi n$, $n=0\,;\,\pm1\,;\,\pm2\,;\,\ldots$.
9. $\left(-\frac{3}{4}\,,\,0\right)$. 10. $\frac{12}{5}$.

Ответы к варианту 3.5.5.

1. $[-4\,,\ -1)\cup(-1\,,\ 2]$. 2. $[3\,,\ 12)$.

3. $\left(0\,,\ \frac{1}{27}\right)\cup[243\,,\ +\infty)$.

4. $(-1)^k \arcsin\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)+\pi k\,,\ n=0\,;\ \pm1\,;\ \pm2\,;\ \ldots$.

5. $\left\{-\frac{5}{4}\,;\ -\frac{7}{4}\right\}\,;\ \left\{\frac{7}{4}\,;\ \frac{5}{4}\right\}$. 6. уменьшился на $2{,}5\%$.

7. 7. 8. $1:2$, $\frac{4}{\sqrt{3}}$. 9. 7. 10. $[-6\,,\ 4]$.

Ответы к варианту 3.5.6.

1. $(2\,,\ 2\sqrt{2})$. 2. $-3\,;\ 1$. 3. в 1,5 раза или в 2 раза.

4. $\frac{d_1^2+d_2^2}{2}+\frac{\sqrt{5}d_1d_2}{2}$. 5. $\frac{\pi}{2}+2\pi n\,,\ n=0\,;\ \pm1\,;\ \pm2\,;\ \ldots$.

6. 3. 8. 1.

9. $\gamma=\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha}\right)=\operatorname{arctg}\sqrt{6}=\arccos\sqrt{\frac{1}{7}}$.

10. $m=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\min(t_1+t_2)=2-\log_3 5$.

Ответы к варианту 3.5.7.

1. $\left(\frac{5}{11}\,,\ \frac{7}{11}\right]$. 2. $(-\infty\,,\ 2)\cup\left[\frac{8}{3}\,,\ 3\right)\cup(3\,,\ +\infty)$.

3. 1265. 4. $2:3$. 5. в 1,5 раза или в 2 раза.

6. $\frac{d_1^2+d_2^2}{2}+\frac{\sqrt{5}d_1d_2}{2}$.

8. $\frac{\pi}{2}+\pi n\,,\ n=0\,;\ \pm1\,;\ \pm2\,;\ \ldots,\ \frac{17\pi}{2}$.

9. $\gamma=\arccos\left(\sqrt{\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta}{1-\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}}\right)=\arccos\sqrt{\frac{1}{7}}=\operatorname{arctg}\sqrt{6}$.

10. $(0\,,\ 1)\cup(1\,,\ 4)\cup(10\,,\ +\infty)$.

Ответы к варианту 3.5.8.

1. $(-1\ ,\ 0) \cup (0\ ,\ 1) \cup (1\ ,\ +\infty)$.

2. $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k\ ,\ k = 0\ ;\ \pm 1\ ;\ \pm 2\ ;\ \ldots$.

3. $b_4 = a_8$ или $d = 0 \Leftrightarrow q = 1$, то есть $b_4 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \ldots$.

4. $(0\ ,\ 1)$. 5. $\frac{\pi\sqrt{3}}{6} \approx 91\%$.

6. 4 . Указание: отсутствие других корней устанавливается путем деления многочлена на многочлен.

7. $\left\{\pm\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right\}$. 8. $54°$. 9. $\left[0\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

10. $\frac{3(\sqrt{21}+1)}{4}$. Указание: доказать, что пирамида правильная.

1. О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ИЗЛОЖЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ УСТНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ

В методических материалах, изложенных в п. 2 данного раздела, приводятся формулировки вопросов второго раздела "Программы по математике" в том виде, в котором они могут быть включены в билеты устного экзамена. *Все* вопросы снабжены полными и достаточно подробными ответами. Это касается как вопросов алгебры и тригонометрии (из подраздела 1.2.1. "Алгебра") по причине недостаточной полноты изложения и даже отсутствия некоторых из них в ряде школьных учебников и пособий для школьников и абитуриентов изданий последних лет, так и вопросов геометрии (из подраздела 1.2.2. "Геометрия"), ответы на которые базируются на приводимой системе аксиом, имея, таким образом, *единую логическую структуру изложения материала.*

В конце каждого из ответов на вопросы по геометрии указывается, где, в каком из указанных в списке литературы на следующей странице учебников можно найти необходимые доказательства. В дополнении к разделу "Геометрия" (п. 2.3.) приводятся примеры различных схем изложения материала, базирующихся на разных системах аксиом, а потому и фигурирующих различных определениях тех или иных геометрических объектов. Весьма целесообразно обратить внимание на приведенную в начале раздела "Геометрия" систему первичных понятий, аксиом, определений и утверждений, которые используются при доказательстве теорем, изложенных в ответах на вопросы п. 2.3. Важно также обратить внимание на приведенные в дополнении к разделу "Геометрия" определения основных геометрических объектов и ряд теорем, которые могут быть использованы при решении задач как на письменном, так и на устном экзаменах.

В вводной части методических материалов приводится план исследования свойств функций $y = f(x)$, включенных в "Программу по математике", определения и другие важные сведения, например, что можно использовать на экзаменах без доказательств. Важно также обратить внимание на материал в начале и в конце каждого из разделов методических материалов, на списки литературы и обозначений, которые приведены в самом начале этих материалов.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ К ОТВЕТАМ НА ВОПРОСЫ БИЛЕТОВ УСТНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ

Данные методические материалы включают в себя вводную часть, три раздела "Алгебра", "Тригонометрия", "Геометрия" и "Приложения". Во всех разделах приводятся не только формулировки соответствующих определений и теорем, но и даются достаточно подробные доказательства, то есть фактически — полные ответы на вопросы, которые в ряде современных школьных учебников могут либо вовсе отсутствовать, либо приводиться недостаточно полно. Однако в приводимом ниже списке литературы ([1] — [11]) можно найти более подробный материал по вопросам указанных разделов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Потапов М.К., Александров В.В., Пасиченко П.И.
"Алгебра и анализ элементарных функций." — М.: 1980 , 1996.
"Алгебра и начала анализа." — М., 1998.
2. Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х.
"Пособие по математике для поступающих в вузы." — М.: 1976 , 1995.
3. Будак А.Б. "Элементарная математика. Подготовительный курс для высшей школы." — М.: изд-во МГУ, "Ротапринт", 1992.
4. Проскуряков И.В. "Числа и многочлены" — М.: "Педиздат", 1949.
5. Погорелов А.В. "Геометрия." Учебник для 7—11 классов средней школы. — М.: "Просвещение", изд. не ранее 1990 г., то есть 1990 — 2000.
6. Атанасян Л.С. и др. "Геометрия." Учебник для 7—9 классов средней школы. — М.: "Просвещение", 1991 — 2000.
7. Атанасян Л.С. и др. "Геометрия." Учебник для 10—11 классов средней школы. — М.: "Просвещение", 1992 — 2000.
8. Киселев А.П., Рыбкин Н.А. "Геометрия. Планиметрия." Учебник и задачник , 7—9 классы. — М.: "Дрофа", 1995.
9. Киселев А.П., Рыбкин Н.А. "Геометрия. Стереометрия." Учебник и задачник , 10—11 классы. — М.: "Дрофа", 1995.
10. Погорелов А.В. "Элементарная геометрия." — М.: "Наука", 1977.
11. Киселев А.П. "Элементарная геометрия." — М.: "Просвещение", 1996.
12. Якушева Е.В., Попов А.В., Якушев А.Г.
"Математика. Ответы на вопросы. Серия экзамен." — М.: 2001.
13. Генденштейн Л.Э., Ершова А.П. "Наглядный справочник по геометрии" для 7—11 классов. — М.: 1997.
14. Генденштейн Л.Э., Ершова А.П., Ершова А.С.
"Наглядный справочник по алгебре и началам анализа с примерами" для 7—11 классов. — М.: 1999.

15. Звавич Л.И., Рязановский А.Р. "Алгебра а таблицах", 7—11 классы. — М.: Дрофа, 2000.
16. Звавич Л.И., Рязановский А.Р. "Геометрия а таблицах", 7—11 классы. — М.: Дрофа, 2000.
17. Ефимов Н.В. "Высшая геометрия." — М.: "Наука", 1978 .
18. Гильберт Д. "Основания геометрии." — М.—Л.: "Гостехиздат", 1948 .
19. Ильин В.А., Позняк Э.Г. "Аналитическая геометрия." — М.: "Наука", 1988.
20. Ильин В.А., Позняк Э.Г. "Основы математического анализа. Ч. I." — М.: "Наука", 1982.
21. "Пособие по математике для поступающих в вузы." Под редакцией Г.Н. Яковлева — М.: "Наука", 1988.

2.0. Вводная часть

2.0.1. План исследования свойств функции $y = f(x)$

I. Область определения функции.
II. Область изменения функции.
III. Наибольшее и наименьшее значения функции, если они существуют.
IV. Четность и нечетность функции.
V. Периодичность функции.
VI. Нули функции, промежутки знакопостоянства функции.
VII. Участки монотонности функции.
VIII. График функции. Точки пересечения графика функции с осями координат, если они есть. Для некоторых функций нужно исследовать и поведение функции и на границах области определения.

Замечание. В "Приложениях к материалам" (в п. 2.4.) рассматривается вопрос о выпуклости функции и это свойство устанавливается для всех изучаемых алгебраических и тригонометрических функций.

2.0.2. Определения

Пусть заданы два непустых числовых множества X и Y. Если каждому числу $x \in X$ ставится в соответствие (по некоторому закону f) единственное число $y \in Y$ (символическое обозначение $x \xrightarrow{f} y$), то говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$.

Определение 1. Множество X называется *областью определения* функции $y = f(x)$, обозначается $D[f]$; x — *аргумент функции.*

Определение 2. Множество Y таких чисел y, для которых существует $x \in X$, что $y = f(x)$ называется *областью изменения* или *областью значений* функции $y = f(x)$, обозначается $E[f]$; $y = y(x) = f(x)$ — значение функции, отвечающее значению аргумента x.

Определение 3. Число $M_0(m_0)$ называется *наибольшим (наименьшим)* значением функции $y = f(x)$ на множестве $X \quad (X \subseteq D[f])$, если

$$1)\ \forall x \in X \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant M_0 \quad (f(x) \geqslant m_0),$$
$$2)\ \exists x_0 \in X: \quad f(x_0) = M_0 \quad (f(x_0) = m_0),$$

обозначается $M_0 = \max\limits_{x \in X} f(x)$, $\qquad m_0 = \min\limits_{x \in X} f(x)$.

Определение 4. Пусть область определения $D[f] = X$ функции $y = f(x)$ такова, что она симметрична относительно точки $x_0 = 0$, то есть $\forall x_0 \in X \Rightarrow -x_0 \in X$. Функция $y = f(x)$ называется *четной (нечетной)*, если $\forall x \in D[f] \ \Rightarrow\ f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$.

Определение 5. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует $T \neq 0$, удовлетворяющее условиям

$$1)\ \forall \quad x \in D(f) \quad \Rightarrow \quad x \pm T \in D(f),$$
$$2)\ \forall \quad x \in D(f) \ \Rightarrow\ f(x+T) = f(x).$$

Число T называется *периодом* функции $y = f(x)$.

Из этого определения легко вывести: если T — период функции $y = f(x)$, то и $-T$ также период этой функции, так как в силу периодичности

$$f(x-T) = f[(x-T)+T] = f(x), \quad \text{то есть} \quad f(x-T) = f(x);$$

(если строго, то по индукции) для любого $m \in Z$, $m \neq 0$ устанавливаётся, что mT — также период этой функции (см. [3], гл. 4, §1, п.2^0, утв. 3).

Наименьшее $T > 0$ — период функции $y = f(x)$ называется *основным периодом* этой функции.

Определение 6. Число $x_0 \in D[f]$ называется *нулем* функции $y = f(x)$, если $f(x_0) = 0$.

Промежуток $X' \subseteq D[f]$ называется *промежутком знакопостоянства* функции $y = f(x)$, если либо $\forall x \in X' \Rightarrow f(x) > 0$, либо $\forall x \in X' \Rightarrow f(x) < 0$.

Определение 7. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* на множестве $X \quad (X \subseteq D[f])$, если для любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))$.

Возрастающие и убывающие функции называют *строго монотонными*.

(Если выполняются неравенства $f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (f(x_1) \geqslant f(x_2))$, то функция называется *неубывающей (невозрастающей)*).

Неубывающие и невозрастающие функции называют *монотонными*.

Определение 8. Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек на координатной плоскости с координатами $(x; f(x))$, где x — произвольное из области определения $D[f]$ (часто говорят x "пробегает" всю область определения $D[f]$). Обозначение графика функции $y = f(x)$:

$$\Gamma_f \quad — \quad \{(x;y): \quad x \in D[f], \quad y = f(x)\}.$$

Если $f(x_0) = 0$, где $x_0 \in D[f]$, то точка с координатами $(x_0; 0)$ — точка пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Ox; если $0 \in D[f]$, то точка $(0; f(0))$ — точка пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Oy.

Следует рассматривать вопрос о поведении функции на границах области определения, например, при $x \to \pm\infty$ и т.п.

Всвязи с этим ниже, в пунктах 2.1. и 2.2. используются следующие обозначения: $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to 0+0$, $x \to 0-0$;
$\to$ означает "стремится", ∞ — бесконечность;
обозначения типа $\to 0+0$, $\to 0-0$ означают соответственно "стремится к нулю справа" и "стремится к нулю слева".
Строгие определения этих и всех других терминов такого рода выходят за рамки Программы вступительных экзаменов по математике в МГУ.

2.0.3. О материале, который может быть использован на экзаменах без доказательств

На вступительных экзаменах по математике поступающие в вузы могут без формулировок определений использовать понятия суммы и произведения двух натуральных чисел (из множества N), двух целых чисел (из множества Z), двух рациональных чисел (из множества Q), можно ограничиться знанием лишь описания этих понятий, как это, например, делается в главе 1 [1].

Без формулировок определений, а ограничившись знанием описания, можно также использовать и правила сравнения чисел натуральных, целых и рациональных (см. главу 1 [1]).

Сформулируем определения сравнения, а также — суммы и произведения двух действительных чисел (бесконечных десятичных дробей).

Пусть $a = \pm a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$ — бесконечная десятичная дробь
($a_0 \in N_0$, $\forall k \in N \quad a_k \in N_0$, $0 \leqslant a_k \leqslant 9$, см. стр. 11),
$a \stackrel{df}{=} 0$, если $\forall j \in N_0 \Rightarrow a_j = 0$, т.е. $a = 0,000...0... = 0,(0)$, $0 = +0 = -0$;
$a \stackrel{df}{\neq} 0$. Если $\exists j_0 \in N_0 \ : \quad a_{j_0} \neq 0$, то есть $a_{j_0} \in N$; если $a \neq 0$, то $a \stackrel{df}{—}$ число или положительное, или отрицательное. Положительное число обозначается $a = +a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$, как правило, $a = a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$, отрицательное число обозначается $a = -a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$.
При этом (см. о периодических дробях на стр. 11) исключаются из рассмотрения дроби с периодом 9 , то есть дроби вида $\pm a_0, a_1 a_2 ... a_k(9)$.
Таким образом, $\forall j \in N_0 \ \exists k \in N, \ k > j \ : \ a_k \leqslant 8$.

Пусть $a = a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$ и $b = b_0, b_1 b_2 ... b_n ...$ — положительные числа, *по определению* считают: $a = b$, если $\forall \ j \ \in \ N_0 \Rightarrow a_j = b_j$;
$a > b$ $(a < b)$, если либо $a_0 > b_0$ $(a_0 < b_0)$,
либо $\exists \ j_0 \in N_0 \ : \ \forall \ j \in N_0, \ j \leqslant j_0 \quad a_j = b_j$, $a_{j_0+1} > b_{j_0+1}$ $(a_{j_0+1} < b_{j_0+1})$;
если c — положительное число, d — отрицательное число, то *по определению* считают $c > d$; $d < c$; $c > 0$; $0 < c$; $d < 0$; $0 > d$;

если c и d отрицательные числа, то *по определению* считают
$c = d \Leftrightarrow |c| = |d|$; $c > d$ $(c < d) \Leftrightarrow |c| < |d|$ $(|c| > |d|)$.

Определение 1. А) Пусть число $a = a_0, a_1a_2...a_n... > 0$, n — произвольное число из N_0 , то есть $n = 0$; 1 ; 2 ;... . Число $\alpha'_n = a_0, a_1a_2...a_n(0) = a_0, a_1a_2...a_n \in Q$ называется *рациональным приближением числа a по недостатку (или с недостатком) с точностью* $1/10^n$;
число $\alpha''_n = \alpha'_n + 1/10^n \in Q$ называется *рациональным приближением числа a по избытку (или с избытком) с точностью* $1/10^n$.
(Отметим, что если $a_n \leqslant 8$, то $\alpha''_n = a_0, a_1a_2...a'_n(0)$, $a'_n = a_n + 1$;
если $a_n = a_{n-1} = ... = a_{n-k} = 9$, $k \in N$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$,
то $\alpha''_n = a_0, a_1a_2...a'_{n-(k+1)}(0)$, $a'_{n-(k+1)} = a_{n-(k+1)} + 1$).
Б) Пусть число $b = -b_0, b_1b_2...b_m... < 0$, $m = 0$; 1 ; 2 ;... . Число $\beta''_m = -b_0, b_1b_2...b_m(0) = -b_0, b_1b_2...b_m \in Q$ называется *рациональным приближением числа b по избытку (или с избытком) с точностью* $1/10^m$;
число $\beta'_m = \beta''_m - 1/10^m \in Q$ называется *рациональным приближением числа b по недостатку (или с недостатком) с точностью* $1/10^m$.
(Отметим, что если $b_m \leqslant 8$, то $\beta'_m = b_0, b_1b_2...b'_m(0)$, $b'_m = b_m + 1$;
если $b_m = b_{m-1} = ... = b_{m-k} = 9$, $k \in N$, $1 \leqslant k \leqslant m-1$,
то $\beta'_m = b_0, b_1b_2...b'_{m-(k+1)}(0)$, $b'_{m-(k+1)} = b_{m-(k+1)} + 1$).
В) Если $a = 0 = 0,(0) = 0,00...0...$, то его рациональные приближения по недостатку и избытку с любой точностью *считаются равными нулю.*

Примеры см. [3], гл.1, §4, п. 4^0 .

Из определений сравнения действительных чисел и 1 вытекает, что
$\forall a \in R$, $\forall n \in N_0 \Rightarrow \alpha'_n \leqslant a \leqslant \alpha''_n$.

Определение 2. Пусть числа $a, b, c \in R$. $c \stackrel{df}{=} a + b$, если *для любых* рациональных чисел α', α'' и β', β'' таких, что
$\alpha' \leqslant a \leqslant \alpha''$, $\beta' \leqslant b \leqslant \beta''$ следует $\alpha' + \beta' \leqslant c \leqslant \alpha'' + \beta''$.

Определение 3. Пусть числа $a, b, d \in R$, $a > 0, b > 0$. $d \stackrel{df}{=} a \cdot b$, если *для любых положительных* рациональных чисел α', α'' и β', β'' таких, что
$\alpha' \leqslant a \leqslant \alpha''$, $\beta' \leqslant b \leqslant \beta''$ следует $\alpha' \cdot \beta' \leqslant d \leqslant \alpha'' \cdot \beta''$;
$\forall a$, $b \in R$ $\quad a \cdot b \stackrel{df}{=} 0$, если или $a = 0$, или $b = 0$;

если $\begin{cases} a < 0, \\ b < 0, \end{cases}$ то $a \cdot b \stackrel{df}{=} |a| \cdot |b|$; если $\left[\begin{cases} a < 0, \\ b > 0; \end{cases} \begin{cases} a > 0, \\ b < 0, \end{cases} \right.$ то $a \cdot b \stackrel{df}{=} -|a| \cdot |b|$.

Замечание. Фигурирующие в определениях 2 и 3 рациональные числа $\alpha', \alpha'', \beta', \beta''$ могут и не являться рациональными приближениями чисел a и b соответственно. Они могут быть рациональными приближениями этих чисел по недостатку и избытку различной степени точности.

По такой же схеме, что и в случае натуральных, целых и рациональных чисел, вводятся понятия суммы и произведения произвольного конечного количества действительных чисел, а именно сумма и произведение трех, четырех, ... , n чисел a_1 , a_2 , ... , a_n по определению соответственно равны

$(a_1 + a_2) + a_3 \quad (a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 \qquad , \qquad (a_1 + a_2 + a_3) + a_4 \quad (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3) \cdot a_4$

. . . . . .

$a_1 + a_2 + ... + a_n = (a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}) + a_n$, $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = (a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1}) \cdot a_n$, $n \in N$, $n \geqslant 3$, при этом выражения, заключенные в скобки, представляют собой определенные ранее числа. Сумма и произведение одного числа считаются равными этому же числу.

Без доказательств поступающие могут использовать утверждение о наличии между любыми двумя числами a и b каждого из множеств N , Z , Q , R одного и только одного из трех соотношений :
или $a < b$, или $a = b$, или $a > b$;
утверждения о существовании и единственности для любых двух чисел a и b суммы $(c = a + b)$ и произведения $(d = a \cdot b)$, причем

$$\text{из } a, b \in N \Rightarrow c, d \in N \ , \quad \text{из } a, b \in Z \Rightarrow c, d \in Z \ ,$$
$$\text{из } a, b \in Q \Rightarrow c, d \in Q \ , \quad \text{из } a, b \in R \Rightarrow c, d \in R \ .$$

Аналогичные утверждения справедливы для суммы и произведения любого конечного количества чисел.

Без доказательств поступающие могут использовать законы сложения и умножения, справедливые для любых действительных чисел a , b , c :
$a + b = b + a$ — коммутативный (переместительный) закон сложения ;
$(a + b) + c = a + (b + c)$ — ассоциативный (сочетательный) закон сложения;
$a \cdot b = b \cdot a$ — коммутативный (переместительный) закон умножения ;
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ — ассоциативный (сочетательный) закон умножения ;
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ — дистрибутивный (распределительный) закон умножения относительно сложения ;
а также их следствия (в частности, о возможности произвольной перестановки и перегруппировки при сложении и умножении любого конечного количества действительных чисел).

Далее $c \stackrel{df}{=} a - b$, если $c + b = a$,

$d \stackrel{df}{=} a : b \quad (d \stackrel{df}{=} a/b)$, $b \neq 0$, если $d \cdot b = a$.

Утверждение 1. $\forall a, b \in R \quad \exists! c = a - b$.

Доказательство. Число $c = a + (-b)$ удовлетворяет определению разности, так как $c + b = (a + (-b)) + b = a + ((-b) + b) = a + 0 = a$.
Предположим, что $\exists c' = a - b$, где $c' \neq c$, получаем
$a = c' + b \Rightarrow c = a + (-b) = (c' + b) + (-b) = c' + (b + (-b)) = c' + 0 = c'$,
пришли к противоречию.

Утверждение 2. $\forall a, b \in R\ \exists! d = a : b\ ,\ b \neq 0$.

Доказательство. Число $d = a \cdot b^{-1}$ $(b^{-1} = 1/b)$ удовлетворяет определению частного, так как $d \cdot b = (a \cdot b^{-1}) \cdot b = a \cdot (b^{-1} \cdot b) = a \cdot 1 = a$.
Предположим, что $\exists d' = a : b$, где $d' \neq d$, получаем
$a = d' \cdot b \ \Rightarrow\ d = a \cdot b^{-1} = (d' \cdot b) \cdot b^{-1} = d' \cdot (b \cdot b^{-1}) = d' \cdot 1 = d'$,
пришли к противоречию.

Утверждения, аналогичные этим двум имеют место и тогда, когда $a, b, c, d \in Q$, а аналогичное первому — когда $a, b, c \in Z$.

Замечание. Существование чисел $-b\ :\ b + (-b) \stackrel{df}{=} 0$ и $b^{-1}\ \forall b \neq 0$, где $b \cdot b^{-1} \stackrel{df}{=} 1$ устанавливается в результате операции расширения множества N до Z и множества Z до Q соответственно, а потом существование этих чисел устанавливается и в множестве R .

Знания деталей операций расширений числовых множеств и доказательств существований указанных чисел в множестве R от поступающих не требуется. Об этом написано в книгах [3] и [4].

Без доказательств поступающие могут использовать правила арифметических действий над числами, указанные на стр. 19 — 20, а также правила, вытекающие из них, например, произвольной перегруппировки и перестановки слагаемых и сомножителей ; правила раскрытия скобок, заключающих в себе алгебраические суммы чисел, перед которыми стоят знаки " $+$ " или " $-$ " и т.п., а также следующие утверждения.

Утверждение 3. $\forall a, b\ :\ a \in Z\ ,\ b \in N\ \ \exists!\ q \in Z$ и $r \in N_0$, что

$$a = bq + r\ ,\ 0 \leqslant r \leqslant b - 1\ .$$

(возможность операции деления целого числа a на натуральное число b с остатком, где по определению число q — частное или неполное частное, а число r — остаток) и вытекающее из него утверждение

Утверждение 4. Множество целых чисел Z можно разбить на n классов по отношению к делимости на натуральное число n :
к нулевому классу относят числа, делящиеся нацело на n, то есть без остатка $(r = 0)$,
к первому классу относят числа, при делении на n дающие в остатке 1,
ко второму классу относят числа, при делении на n дающие в остатке 2,
. . . . . .
к $n - 1$ классу относят числа, при делении на n дающие в остатке $n - 1$.

В частности, при $n = 2$ мы имеем разбиение целых чисел на два класса: четные числа (делящиеся нацело на 2) и нечетные числа (не делящиеся нацело на 2, а дающие при делении на 2 в остатке 1).

Утверждение 4 часто используется при решении задач на целочисленную арифметику, например, в задаче 5 п. 2.1.11.

Утверждение 5. Всякое натуральное число $n \geqslant 2$ можно единствен-

ным образом представить в виде произведения простых чисел (которые по определению нацело делятся только на число 1 и сами на себя).

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ \dots \ \cdot p_k^{\alpha_k} \ ,$$

$p_1 < p_2 < \dots < p_k$ и есть указанные простые числа, $\alpha_j \in N$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Утверждение 5 также используется при решении задач на целочисленную арифметику, например, в задаче 1 п. 2.2.3.

Без доказательств поступающие могут использовать теоремы.

Теорема 1. $\forall a \in R$, $a \geqslant 0$ $\exists \sqrt[n]{a}$.

(теорема существования арифметического корня n - ой степени из неотрицательного числа a)

Определения корня см. ниже, в п. 2.1., Вопрос 9,
там же говорится и о единственности арифметического корня.

Теорема 2. $\forall a, \alpha \in R$, $0 < a \neq 1$ $\exists! b = a^\alpha$, $b \in R$,
и справедливы (для любых действительных $a > 0, b > 0$, α, β) следующие свойства степеней:

1. $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$,
2. $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$,
3. $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$,
4. $a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta}$,
5. $(a^\alpha)^\beta = (a^\beta)^\alpha = a^{\alpha\beta}$.
6. $a^\alpha > b^\alpha \ \Leftrightarrow \ a > b \geqslant 0$, $\alpha > 0$,

   $a^\alpha > b^\alpha \ \Leftrightarrow \ 0 < a < b$, $\alpha < 0$,

   аналогичные свойства имеют место в случаях знаков " $<$ "," $\leqslant$ "," $\geqslant$ ".

Для целых и рациональных α и β на устном экзамене по математике необходимо знать эту теорему с доказательствами, (см. п. 2.1., Вопросы 8 и 9), а для случая, когда хотя бы одно из этих чисел иррационально доказательств проводить не надо.

Определения a^α см. в п. 2.1., Вопросы 8, 9 и 14
(там же по поводу $a = 1$ и $a = 0$).

Теорема 3. $\forall a, b \in R$: $0 < a \neq 1$, $b > 0$ $\exists \alpha \in R$: $b = a^\alpha$.

$$(\alpha \stackrel{df}{=} \log_a b)$$

Определение логарифма см. также и в п. 2.1., Вопрос 13.
Единственность логарифма легко устанавливается от противного на основе доказываемых в п. 2.1., Вопрос 14 возрастания (при $a > 1$) и убывания (при $0 < a < 1$) функции $y = a^x$.

В п. 2.1. и 2.2. рассматриваются вопросы о решении уравнений

$$f_0(x) = 0 \quad , \quad f(x) = a \quad , \qquad (*)$$

$f_0(x) = ax^2 + bx + c$; $f(x) = \sin x$; $f(x) = \cos x$; $f(x) = \operatorname{tg} x$; $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

Под *решением* каждого из уравнений $(*)$ понимается такое число $x_0 \in D[f_0]$, $x_0 \in D[f]$, что $f_0(x_0) = 0$, $f(x_0) = a$ — верные числовые равенства (тождества).

Определение 4. Два уравнения называются *равносильными*, если каждое решение первого из этих уравнений является решением второго из этих уравнений и наоборот, если каждое решение второго из этих уравнений является решением первого из этих уравнений.

Другими словами, два уравнения называются равносильными, если множества их решений совпадают. Если каждое из двух уравнений не имеет решений (то есть множество решений каждого из двух уравнений пусто), то они также называются равносильными.

Определение 5. Если каждое решение первого из двух уравнений является решением второго из этих уравнений, то второе уравнение называется *следствием* первого уравнения.

Таким образом, два уравнения являются равносильными, если каждое из них является следствием другого, а также если множества их решений совпадают.

Решить уравнение $(*)$ значит найти *все* значения x , являющиеся его решениями или доказать, что их нет.

Этим обстоятельством объясняется использование на стр. 36 — 37; в решениях и ответах, приведенных ниже, в разделе III тригонометрических задач, записей $\forall k \in Z$ или $n = 0\ ; \pm 1\ ; \pm 2\ ; \ldots$, а не традиционной школьной — $n \in Z$, означающей, что n — какой-то элемент множества действительных чисел Z.

В главе 3 книги [1], а также в книгах Ю.В. Нестеренко, С.Н. Олехника и М.К. Потапова "Задачи вступительных экзаменов по математике" (изданий 1983, 1986 и 1995 гг.) можно подробнее ознакомиться с понятиями и общими свойствами уравнений, неравенств, систем и совокупностей уравнений и неравенств, а также — решений уравнений, неравенств, систем и совокупностей ; с понятиями и свойствами равносильности и следствия уравнений, неравенств, их систем и совокупностей.

Без знания *аналитического* доказательства поступающие могут использовать утверждения следующей теоремы.

Теорема 4. Существуют решения уравнений :

$\sin x = a$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2} \right]$ $\forall a \in [-1 , 1]$,

$\cos x = a$ на отрезке $[0 , \pi]$ $\forall a \in [-1 , 1]$.

На основе этих утверждений *аналитическим* путем уже совсем несложно доказать существование решений уравнений :

$\operatorname{tg} x = a$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2} \right)$ $\forall a \in R$,

$\operatorname{ctg} x = a$ на интервале $(0\ ,\ \pi)$ $\quad \forall a \in R$ (см. п. 24 и 25 в [12]).

Единственность всех этих решений на указанных промежутках легко доказывается от противного на основе возрастания или убывания этих функций (см. ниже п. 2.2., Вопросы 5 — 8).

Однако в конце п. 2.2. даются геометрические обоснования всех этих фактов, а также геометрическое обоснование таких свойств функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$, как их область определения, периодичность с периодами $2\pi n\ \forall n \in Z\ ,\ n \neq 0$, наличие нулей и промежутков знакопостоянства, равенств $\sin(-x) = -\sin x\ ,\ \cos(-x) = \cos x\ ,\ \forall x \in [\,0, \pi\,]$, которые в свою очередь используют без доказательств (что также имеют право и поступающие в вузы) следующие утверждения.

Утверждение 6. Между множествами M точек окружности с центром в начале координат радиуса $R = 1$ и множеством чисел полуинтервала $[\,0, 2\pi)$ можно установить взаимно однозначное соответствие $(\ M \leftrightarrow \alpha\ ,\ \alpha \in [\,0, 2\pi)\ )$.

Утверждение 7. Каждой точке M на окружности соответствует множество чисел $\{\alpha \in R\ :\ \alpha = \alpha_0 + 2\pi n\ ,\ n = 0\ ;\ \pm 1\ ;\ \pm 2\ ;\ \ldots\}$, где $0 \leqslant \alpha_0 < 2\pi\ ,\ \alpha_0 \leftrightarrow M$.

Сразу же отметим, что $\forall x \notin [\,0, \pi\,]$ равенства $\sin(-x) = -\sin x$ и $\cos(-x) = \cos x$ доказываются уже аналитически на основе этих равенств $\forall x \in [\,0, \pi\,]$ и свойства периодичности.

Далее отметим, что все указанные выше формулировки определений и утверждений, касающиеся натуральных, целых и рациональных чисел, можно найти в [3] и [4], в [4] можно найти доказательства всех этих утверждений, а в [3] — большей их части.

В курсах математического анализа, читаемых студентам, вводятся различные определения действительных чисел, в том числе и как бесконечных десятичных дробей (см. на стр. 11 что представляет собой множество R), определения сравнения двух действительных чисел, их суммы и произведения (также, как и в этом пункте), доказываются теоремы 1 — 4, показывается, как можно *чисто аналитическим путем* (то есть без окружности на координатной плоскости) на основе полного объема фактов теории действительного числа ввести тригонометрические функции числового аргумента и также *аналитическим путем* доказать все их свойства.

Наконец, поступающие имеют полное право без доказательств применять фундаментальные теоремы 5 и 6, являющиеся обоснованиями метода координат соответственно на прямой и на плоскости.

Определение 6. Если на некоторой прямой a выбраны: точка O — начало отсчета, масштабный отрезок OE, где точки O и E различные, длина которого считается равной единице (единица измерения отрезков), и положительное (от точки O к точке E) и противоположное ему отрицательное направления, то эту прямую называют *числовой* или *координатной* прямой (осью).

Теорема 5. Между множествами всех действительных чисел R и всех точек числовой прямой (оси) M можно установить взаимно однозначное соответствие, причем если прямая расположена горизонтально, то из двух точек M_1 и M_2 на этой прямой лежащей правее (левее) соответствует большее (меньшее) действительное число и наоборот, из двух действительных чисел большему (меньшему) из них соответствует точка на числовой прямой, лежащая правее (левее).

Действительное число x, взаимно однозначно соответствующее точке M на числовой оси, называется *координатой* (числовой координатой) этой точки. Обозначается $M(x)$. Точке O — началу координат соответствует число 0, то есть $O(0)$, точке E соответствует число 1, то есть $E(1)$ (см. рис. 1 на стр. 12).

Определение 7. Если на некоторой плоскости α заданы две взаимно перпендикулярные числовые оси с общим началом отсчета (точкой O), равными на этих осях единицами измерения отрезков (то есть единым масштабом на всей плоскости), то говорят, что на этой плоскости задана *декартова прямоугольная система координат*, плоскость эта называется *координатной плоскостью*, а эти оси называются *координатными осями*, точка O называется *началом координат*.

Если одна из этих осей расположена горизонтально — ось абсцисс, а другая — вертикально — ось ординат, то положительное (отрицательное) направления на них выбраны соответственно вправо (влево) и вверх (вниз) от точки O (см. рис. 15 на стр. 15 с выписанными под ним понятиями).

Теорема 6. Между множествами всех точек M координатной плоскости и всех упорядоченных пар действительных чисел $(x; y)$ можно установить взаимно однозначное соответствие.

Эта теорема доказывается на основе теоремы 5 (с использованием того факта, что координатные оси — числовые прямые) и теорем о единственности перпендикуляров, проведенных или из данной точки, не лежащей на прямой, к этой прямой, или — к прямой через данную на ней точку.

Теорема 5 в полном объеме доказывается в курсах аналитической геометрии или высшей геометрии (см. [19], [17]), частично (о соответствии действительного числа — бесконечной десятичной дроби точке на числовой оси) в курсе математического анализа (см. [20]).

Вопрос 1. Формулы сокращенного умножения

К ним относят формулы вида: $\forall a, b \in R$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ — квадрат суммы двух чисел ;

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ — квадрат разности двух чисел ;

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ — — куб суммы двух чисел ;

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$ — — куб разности двух чисел ;

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ — разность квадратов двух чисел ;

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ — разность кубов двух чисел ;

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ — сумма кубов двух чисел.

Выводятся эти формулы перемножением выражений, заключенных в скобки. При этом используются определения и свойства степеней с натуральными показателями и законы сложения и умножения, например,
$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) = (a-b)^2(a-b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) =$
$= a^3 - 2a^2b + b^2a - a^2b + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$;
$(a-b)(a+b) = a(a+b) - b(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$.
Таким же образом можно доказать и формулы, обобщающие три последние: $\forall n \in N,\ n \geqslant 2,\ \forall a, b \in R$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$;

если $n = 2k+1$, то $\forall k \in N \quad a^n + b^n =$

$= a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - \ldots - ab^{2k-1} + b^{2k})$.

Вопрос 2. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10

Докажем два утверждения. Пусть числа $l, m, n, k \in Z$, тогда :

а) если $m \vdots k$ и $n \vdots k$, то $(m+n) \vdots k$,

б) если $l \vdots k$ и $m \vdots k$, то $(l-m) \vdots k$.

Доказательства

А) $m \vdots k\ ,\ n \vdots k\ \Rightarrow\ \exists\, p\ ,\ q \in Z\ :\ m = p \cdot k\ ,\ n = q \cdot k\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ m + n = pk + qk = (p+q)k\ ,\ (p+q) \in Z\ \Rightarrow\ (m+n) \vdots k\ .$

Б) $m \vdots k\ ,\ l \vdots k\ \Rightarrow\ \exists\, p\ ,\ r \in Z\ :\ m = p \cdot k\ ,\ l = r \cdot k\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ l - m = rk - pk = (r-p)k\ ,\ (r-p) \in Z\ \Rightarrow\ (l-m) \vdots k\ .$

В этих доказательствах использовались: дистрибутивный закон сложения, вычитания и умножения и те факты, что сумма и разность любых двух целых чисел есть целое число.

Представим натуральное число a в виде

$$a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

где $0 \leqslant a_j \leqslant 9,\quad j = 0;\ 1; \ldots;\ n-1\ ,\quad a_j \in N_0\ ;\quad 1 \leqslant a_n \leqslant 9,\quad a_n \in N_0\ .$

Признаки делимости на числа 2 , 5 , 10

Если $a_0 \vdots 2$, то есть $a_0 = 0\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 6\ ;\ 8$, то $a \vdots 2$,

если $a_0 \vdots 5$, то есть $a_0 = 0\ ;\ 5$, то $a \vdots 5$,

если $a_0 \vdots 10$, то есть $a_0 = 0$, то $a \vdots 10$.

Доказательства

Пусть $b = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 = 10 \cdot \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1}\ \Rightarrow b \vdots 10$ $\Rightarrow b \vdots 2$ и $b \vdots 5$, а потому так как $a = b + a_0$, то в силу утверждения а) соответственно при $a_0 \vdots 2\ ;\ a_0 \vdots 5\ ;\ a_0 = 0\ \Rightarrow\ a \vdots 2\ ;\ a \vdots 5\ ;\ a \vdots 10$.

Справедливы и обратные утверждения:

если $a \vdots 2$, то $a_0 \vdots 2$, то есть $a_0 = 0\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 6\ ;\ 8$,

если $a \vdots 5$, то $a_0 \vdots 5$, то есть $a_0 = 0\ ;\ 5$,

если $a \vdots 10$, то $a_0 \vdots 10$, то есть $a_0 = 0$.

Для доказательства этих утверждений достаточно представить число a_0 в виде $a_0 = a - b$, воспользоваться тем, что $b \vdots 2\ ,\ b \vdots 5\ ,\ b \vdots 10$ и утверждением б). Таким образом,

$a \vdots 2 \Leftrightarrow a_0 \vdots 2$, то есть $a_0 = 0\ ;\ 2\ ;\ 4\ ;\ 6\ ;\ 8$,

$a \vdots 5 \Leftrightarrow a_0 \vdots 5$, то есть $a_0 = 0\ ;\ 5$, $\qquad a \vdots 10\ \Leftrightarrow\ a_0 = 0$.

Признаки делимости на числа 3 , 9

Если $(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) \vdots 3$, то $a \vdots 3$,

если $(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) \vdots 9$, то $a \vdots 9$.

Доказательства Представим число a в таком виде

$$a = a_n(10^n-1)+a_{n-1}(10^{n-1}-1)+\ldots+a_1(10-1)+a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0 = c+d,$$

где $$c = a_n(10^n-1)+\ldots+a_1(10-1),$$

$$d = a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0; \qquad 10-1 = 9 \vdots 9,$$

$$\forall k \geqslant 2 \qquad 10^k-1 = (10-1)(10^{k-1}+10^{k-2}+\ldots+10+1) =$$

$$= 9(1\underbrace{00\ldots0}_{k-1}+1\underbrace{00\ldots0}_{k-2}+\ldots+10+1) = 9\cdot\underbrace{11\ldots1}_{k} = \underbrace{99\ldots9}_{k}, \text{ следовательно,}$$

$$\forall k \geqslant 2 \Rightarrow (10^k-1) \vdots 9, \; c = 9\cdot(\underbrace{11\ldots1}_{n}a_n+\underbrace{11\ldots1}_{n-1}a_{n-1}+\ldots+11a_2+a_1),$$

таким образом, $c = 9t$, $t \in Z$, а потому $c \vdots 9 \Rightarrow c \vdots 3$. $a = c+d$, в силу утверждения а) и имеем: если $d \vdots 3$, то $a \vdots 3$, если $d \vdots 9$, то $a \vdots 9$.

Справедливы и обратные утверждения:

Если $a \vdots 3$, то $d = (a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0) \vdots 3$,

если $a \vdots 9$, то $d = (a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0) \vdots 9$.

Для доказательства этих утверждений достаточно представить число d в виде $d = a-c$ и воспользоваться тем, что $c \vdots 3$ и $c \vdots 9$, откуда в силу утверждения б) и вытекают эти утверждения. Таким образом,

$$a \vdots 3 \Leftrightarrow (a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0) \vdots 3, \; a \vdots 9 \Leftrightarrow (a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0) \vdots 9.$$

Замечание 1. По схемам, аналогичным доказательствам утверждений о делимости на числа 2, 5, 10, устанавливаются утверждения о делимости на числа 4, 25, 100, 8, 125, 1000, ..., 2^k, 5^k, 10^k ($\forall k \in N$), соответственно имеющие вид

$a \vdots 4 \Leftrightarrow \overline{a_1a_0} \vdots 4$, $a \vdots 25 \Leftrightarrow \overline{a_1a_0} \vdots 25$, то есть $\overline{a_1a_0} = 00; 25; 50; 75$,

$a \vdots 100 \Leftrightarrow \overline{a_1a_0} = 00$,

$a \vdots 8 \Leftrightarrow \overline{a_2a_1a_0} \vdots 8$, $a \vdots 125 \Leftrightarrow \overline{a_2a_1a_0} \vdots 125$, $a \vdots 1000 \Leftrightarrow \overline{a_2a_1a_0} = 000$,

. . . . . .

$a \vdots 2^k \Leftrightarrow \overline{a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_2a_1a_0} \vdots 2^k$, $a \vdots 5^k \Leftrightarrow \overline{a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_2a_1a_0} \vdots 5^k$,

$a \vdots 10^k \Leftrightarrow \overline{a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_2a_1a_0} = \underbrace{00\ldots0}_{k}$.

Замечание 2. По схемам, аналогичным формулировкам и доказательствам утверждений о делимости на числа 3, 9, можно сформулировать и доказать утверждения о делимости на число 11. Предлагается это сделать в качестве упражнения.

Вопрос 3. Свойства числовых неравенств

Определение 1. Если два числа a и b $(a, b \in R)$ соединены знаком неравенства $a \neq b$ или одним из отношений порядка $a > b$, или $a < b$, или $a \geqslant b$, или $a \leqslant b$, установленных между числами, то говорят, что задано *числовое неравенство*. Неравенства $a > b$ и $a < b$ называются *строгими*, неравенства $a \geqslant b$ и $a \leqslant b$ называются *нестрогими*.

Формулировки свойств числовых неравенств.

Для любых чисел $a, b, c, d \in R$ справедливы следующие свойства:

1. $a > b \Leftrightarrow b < a$ и $a < b \Leftrightarrow b > a$;
2. если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (свойство транзитивности) ;
3. если $a > b$, то для любого c $a + c > b + c$; если для некоторого c $a + c > b + c$, то $a > b$ $(a > b \Leftrightarrow a + c > b + c)$;
4. если $a > b$, то для любого $c > 0$ $a \cdot c > b \cdot c$; если для некоторого $c > 0$ $a \cdot c > b \cdot c$, то $a > b$ $(a > b \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c, \ c > 0)$;
5. если $a > b$, то для любого $c < 0$ $a \cdot c < b \cdot c$, если для некоторого $c < 0$ $a \cdot c < b \cdot c$, то $a > b$ $(a > b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c, \ c < 0)$;
6. если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$ (возможность почленного сложения неравенств одинакового смысла) ;
7. если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$ (возможность почленного вычитания неравенств противоположного смысла) ;
8. если $a > b, b \geqslant 0$ и $c > d, d \geqslant 0$, то $a \cdot c > b \cdot d$ (возможность почленного умножения неравенств одинакового смысла неотрицательных чисел);
9. если $a > b, b \geqslant 0$ и $0 < c, c < d$, то $\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{d}$ (возможность почленного деления неравенств противоположного смысла неотрицательных чисел);
10. если $a, b \geqslant 0$, то $\forall n \in N \ a^n > b^n \Leftrightarrow a > b$ (возможность почленного умножения n одинаковых неравенств неотрицательных чисел) .

В свойствах 1 — 10 обратить внимание и на случаи знаков " $<$ ", " $\leqslant$ ", " $\geqslant$ "
В свойствах 2 и 6 — 9 обратить внимание на случаи, когда одно из неравенств строгое, другое нестрогое, в результате неравенство будет строгое.

Обратить внимание: можно ли почленно складывать (вычитать), а также умножать (делить) неравенства противоположного (одинакового) смысла? Ответ: "нет", проиллюстрировать на примерах.

Обратить внимание на существенность в свойстве 8 условий $b \geqslant 0$ и $d \geqslant 0$, а в свойстве 9 — на $b \geqslant 0$ и $c > 0$ (на примерах) (см. [3], гл. 1, § 4, п. 8^0).

Свойства 3 и 8 обобщаются на случаи произвольного конечного количества слагаемых неравенств одинакового смысла и произвольного конечного количества перемножаемых неравенств одинакового смысла неотрицательных чисел соответственно.

Замечание. При доказательстве этих свойств в учебной литературе как определения используются: $a > b$, если $a - b > 0$, $a < b$, если $a - b < 0$; в литературе для подготовительных отделений (см. [1]) без доказательства используются утверждения: *

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0; \qquad a < b \Leftrightarrow a - b < 0;$$

$$\text{из } a > 0 \text{ и } b > 0 \Rightarrow a + b > 0; \quad \text{из } a < 0 \text{ и } b < 0 \Rightarrow a + b < 0;$$

а также согласно правилам умножения чисел одного и разных знаков и умножения чисел на число 0

$$\text{из } \quad a > 0 \quad (a < 0) \quad \text{и} \quad b > 0 \quad (b < 0) \quad \Rightarrow \quad ab > 0;$$

$$\text{из } \quad a > 0 \quad (a < 0) \quad \text{и} \quad b < 0 \quad (b > 0) \quad \Rightarrow \quad ab < 0;$$

$$\text{из } \quad a = 0 \quad \text{или} \quad b = 0 \quad \Rightarrow \quad ab = 0.$$

Доказательства

1. $a > b \quad \Leftrightarrow \quad a - b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad b - a = -(a - b) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad b < a,$

второе утверждение доказывается совершенно аналогично.

2. $a > b \quad \Leftrightarrow \quad a - b > 0, \quad b > c \quad \Leftrightarrow \quad b - c > 0 \quad \Rightarrow$

$a - c = (a - b) + (b - c) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a > c$. **

---

* Об этих утверждениях см. материал в конце вопроса, после доказательств сформулированных свойств, где говорится о двух подходах при изучении свойств числовых неравенств, особенно это касается свойства 2 (этот материал не является строго обязательным).

** В конце изложения этого вопроса желательно обратить внимание на другой способ доказательства этого свойства, связанный с другим подходом при изучении свойств числовых неравенств.

3. $a > b \quad \Leftrightarrow \quad a - b > 0 \quad \Rightarrow$

для любого $c \quad (a + c) - (b + c) = a - b > 0 \Leftrightarrow a + c > b + c;$

пусть для некоторого $c \quad a + c > b + c, \quad$ тогда

$a - b = (a + c) - (b + c) > 0 \quad \Rightarrow \quad a > b.$

4. $a > b \quad \Leftrightarrow \quad a - b > 0 \quad \Rightarrow$

для любого $c > 0 \quad ac - bc = (a - b)c > 0 \quad \Rightarrow \quad ac > bc;$

пусть для некоторого $c' > 0 \quad ac' > bc', \quad$ тогда

$(a - b)c' = ac' - bc' > 0 \quad \Rightarrow \quad a - b > 0 \quad \Rightarrow \quad a > b.$

5. $a > b \quad \Leftrightarrow \quad a - b > 0 \quad \Rightarrow$

для любого $c < 0 \quad ac - bc = (a - b)c < 0 \quad \Rightarrow \quad ac < bc;$

пусть для некоторого $c' < 0 \quad ac' < bc', \quad$ тогда

$(a - b)c' = ac' - bc' < 0 \quad \Rightarrow \quad a - b > 0 \quad \Rightarrow \quad a > b.$

6. $a > b \quad \Leftrightarrow \quad a - b > 0, \quad c > d \quad \Leftrightarrow \quad c - d > 0 \quad \Rightarrow$

$(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a + c > b + d.$

7. $a > b \quad \Leftrightarrow \quad a - b > 0, \quad c < d \quad \Leftrightarrow \quad d > c \quad \Leftrightarrow \quad d - c > 0 \quad \Rightarrow$

$(a - c) - (b - d) = (a - b) + (d - c) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a - c > b - d.$

8. В силу свойства 2 из $\quad c > d, \quad d \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad c > 0$

(аналогично $\quad a > 0), \quad$ откуда в силу свойства 4

$ac > bc; \quad$ при $\quad b > 0 \quad bc > bd, \quad$ в силу свойства 2 $\quad ac > bd;$

при $\quad b = 0 \quad bd = 0, \quad$ а так как $\quad ac > 0, \quad$ то $\quad ac > bd.$

9. Так как $\quad 0 < c, \; c < d, \quad$ то $\quad d > c, \; c > 0 \quad \Rightarrow \quad d > 0, \; e = \dfrac{1}{cd} > 0,$

в силу свойства 4 $\quad d > c \quad \Leftrightarrow \quad de > ce \quad \Leftrightarrow \quad c' = \dfrac{1}{c} > \dfrac{1}{d} = d' > 0,$

в силу свойства 8 $\quad ac' > bd' \quad$ или $\quad \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{d}.$

10. Воспользуемся формулой:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

так как если числа a и b не равны, то заведомо одно из них положительно, а потому

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1} > 0 ,$$

и, следовательно, знак разности $a^n - b^n$ совпадает со знаком разности $a - b$.

Свойства числовых неравенств полностью доказаны.

Дополнительный материал к вопросу 3

Отметим следующие два подхода к изучению свойств числовых неравенств.

Напомним, что действительное число a в общем виде представляет собой произвольную бесконечную десятичную дробь:

если $a = 0$, то $a = 0,000...0... = 0,(0)$,

если $a \neq 0$, то $a = a_0, a_1a_2...a_n... = +a_0, a_1a_2...a_n...$

или $a = -a_0, a_1a_2...a_n \ ... \ ,$

причем $a_0 \in \{0;1;2;...;n;...\} — N_0$, $a_j \in N_0$, $\exists a_{j_0} \in N$, $j_0 \in N_0$,

$0 \leqslant a_j \leqslant 9$ $j = 1;$ $2;$ $3;$ ...

Число a_0 называют *целой частью* десятичной дроби,

а числа a_j $(\forall j \geqslant 1)$ называют ее *десятичными знаками*.

В случае, когда перед числом стоит знак "+" или знак отсутствует, его называют *положительным*, а когда перед числом стоит знак "-", его называют *отрицательным*. Число 0 не относят ни к положительным, ни к отрицательным числам, $0 = +0 = -0$.

Если в десятичной дроби, начиная с некоторого номера $k+1$ $(k \geqslant 0)$, группа десятичных знаков повторяется, то есть

$a = a_0, a_1a_2...a_n... = a_0, a_1a_2...a_ka_{k+1}a_{k+2}...a_{k+l}a_{k+1}a_{k+2}...a_{k+l}a_{k+1}...$,

символически это записывается $a_0, a_1a_2...a_k(a_{k+1}a_{k+2}...a_{k+l})$, $l \geqslant 1$,

то она называется *периодической* десятичной дробью, в противном случае она называется *непериодической* десятичной дробью.

Имеют место равенства: $\pm a_0, (9) = \pm(a_0 + 1), (0) = \pm(a_0 + 1)$

$\pm a_0, a_1a_2...a_k(9) = \pm a_0, a_1a_2...a_k'(0) = \pm a_0, a_1a_2...a_k'$,

$a_k' = a_k + 1$, если $a_k \leqslant 8$.

Эти равенства позволяют для упрощения рассуждений в дальнейшем не рассматривать периодические десятичные дроби с периодом 9.

Первый подход. Действительные числа определяются как элементы некоторого расположенного *поля* или (в частности) *кольца*. В смысле книги

[4] *расположенным полем* называется непустое множество R, над элементами которого определены операции *сложения* и *умножения*, ставящие в соответствие каждым двум элементам a и $b \in R$ третий элемент из этого же множества, обозначаемый соответственно $a+b$ и $a \cdot b$ и соответственно называемый их *суммой* и *произведением*, которые обладают следующими свойствами или, как еще можно сказать, удовлетворяют следующим аксиомам (при этом $a = b$ означает совпадение этих элементов, а $a \neq b$ означает, что эти элементы различные).

1. $a + b = b + a$ — коммутативность сложения;

2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ — ассоциативность сложения;

3. обратимость сложения: $\forall a$ и $b \in R$

   $\exists$ (по крайней мере один элемент) $c \in R$ такой, что $a + c = b$;

4. $a \cdot b = b \cdot a$ — коммутативность умножения;

5. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ — ассоциативность умножения;

6. $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ — дистрибутивность умножения относительно сложения (в некоторых книгах говорят наоборот — дистрибутивность сложения относительно умножения);

   на основании аксиом 1 — 6 можно доказать, что существует и притом единственный элемент 0 — нулевой, что

   $$\forall\, a \in R \quad a + 0 = 0 + a = a \,,$$

   и для любого элемента a существует и единственный противоположный элемент, обозначаемый $-a$, такой, что выполняются равенства

   $$a + (-a) = (-a) + a = 0 \,;$$

7. обратимость умножения: $\forall a$ и $b \in R$, где $a \neq 0$

   $\exists$ (по крайней мере один элемент) $d \in R$ такой, что $a \cdot d = b$;

8. R содержит по крайней мере один элемент, отличный от нуля;

   на основании аксиом 1 — 8 можно доказать, что существует, и притом единственный, элемент $1 \neq 0$ — единичный, такой, что

   $$\forall\, a \in R \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \,,$$

и для любого элемента $a \neq 0$ существует и единственный обратный элемент, обозначаемый a^{-1}, такой, что выполняются равенства

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1 ;$$

9. $\forall a \in R$ определено его свойство быть положительным, удовлетворяющим требованиям существования одного и только одного из трех соотношений: либо $a = 0$, либо a положителен, либо $-a$ положителен;

10. если a и b положительны, то также положительны $a + b$ и $a \cdot b$; если элемент $-a$ положителен, то элемент a называется отрицательным.

На основании аксиом 1 — 10 можно доказать (см. [4], §9), что если в расположенном поле (в частности, кольце) R определить порядок, считая $a > b \Leftrightarrow a - b$ положителен, то R будет упорядоченным множеством (в смысле [4], §5), причем нулевой элемент будет меньше всех положительных и больше всех отрицательных элементов.

Это утверждение и позволяет при данном подходе считать по определению, что одно из двух чисел больше (меньше) другого, если разность первого и второго чисел положительна (отрицательна), то есть больше (меньше) нуля.

Второй подход. Считая введенными правила сравнения (упорядочения) чисел из множества N_0 — $N \cup \{0\}$, а также установленными свойства: аналог свойства 1 и свойства 2 транзитивности неравенств между ними, которые хорошо известны из курса школьной арифметики (более подробно и строго они установлены в §10 [4], (см. также гл.1, §1 [3]), во многих учебниках и учебных пособиях вводятся следующие правила сравнения (упорядочения) десятичных дробей — действительных чисел.

Пусть $a = a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$ и $b = b_0, b_1 b_2 ... b_n ...$ — положительные числа, по определению считают:

$a = b$, если $\forall\, j \in N_0 \Rightarrow a_j = b_j$;

$a > b$ $(a < b)$, если либо $a_0 > b_0$ $(a_0 < b_0)$,

либо $\exists\, j_0 \in N_0 : \forall\, j \in N_0,\ j \leqslant j_0 \quad a_j = b_j$, $a_{j_0+1} > b_{j_0+1}$ $(a_{j_0+1} < b_{j_0+1})$;

если c — положительное число, d — отрицательное число, то по определению считают

$c > d$; $d < c$; $c > 0$; $0 < d$; $d < 0$; $0 > d$;

если c и d отрицательные числа, то по определению считают:

$c = d \quad \Leftrightarrow \quad |c| = |d|; \quad c > d \quad (c < d) \quad \Leftrightarrow \quad |c| < |d| \quad (|c| > |d|);$

$a = 0 \ \Leftrightarrow \ \forall\, j \in N_0 \qquad a_j = 0$.

Схема доказательства свойств числовых неравенств при этом подходе такова:

свойство 1 для положительных чисел вытекает из его справедливости для чисел из множества N_0, а для остальных случаев — непосредственно из определения;

свойство 2 для случая трех положительных чисел a ; b ; c ;

$c = c_0, c_1 c_2 ... c_n ...$

вытекает из определения и его справедливости для чисел из множества N_0, при этом первый номер k_0, для которого выполняется неравенство $a_{k_0} > c_{k_0}$, является наименьшим из двух номеров i_0; j_0 , где i_0 — наименьший из номеров, при котором нарушается равенство $a_i = b_i$ (то есть $a_{i_0} > b_{i_0}$) , а j_0 — наименьший из номеров, при котором нарушается равенство $b_j = c_j$ (то есть $b_{j_0} > c_{j_0}$) ;

для остальных случаев свойство 2 уже непосредственно вытекает из определения.

На основе установленных таким способом свойств 1 и 2 и определения суммы двух произвольных десятичных дробей можно доказать (см. [3], гл. 1, §4, п. 6^0, 8^0):

$\forall\, a\,;\, b \in R : \quad b > 0\ (b < 0) \Rightarrow a + b > a\ (a + b < a)$.

На основе этого утверждения учащимся предлагается самостоятельно доказать приведенные перед доказательством свойств числовых неравенств утверждения:

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0\ ;$$

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0\ ;$$

$$\text{из} \quad a > 0 \quad \text{и} \quad b > 0 \quad \Rightarrow \quad a + b > 0;$$

$$\text{из} \quad a < 0 \quad \text{и} \quad b < 0 \quad \Rightarrow \quad a + b < 0;$$

с помощью которых, а также выше приведенных правил умножения действительных чисел одного и разных знаков и на число 0, которые вытекают из определения произведения десятичных дробей (см. [3], гл. 1, §4, п. 6^0), уже проделанным выше способом устанавливается справедливость остальных свойств числовых неравенств 3 — 8.

Вопрос 4. Свойства линейной функции и ее график *

Определение. Функция вида $y = f(x) = ax + b$ называется *линейной* функцией. Здесь a и b — постоянные действительные числа, а x — переменная, принимающая действительные значения.

I. $D[y]$ — $(-\infty, +\infty)$, так как $\forall x \in R$ однозначно определено произведение ax и сумма $ax + b$ (в силу свойств действительных чисел, строго доказанных вне пределов школьной программы).

II. $E[y]$ — $\{b\}$, если $a = 0$, так как $\forall x \in R \Rightarrow ax + b = 0x + b = b$;

$E[y]$ — $(-\infty, +\infty)$, если $a \neq 0$, так как $\forall y_0 \in R$ существует

$$x_0 = \frac{y_0 - b}{a} \in R : \; f(x_0) = a \cdot x_0 + b = a \cdot \frac{y_0 - b}{a} + b = (y_0 - b) + b = y_0 .$$

III. Если $a = 0$, то $\max\limits_{x \in R} f(x) = \min\limits_{x \in R} f(x) = b$ (так как $\forall x \in R \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) = b \Rightarrow f(x) \leqslant b$ и $f(x) \geqslant b$ и $\exists x_0$, например, $x_0 = 0$, $f(x_0) = b$);

если $a \neq 0$, то не существуют $\max\limits_{x \in R} f(x)$ и $\min\limits_{x \in R} f(x)$

(так как, предполагая существование $M_0 = \max\limits_{x \in R} f(x)$ и $m_0 = \min\limits_{x \in R} f(x)$, легко получить противоречие, исходя из результата п.II, ибо существуют, например, x_1 и x_2 такие, что $f(x_1) = m_0 - 1 < m_0$ и $f(x_2) = M_0 + 1 > M_0$).

IV. Если $a = b = 0$, то $\forall x \in R \quad f(-x) = f(x) = 0$ и $f(-x) = 0 =$ $= -0 = -f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x)$ является одновременно и четной и нечетной.

Если $a = 0, b \neq 0$, то $\forall x \in R \quad f(-x) = f(x) = b$;

так как $b \neq -b$, то $f(x)$ является четной и не является нечетной.

Если $b = 0$, $a \neq 0$, то $\forall x \in R \quad f(-x) = a(-x) = -ax = -f(x)$, следовательно, функция нечетная.

Если бы $\forall x \in R \Rightarrow f(-x) = f(x)$, то $a(-x) = ax \Leftrightarrow 2ax = 0$, поэтому $a = 0$, что неверно, следовательно, функция $f(x) = ax + b$ не является четной.

Из последних результатов вытекает, что если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то линейная функция не является ни четной, ни нечетной.

V. Если $a = 0$, то $\forall T \neq 0 \Rightarrow f(x) = ax + b = b = a(x + T) + b = f(x + T)$, следовательно, функция периодическая, любое $T \neq 0$ является ее периодом.

Если $a \neq 0$, то, предполагая существование $T_0 \neq 0$, что $\forall x \in D[f] \Rightarrow$ $f(x + T_0) = f(x) \Leftrightarrow a(x + T_0) + b = ax + b \Leftrightarrow aT_0 = 0$, а это неверно, ибо $a \neq 0$ и $T_0 \neq 0$, пришли к противоречию; следовательно, функция $y = ax + b$ не периодическая при $a \neq 0$.

---

* См. выше п. 2.0.2 и 2.0.3, где приводится план исследования функции и формулируются все необходимые для этого определения; то же самое относится и к вопросам 7, 14—16 раздела "Алгебра" и тригонометрическим функциям в разделе "Тригонометрия".

VI. Если $a = b = 0$, то $\forall x \in R \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \forall x \in R$ — нуль функции.

Если $a = 0$, $b \neq 0$, то $\forall x \in R \Rightarrow f(x) = b \neq 0 \Rightarrow$ нулей нет; при этом, если $b > 0$ $(b < 0)$, то на всем промежутке $(-\infty, +\infty)$ $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$.

Если $a \neq 0$ и b произвольное, то $f(x) = ax + b = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = -b/a$, следовательно, x_0 — единственный нуль функции.

Из свойств числовых неравенств вытекает, что при $a > 0$
$ax + b > 0$ $(ax + b < 0) \Leftrightarrow x > -b/a$ $(x < -b/a) \Rightarrow f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ на $(-b/a, +\infty)$ $((-\infty, -b/a))$, аналогично при $a < 0$
$ax + b > 0$ $(ax + b < 0) \Leftrightarrow x < -b/a$ $(x > -b/a) \Rightarrow f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ на $(-\infty, -b/a)$ $((-b/a, +\infty))$,

VII. Если $a > 0$ $(a < 0)$, то $f(x) = ax + b$ возрастает (убывает). Пусть $x_1 < x_2$. Рассмотрим разность $f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b) = a(x_2 - x_1)$. Так как $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) > f(x_1)$ $(f(x_2) < f(x_1))$.

VIII. График функции $y = ax + b$ — прямая, $a = \operatorname{tg} \alpha$, α — величина угла прямой с положительным направлением оси Ox.

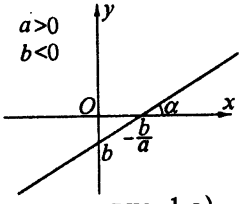


рис. 1 а)

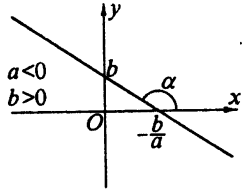


рис. 1 б)

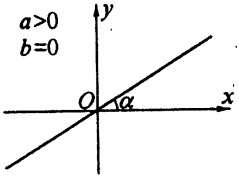


рис. 1 в)

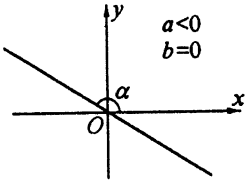


рис. 1 г)

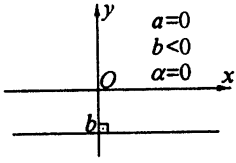


рис. 1 д)

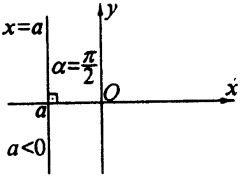


рис. 1 е)

Доказательство. *

Доказательство будет состоять из четырех этапов.

1) Пусть на координатной плоскости Oxy задана прямая ℓ, докажем, что точка $M(x; y) \in \ell \Leftrightarrow$ пара $(x; y)$ является решением уравнения первой степени с двумя неизвестными

$$Ax + By + C = 0, \qquad (1)$$

где A, B, C — постоянные (фиксированные) действительные числа, причем

* Схема этого доказательства заимствована из учебника [5], п. 75 — 79, однако это доказательство более полное, чем в этом учебнике.

$$\left[\begin{array}{l} A \neq 0\,; \\ B \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow |A| + |B| \neq 0 \Leftrightarrow A^2 + B^2 \neq 0 \qquad (2)$$

(другими словами, по крайней мере одно из чисел A и B *отлично от нуля*).

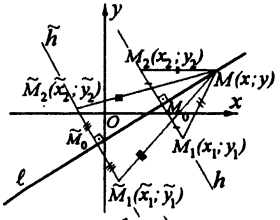


рис. 1 ж)

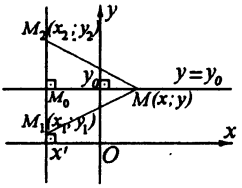


рис. 1 з)

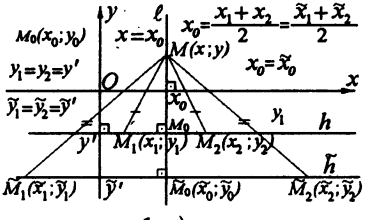


рис. 1 и)

Для этого (см. рис. 1 ж) проведем прямую $h \perp \ell$ и отложим от точки $M_0 \equiv h \cap \ell$ (от точки пересечения этих прямых) по разные стороны от прямой ℓ равные отрезки $M_0M_1 = M_0M_2$, $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $M_1 \not\equiv M_0$, $M_2 \not\equiv M_0$, $M_1 \not\equiv M_2$. Таким образом, прямая ℓ — серединный перпендикуляр к отрезку M_1M_2 . Согласно теоремам о серединном перпендикуляре к отрезку и о расстоянии между точками на координатной плоскости $M(x; y) \in \ell \Leftrightarrow \rho(M; M_1) = \rho(M; M_2) \Leftrightarrow |MM_1| = |MM_2| \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |MM_1|^2 = |MM_2|^2 \Leftrightarrow (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 = x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2(x_1 - x_2)x + 2(y_1 - y_2)y + (x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + C + 0$,
где $A = 2(x_1 - x_2)$, $B = 2(y_1 - y_2)$, $C = (x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2) =$
$= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + (y_2 - y_1)(y_2 + y_1)$. Условие $M_1 \not\equiv M_2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_2 \neq x_1\,; \\ y_2 \neq y_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_2 - x_1 \neq 0\,; \\ y_2 - y_1 \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A \neq 0\,; \\ B \neq 0\,. \end{array}\right.$$

Итак, мы получили, что точки прямой ℓ , и только они, удовлетворяют уравнению (1) при условиях (2). Однако следует отметить, что в проведенных рассуждениях мы брали конкретный отрезок M_1M_2 , для которого прямая ℓ — серединный перпендикуляр, и для полноты доказательства необходимо показать, что если взять другой отрезок $\tilde{M}_1\tilde{M}_2$, такой, что указанная прямая ℓ будет и для него серединным перпендикуляром, то координаты точек прямой ℓ , и только они, будут удовлетворять некоторому уравнению первой степени, *равносильному* * уравнению (1). Эти рассуждения, отсутствующие в учебниках [5] и [6], мы проведем на следующем, втором этапе доказательства.

Пока рассмотрим некоторые частные случаи :

---

* **Уравнения называются равносильными, если множества их решений совпадают, в том числе, уравнения, не имеющие решений, считаются равносильными.**

а) (см. рис. 1 з)) $A = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_1 \Leftrightarrow M_1M_2 \perp Ox$, так как проекции точек M_1 и M_2 на ось Ox (основания перпендикуляров, проведенных из этих точек на ось Ox) совпадают, это точка $M_x(x';0)$, $x' = x_1 = x_2$, поэтому в силу единственности перпендикуляра, восставленного из точки на прямой, к этой прямой $M_1M_2 \perp Ox$; в силу условий (2) $B \neq 0$, а потому уравнение (1) принимает вид $By + C = 0 \Leftrightarrow y = y_0$, где $y_0 = -C/B$, в силу $Ox \perp Oy \Rightarrow M_1M_2 \perp Ox \Leftrightarrow \ell \parallel Ox \Leftrightarrow \ell \perp Oy \Leftrightarrow \ell$: $y = y_0 = \text{const}$, в частности, при $A = C = 0$, $B \neq 0$ получаем прямую, совпадающую с осью Ox , ее уравнение $y = 0$;

б) (см. рис. 1 и)) $B = 0 \Leftrightarrow y_2 = y_1 \Leftrightarrow M_1M_2 \perp Oy$, так как проекции точек M_1 и M_2 на ось Oy (основания перпендикуляров, проведенных из этих точек на ось Oy) совпадают, это точка $M_y(0;y')$, $y' = y_1 = y_2$, поэтому в силу единственности перпендикуляра, восставленного из точки на прямой, к этой прямой $M_1M_2 \perp Oy$; в силу условий (2) $A \neq 0$, а потому уравнение (1) принимает вид $Ax + C = 0 \Leftrightarrow x = x_0$, где $x_0 = -C/A$, в силу $Oy \perp Ox \Rightarrow M_1M_2 \perp Oy \Leftrightarrow \ell \parallel Oy \Leftrightarrow \ell \perp Ox \Leftrightarrow \ell$: $x = x_0 = \text{const}$, в частности, при $B = C = 0$, $A \neq 0$ получаем прямую, совпадающую с осью Oy , ее уравнение $x = 0$.

2) Докажем, что если взять другой отрезок $\tilde{M}_1\tilde{M}_2$, такой, что указанная прямая ℓ будет и для него серединным перпендикуляром, то координаты точек прямой ℓ , и только они, будут удовлетворять некоторому уравнению первой степени, *равносильному* уравнению (1). Проводя точно такие же рассуждения, что и в 1), получим: координаты точек прямой ℓ , и только они, будут удовлетворять уравнению первой степени с двумя неизвестными

$$\tilde{A}x + \tilde{B}y + \tilde{C} = 0 \,, \qquad (\tilde{1})$$

где $$\tilde{A} = 2(\tilde{x_1} - \tilde{x_2}) \,, \quad \tilde{B} = 2(\tilde{y_1} - \tilde{y_2}) \,,$$

$$\tilde{C} = (\tilde{x_2^2} - \tilde{x_2^2}) + (\tilde{y_2^2} - \tilde{y_1^2}) = (\tilde{x_2} - \tilde{x_1})(\tilde{x_2} + \tilde{x_1}) + (\tilde{y_2} - \tilde{y_1})(\tilde{y_2} + \tilde{y_1}) \,,$$

$\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ — постоянные (фиксированные) действительные числа, причем

$$\left[\begin{array}{l} \tilde{A} \neq 0 \,; \\ \tilde{B} \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow |\tilde{A}| + |\tilde{B}| \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{A}^2 + \tilde{B}^2 \neq 0 \,. \qquad (\tilde{2})$$

Переходим к доказательству равносильности уравнений (1) и $(\tilde{1})$. Так как $M_1M_2 \perp \ell$ и $\tilde{M}_1\tilde{M}_2 \perp \ell$, то $M_1M_2 \parallel \tilde{M}_1\tilde{M}_2$.

Рассмотрим случаи: $B = 0$ и $B \neq 0$.

$B = 0$ (см. выше б), $B = 0 \Leftrightarrow y_2 - y_1 = 0 \Leftrightarrow M_1M_2 \perp Oy \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{M_1M_2 \parallel \tilde{M}_1\tilde{M}_2\} \Leftrightarrow \tilde{M}_1\tilde{M}_2 \perp Oy \Leftrightarrow \tilde{y_2} - \tilde{y_2} = 0 \Leftrightarrow \tilde{B} = 0$, в силу условий (2) и $(\tilde{2})$ соответственно $A \neq 0$ и $\tilde{A} \neq 0$, тогда уравнения (1) и $(\tilde{1})$ соответственно принимают вид $Ax + C = 0 \Leftrightarrow x = -C/A$ и $\tilde{A}x + \tilde{C} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = -\tilde{C}/\tilde{A}$. С учетом того, что $B = \tilde{B} = 0$ и выражений для A , C , $\tilde{A}$ и $\tilde{C}$ имеем:

уравнение (1) $\Leftrightarrow$ $x = -\dfrac{C}{A} = x_0$, $-\dfrac{C}{A} = -\dfrac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{2(x_1 - x_2)} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$,

уравнение $(\tilde{1})$ $\Leftrightarrow$ $x = -\dfrac{\tilde{C}}{\tilde{A}} = \tilde{x_0}$, $-\dfrac{\tilde{C}}{\tilde{A}} = -\dfrac{(\tilde{x_2} - \tilde{x_1})(\tilde{x_2} + \tilde{x_1})}{2(\tilde{x_1} - \tilde{x_2})} = \dfrac{\tilde{x_1} + \tilde{x_2}}{2}$.

Согласно результатам случая б), прямая ℓ состоит из точек, имеющих *одну и ту же абсциссу* x_0, (множество их ординат совпадает с множеством всех действительных чисел), в частности точки M_0 и $\tilde{M}_0$ пересечения отрезков M_1M_2 и соответственно $\tilde{M}_1\tilde{M}_2$ с прямой ℓ (см. рис. 1 и) имеют абсциссу x_0. С другой стороны, точки M_0 и $\tilde{M}_0$ — середины отрезков M_1M_2 и $\tilde{M}_1\tilde{M}_2$ соответственно, а поскольку $M_1M_2 \parallel Ox$ (см. рис. 1 и), то

$$|M_1M_0| = |M_0M_2| \Leftrightarrow |x_0 - x_1| = |x_2 - x_0| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 - x_1 = x_2 - x_0 \ ; \\ x_0 - x_1 = x_0 - x_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x_0 = x_1 + x_2 \ ; \\ x_1 = x_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \{x_1 \neq x_2\} \Leftrightarrow x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \ .$$

Аналогично доказывается, что $x_0 = \dfrac{\tilde{x_1} + \tilde{x_2}}{2}$. Следовательно,

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2}{2} = \tilde{x}_0 \ ,$$

откуда и вытекает равносильность уравнений (1) и $(\tilde{1})$.

$B \neq 0$. Согласно рассмотренному выше случаю б) $B \neq 0 \Leftrightarrow \ell \not\perp Ox \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \ell \not\parallel Oy$. Так как $B = 0 \Leftrightarrow \tilde{B} = 0$, то $B \neq 0 \Leftrightarrow \tilde{B} \neq 0$, а потому возможно почленное деление уравнения (1) на число $B \neq 0$ и почленное деление уравнения $(\tilde{1})$ на число $\tilde{B} \neq 0$, откуда непосредственно вытекает равносильность уравнения (1) и (3) , а также — уравнений $(\tilde{1})$ и $(\tilde{3})$:

$$Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{Ax}{B} - \frac{C}{B} \Leftrightarrow \left\{k = -\frac{A}{B}, l = -\frac{C}{B}\right\} \Leftrightarrow y = kx + l \ , \quad (3)$$

$$\tilde{A}x + \tilde{B}y + \tilde{C} = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{\tilde{A}x}{\tilde{B}} - \frac{\tilde{C}}{\tilde{B}} \Leftrightarrow \left\{\tilde{k} = -\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}}, \tilde{l} = -\frac{\tilde{C}}{\tilde{B}}\right\} \Leftrightarrow y = \tilde{k}x + \tilde{l} \ . \quad (\tilde{3})$$

В силу указанных равносильностей уравнений координаты точкек прямой ℓ и только этих точек удовлетворяют уравнениям (3) и $(\tilde{3})$. Поскольку в силу аксиомы единственности прямой, проходящей через две различные точки, прямая ℓ однозначно определяется, например, двумя точками с абсциссами $x = 0$ и $x = 1$, а их ординаты (согласно уравнениям (3) и $(\tilde{3})$) соответственно равны $y(0) = l$, $y(1) = k + l$ или $\tilde{y}(0) = \tilde{l}$, $\tilde{y}(1) = \tilde{k} + \tilde{l}$. Следовательно, $y(0) = \tilde{y}(0) \Leftrightarrow l = \tilde{l}$, $y(1) = \tilde{y}(1) \Leftrightarrow k + l = \tilde{k} + \tilde{l} \Leftrightarrow \{l = \tilde{l}\} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow l = \tilde{l}$, уравнения (3) и $(\tilde{3})$ оказались олинаковыми, а потому, очевидно, равносильными. В силу достаточно очевидного свойства транзитивности

равносильности уравнений (1) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ ($\tilde{3}$) $\Leftrightarrow$ ($\tilde{1}$) $\Rightarrow$ равносильность уравнений (1) и ($\tilde{1}$) .

3) Докажем, что в уравнении (3) $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α величина угла между прямой ℓ и положительным направлением оси Ox , то есть величина угла между прямой ℓ и лучом ME , где M — начальная точка луча — точка пересечения прямой ℓ и оси Ox , а E — точка оси Ox , лежащая на ней *правее*, то есть она имеет большую абсциссу, чем абсцисса точки M , если $\ell \parallel Ox$ или ℓ совпадает с осью Ox , то $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$
(см. рис. 1 к), л), м).

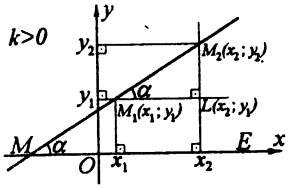


рис. 1 к)

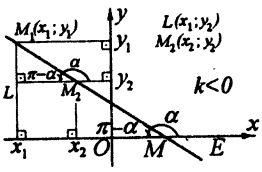


рис. 1 л)

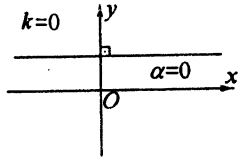


рис. 1 м)

Рассмотрим три случая: $k > 0$, $k < 0$, $k = 0$.

$k > 0$, выберем на прямой, описываемой уравнением $y = kx + l$, две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ так, чтобы $x_2 > x_1$, поскольку $k > 0$, то $y_2 > y_1$ (это было показано в п. VII , см. рис. 1 к)). $k > 0 \Rightarrow A \neq 0$, а так как у нас и $B \neq 0$, то прямая $\ell \not\parallel Ox$ и $\ell \not\parallel Oy$ (см. рассмотренные выше случаи а) и б)). Проведем через точку $M_1(x_1; y_1)$ прямую, параллельную оси Ox , а через точку $M_2(x_2; y_2)$ прямую, параллельную оси Oy , в силу перпендикулярности осей Ox и Oy эти прямые пересекутся в точке L под прямым углом. В силу единственности прямой, параллельной данной прямой и проходящей через точку вне данной прямой, точка L *не лежит* на прямой M_1M_2 (в противном случае так как $M_1L \parallel Ox$, то и $M_1M_2 \parallel Ox$, что неверно). Поскольку $M_1L \parallel Ox$ и $M_2L \parallel Oy$ (см. рассмотренные случаи а) и б) абсцисса точки L равна x_2 , а ее ордината равна y_1 , то есть L — $L(x_2; y_1)$. Так как $x_2 > x_1$, то на прямой $M_1L \parallel Ox$ точка L расположена правее точки M_1 , а потому в силу равенства соответственных углов при $M_1L \parallel Ox$ и секущей M_1M_2 в прямоугольном треугольнике M_1LM_2 $\widehat{LM_1M_2} = \alpha$, откуда:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|LM_2|}{|M_1L|} = \frac{|y_2 - y_1|}{|x_2 - x_1|} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{kx_2 + l - kx_1 - l}{x_2 - x_1} = \frac{k(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = k\ ;$$

$k < 0$, выберем на прямой, описываемой уравнением $y = kx + l$, две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ так, чтобы $x_2 > x_1$, поскольку $k < 0$, то $y_2 < y_1$ (это было показано в п. VII , (см. рис. 1 л)). $k < 0 \Rightarrow A \neq 0$, а так как у нас и $B \neq 0$, то прямая $\ell \not\parallel Ox$ и $\ell \not\parallel Oy$ (см. рассмотренные выше случаи а) и б). Проведем через точку $M_2(x_2; y_2)$ прямую, параллельную оси Ox , а через

точку $M_1(x_1;y_1)$ прямую, параллельную оси Oy, в силу перпендикулярности осей Ox и Oy эти прямые пересекутся в точке L под прямым углом. В силу единственности прямой, параллельной данной прямой и проходящей через точку вне данной прямой, точка L *не лежит* на прямой M_1M_2 (в противном случае так как $M_1L \parallel Oy$, то и $M_1M_2 \parallel Oy$, что неверно). Поскольку $M_1L \parallel Oy$ и $LM_2 \parallel Ox$ (см. рассмотренные случаи а) и б) абсцисса точки L равна x_1, а ее ордината равна y_2, то есть L — $L(x_1;y_2)$. Так как $x_1 < x_2$, то на прямой $LM_2 \parallel Ox$ точка L расположена левее точки M_2, а потому в силу равенства соответственных углов при $M_2L \parallel Ox$ и секущей M_1M_2 в прямоугольном треугольнике M_2LM_1 $\widehat{LM_2M_1} = \pi - \alpha$, откуда $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) =$

$$= \frac{|LM_2|}{|M_1L|} = \frac{|y_2 - y_1|}{|x_2 - x_1|} = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} = \frac{kx_1 + l - kx_2 - l}{x_2 - x_1} = \frac{k(x_1 - x_2)}{x_2 - x_1} = -k \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = k\,;$$

$k = 0$, в этом случае также и $A = 0$ $(k = -A/B)$, поскольку (см. выше случай а) при этом прямая $\ell \parallel Ox$, то величина угла ее наклона α к оси Ox равна 0 или π, следовательно, $\operatorname{tg}\alpha = 0 = k$ и в этом случае (см. рис. 1 м).

4) Переходим к непосредственному доказательству того, что график функции $y = ax + b$ — прямая. Для этого выберем две точки этого графика $M_0(0;b)$ и $M_1(1;a+b)$ и проведем через них прямую (в силу соответствующей аксиомы эта прямая определена однозначно). Поскольку эта прямая проходит как через точку $M_0(0;b) \in Oy$, так и через $M_1(1;a+b) \notin Oy$, то она *не параллельна* оси Oy и *не совпадает* с осью Oy, поэтому (см. выше случай б) координаты точек этой прямой и только они удовлетворяют уравнению вида (3):

$$y = k_0x + l_0\,. \qquad (3_0)$$

Подставляя в него $x = 0$, а затем $x = 1$, мы получим, что $y(0) = l_0 = b$, $y(1) = k_0 + l_0 = k_0 + b = a + b \;\Rightarrow\; k_0 = a$. Таким образом, уравнение (3_0) как раз и приняло вид $y = ax + b$, что окончательно доказывает теорему о графике линейной функции. Равенство $a = \operatorname{tg}\alpha$ по сути дела установлено на предыдущем этапе 3) доказательства теоремы.

Отметим, что при $b = 0$ (в общем виде уравнения прямой (1) это соответствует случаю $C = 0$) прямая — график линейной функции проходит через начало координат, точку $O(0;0)$, так как $y(0) = 0$ (см. выше рис. 1 в) и рис. 1 г).

Число $a = \operatorname{tg}\alpha$ называют *угловым коэффициентом*.

Вопрос 5. Формула корней квадратного уравнения. Теорема Виета

Определение 1. Квадратным трехчленом называется выражение

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \tag{1}$$

где $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ — постоянные числа, $x \in R$ — переменная; a, b и c называются *коэффициентами*.

Определение 2. Квадратным уравнением называется уравнение вида

$$f(x) = 0 \quad \text{или} \quad ax^2 + bx + c = 0\,, \qquad (a \neq 0, \quad a, b, c \in R)\,. \tag{2}$$

Определение 3. Корнем (решением) квадратного уравнения, а также корнем квадратного трехчлена (1) называется такое число $x_0 (x_0 \in R)$, для которого

$$f(x_0) = 0 \quad \text{или} \quad a{x_0}^2 + bx_0 + c = 0$$

— верное числовое равенство.

Число $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* квадратного трехчлена $f(x)$ (квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$).

Если $a = 1$, то квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0 \tag{3}$$

называется *приведенным*. Его дискриминант $D = p^2 - 4q$.

Теорема 1. А) Если $D \geqslant 0$, то квадратное уравнение (2) имеет корни $x_1, x_2 \in R$, определяемые формулой:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4}$$

или формулами:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,, \tag{5}$$

$\sqrt{D}$ — арифметический квадратный корень из числа D, причем если $D > 0$, то $x_1 \neq x_2$, то есть уравнение (2) имеет два различных действительных корня; если $D = 0$, то $x_1 = x_2 = x_0 = -b/2a$ — уравнение имеет *два совпадающих корня*.

Б) Если $D < 0$, то квадратное уравнение (2) не имеет действительных корней.

В случае приведенного квадратного уравнения и $D = p^2 - 4q \geqslant 0$ формулы корней имеют вид

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}\,, \quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}\,.$$

Доказательство. Преобразуем выражение для $f(x)$ следующим образом, применяя метод выделения полного квадрата:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=f(x)\,. \qquad (6)$$

А) Если применить при $D\geqslant 0$ формулу разности квадратов, то выражение для квадратного трехчлена преобразуется к виду:

$$f(x)=a\left(x-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)=$$

$$=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 определяются из формулы (5). Так как $a\neq 0$, то
$f(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=x_1$ или $x=x_2$, в случае А) теорема доказана.

Б) При $D<0$ очевидно, что при любом действительном x выражение, на которое умножается a, в (6) строго положительно, а потому
$\forall\ \ a>0\ \ (a<0)\ \Rightarrow\ f(x)>0\ (f(x)<0)$,
следовательно, ни при каком действительном значении x квадратный трехчлен не обращается в 0, стало быть, при $D<0$ квадратное уравнение не имеет действительных корней.

Теорема 1. полностью доказана.

Теорема 2 (Виета). Если $D=b^2-4ac\geqslant 0$,
соответственно $D=p^2-4q\geq 0$, x_1, x_2 — корни квадратного уравнения (2) или (3), то в случае общего (приведенного) квадратного уравнения

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\quad (x_1+x_2=-p)\ ; \qquad (7)$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}\quad (x_1\cdot x_2=q)\ . \qquad (8)$$

Доказательство. Равенство (7) получается в результате непосредственного сложения выражений для x_1 и x_2, определяемых из (5);
для доказательства (8) перемножим определяемые из (5) выражения для

x_1 и x_2, получим, применяя формулу разности квадратов и выражение для дискриминанта D,

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b-\sqrt{D})(-b+\sqrt{D})}{4a^2} = -\frac{D-b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}\,.$$

Теорема Виета доказана.

Замечание. Случай $D=0$ предполагает наличие *двух совпадающих корней* квадратного уравнения.

Обратить внимание на случай уравнения вида

$$ax^2+2bx+c=0 \tag{9}$$

Если $D=(2b)^2-4ac=4(b^2-ac)\geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; b^2-ac\geqslant 0$, то формула корней этого уравнения имеет вид

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}\,. \tag{10}$$

Вопрос. Самостоятельно сформулировать и доказать теорему, обратную теореме Виета.

Вопрос 6. Теорема Виета. Теорема о разложении квадратного трехчлена на линейные множители

Те же определения, что и в Вопросе 5, там же формулировка и доказательство Теоремы Виета.

Теорема (о разложении квадратного трехчлена на линейные множители).

Если $D=b^2-4ac$ квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ неотрицателен, то

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\,, \tag{11}$$

где x_1 и x_2 корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Доказательство. Преобразуем выражение для $f(x)$ следующим образом, применяя метод выделения полного квадрата,

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\,.$$

Если применить при $D \geqslant 0$ формулу разности квадратов, то выражение для квадратного трехчлена преобразуется к виду

$$f(x) = a\left(x - \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right) = a(x-x_1)(x-x_2)\ ,$$

где x_1 и x_2 определяются из формулы (5), что и требовалось доказать.

Доказать, что при $D < 0$ разложение на действительные линейные множители невозможно.

Это легко сделать от противного, предполагая, что разложение типа (11) для $f(x)$ возможно, мы получим существование действительного корня у квадратного трехчлена с отрицательным дискриминантом и тем самым придем к противоречию с доказанным в вопросе 5. несуществованием таких корней.

Вопрос 7. Свойства квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ и ее график

Определение. Функция вида $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ называется *квадратичной* функцией,

$a, b, c \in R$, $a \neq 0$ — постоянные числа, $x \in R$ — переменная.

I. $D[f]$ — $(-\infty, +\infty)$, так как из свойств действительных чисел (строго доказываемых вне рамок школьной программы) вытекает, что $\forall x \in R$ однозначно определены произведения $x \cdot x = x^2$, ax^2, bx и суммы $ax^2 + bx$, $(ax^2 + bx) + c = ax^2 + bx + c = f(x)$.

II. $E[f]$ — $[-D/4a\ ,\ +\infty)$, если $a > 0$ и

$E[f]$ — $(-\infty\ ,\ -D/4a]$, если $a < 0$, где $D = b^2 - 4ac$.

Доказательство. Преобразуем $f(x)$ следующим образом:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}\ .$$

$\forall x \in R \Rightarrow (x + b/2a)^2 \geqslant 0$, поэтому при $a > 0$ $(a < 0)$ вытекает, что $\forall x \in R \Rightarrow f(x) \geqslant -D/4a$ $(f(x) \leqslant -D/4a)$.

Фиксируем произвольное $y_0 \geqslant -D/4a$ $(y_0 \leqslant -D/4a)$. Рассматривая уравнение $f(x) = y_0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c - y_0 = 0$, откуда $\tilde{D} = b^2 - 4a(c - y_0) = b^2 - 4ac + 4ay_0 = 4a(y_0 + D/4a)$, мы и получим, что если $a > 0$ $(a < 0)$ и $y_0 \geqslant -D/4a$ $(y_0 \leqslant -D/4a)$, то $\tilde{D} \geqslant 0$, поэтому уравнение $f(x) = y_0$ имеет решения, то есть $\exists x_1, x_2 :\ f(x_1) = f(x_2) = y_0$, II доказано.

III. Если $a > 0$, то существует $\min\limits_{x \in R} f(x) = -D/4a = f(-b/2a)$, а если $a < 0$, то существует $\max\limits_{x \in R} f(x) = -D/4a = f(-b/2a)$ (см. п. II),

а $\max\limits_{x \in R} f(x)$ $(\min\limits_{x \in R} f(x))$ при $a > 0$ $(a < 0)$ также в силу п. II не существует.

IV. Четность и нечетность. $D[f]$ — симметрична относительно точки $x_0 = 0$. Исследуем равенство $f(-x) \equiv f(x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a(-x)^2 + b(-x) + c \equiv ax^2 + bx + c \Leftrightarrow 2bx \equiv 0 \Leftrightarrow b = 0 \Rightarrow \forall a \neq 0$, $b = 0$ — функция четная, а при $b \neq 0$ — не является четной.

Исследуем равенство $f(-x) \equiv -f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a(-x)^2 + b(-x) + c \equiv (-ax^2 - bx - c) \Leftrightarrow 2(ax^2 + c) \equiv 0 \Leftrightarrow x^2 \equiv -\frac{c}{a}$, что неверно, так как x — переменная, следовательно, $f(x)$ не является нечетной.

V. $f(x)$ не является периодической.

Для доказательства предположим, что $\exists\, T_0 \neq 0$ такое, что $\forall x \in R \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x+T_0) = f(x)$ (здесь мы используем факт $D[f] — (-\infty, +\infty)$). Тогда, в частности, при $x = x_0 = -b/2a \Rightarrow x_0+T_0 \neq x_0$ (то есть или $x_0+T_0 > x_0$ или $x_0+T_0 < x_0$), но в силу результатов п. VII при этом или $f(x_0+T_0) < f(x_0)$, или $f(x_0+T_0) > f(x_0)$, то есть $f(x_0) \neq f(x_0+T_0)$, пришли к противоречию.

VI. Если $D \geqslant 0$, то $f(x) = 0$ при $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D})/2a$ (см. вопрос 5); так как $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, то
при $D = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -b/2a = x_0 \Rightarrow f(x) = a(x - x_0)^2$,
следовательно, при $a > 0$ $(a < 0) \Rightarrow f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$
на $(-\infty\ ,\ -b/2a) \cup (-b/2a\ ,\ +\infty)$,
если же $D > 0$, то при $a > 0$ $(a < 0) \Rightarrow f(x) > 0$ на
$(-\infty\ ,\ x_1) \cup (x_2\ ,\ +\infty)$, и $f(x) < 0$ $(f(x) > 0)$ на (x_1, x_2),
где x_1 — меньший, а x_2 — больший корни уравнения $f(x) = 0$;
при $D < 0$, $a > 0 \Rightarrow f(x) \geqslant -D/4a > 0$,
при $D < 0$, $a < 0 \Rightarrow f(x) \leqslant -D/4a < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ при $a > 0$ $(a < 0)$ всюду на $(-\infty\ ,\ +\infty)$.

VII. Если $a > 0$ $(a < 0)$, то $f(x) = ax^2 + bx + c$ возрастает на $[-b/2a\ ,\ +\infty)$ $((-\infty\ ,\ -b/2a])$ и убывает на $(-\infty\ ,\ -b/2a]$ $([-b/2a\ ,\ +\infty))$.

Доказывается это путем рассмотрения произвольных $x_2 > x_1 \geqslant -b/2a$ и $x_1 < x_2 \leqslant -b/2a$ и разности $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) =$
$= (x_2 - x_1)(a(x_1 + x_2) + b) = a(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - (-b)/a)$;

$x_2 - x_1 > 0$ всегда, поэтому знак разности $f(x_2) - f(x_1)$ зависит от знака выражения $a(x_1 + x_2 - (-b)/a)$, а он и определяется сформулированными в условиях п.VII данными следующим образом: если $x_2 > x_1 \geqslant -b/2a$ $(x_1 < x_2 \leqslant -b/2a)$, то в силу свойств числовых неравенств

$$x_1 \geqslant -\frac{b}{2a} \quad \left(x_2 \leqslant -\frac{b}{2a}\right)$$

$$x_2 > -\frac{b}{2a} \quad \left(x_1 < -\frac{b}{2a}\right),$$

почленно складывая эти неравенства, мы получим:

$$x_1 + x_2 > -\frac{b}{a} \quad \left(x_1 + x_2 < -\frac{b}{a}\right),$$

а уже отсюда все определяется знаком числа a .

VIII. Графики

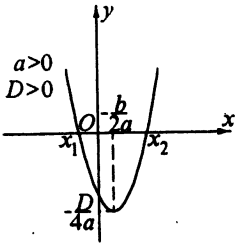


рис. 2 а)

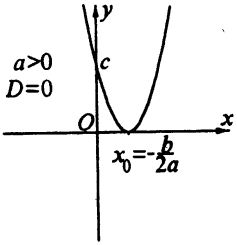


рис. 2 б)

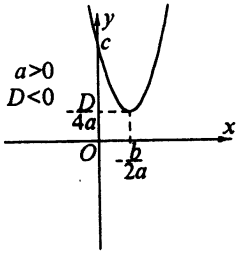


рис. 2 в)

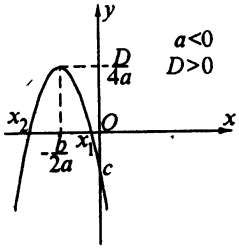


рис. 2 г)

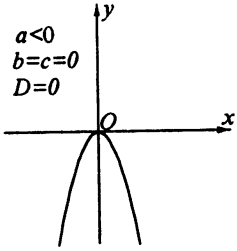


рис. 2 д)

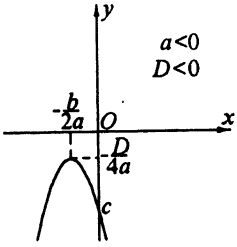


рис. 2 е)

$(0; c)$ точка пересечения графика функции с осью Oy (ибо $f(0) = c$); $(x_1; 0)$, $(x_2; 0)$ точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Ox при $D > 0$; при $D = 0$ это точка касания, $x_1 = x_2 = x_0 = -b/2a$; при $D < 0$ таких точек нет.

Замечание. Монотонность $f(x)$ может быть доказана и с помощью производной, однако при применении теоремы об участках возрастания (убывания) при $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) это можно утверждать лишь на $(-b/2a\ ,\ +\infty)$ или $(-\infty\ ,\ -b/2a)$, а не на $[-b/2a\ ,\ +\infty)$ или $(-\infty\ ,\ -b/2a]$.

Вопрос 8. Свойства степеней с натуральными и целыми показателями

Степенью называется выражение a^α, где число a называется *основанием* степени, а число α называется *показателем* степени.

Пусть a — действительное число :

$$a^n \stackrel{df}{=} \left[\begin{array}{ll} a, & \text{если } n = 1 \\ \underbrace{aa\cdots a}_{n}, & \text{если } n \geqslant 2 \end{array}\right. \quad n \in N \quad ; \qquad (1)$$

если $n = 0, a \neq 0$, то $a^0 \stackrel{df}{=} 1$; 0^0 не определено.

$$a^{-n} \stackrel{df}{=} \frac{1}{a^n}, \text{где } a \neq 0, \quad n \in N \quad ; \tag{2}$$

0^{-n} не определено.

Из (2) при $n < 0 \Rightarrow \frac{1}{a^{-n}} = a^{-(-n)} = a^n$ (так как $-n > 0$) ; $a^{-0} = 1 = 1/1 = 1/a^0$, при любом $a \neq 0$. Следовательно, $\forall a \neq 0$ и $\forall m \in Z$ (где Z — множество целых чисел) вытекает равенство:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \tag{3}$$

Свойства. Для любых целых чисел m и p

1. $(ab)^m = a^m b^m$,
2. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$,
3. $a^m \cdot a^p = a^{m+p}$,
4. $a^m : a^p = a^{m-p}$,
5. $(a^m)^p = a^{mp}$.
6. $a^m > b^m \Leftrightarrow a > b \geqslant 0$, $m > 0$,

   $a^m > b^m \Leftrightarrow 0 < a < b$, $m < 0$,

   обратить внимание и на случаи знаков

   " $<$ ", " $\leqslant$ ", " $\geqslant$ ".

Свойства 1 — 5 справедливы для любых $a, b \in R$, для которых определены левые и правые части выписанных равенств, в частности, для любых отличных от нуля $a, b \in R$, свойство 6 — $\forall$ указанных $a, b \in R$.

Доказательства

1. (а) $m = n \in N$: $(ab)^m = (ab)^n = \underbrace{(ab)(ab)\cdots(ab)}_{n} =$

$$= \underbrace{(aa\cdots a)}_{n}\underbrace{(bb\cdots b)}_{n} = a^n b^n = a^m b^m \ ,$$

(б) $m = 0$: $(ab)^m = (ab)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 b^0 = a^m b^m$,

(в) $m = -n$, $n \in N$: $(ab)^m = (ab)^{-n} = \frac{1}{(ab)^n} = \frac{1}{a^n b^n} =$

$$= \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{b^n} = a^{-n} b^{-n} = a^m b^m \quad \Rightarrow \text{ 1 доказано;}$$

2. (а) $m = n \in N$: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\cdots\left(\frac{a}{b}\right)}_{n} =$

$= \frac{\overbrace{aa\cdots a}^{n}}{\underbrace{bb\cdots b}_{n}} = \frac{a^n}{b^n} = \frac{a^m}{b^m}$,

(б) $m = 0$: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{a^0}{b^0} = \frac{a^m}{b^m}$,

(в) $m = -n,\ n \in N$: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{(a/b)^n} =$

$= \frac{1}{a^n/b^n} = \frac{b^n}{a^n} = \frac{1}{b^{-n}} \cdot a^{-n} = \frac{a^m}{b^m}$ $\Rightarrow$ 2 доказано;

3. (а) $m > 0, p > 0,\ m, p \in N$:
$a^m a^p = \underbrace{aa\cdots a}_{m}\underbrace{aa\cdots a}_{p} = \underbrace{aa\cdots a}_{m+p} = a^{m+p}$,

(б) $m \in Z, p = 0$:
$a^m a^p = a^m a^0 = a^m 1 = a^m = a^{m+0} = a^{m+p}$,
случай $m = 0, p \in Z$ рассматривается аналогично,
в частности, $m = p = 0$:
$a^m a^p = a^0 a^0 = 1 \cdot 1 = 1 = a^0 = a^{0+0} = a^{m+p}$,

(в) $m > 0, p < 0$, тогда $p = -n,\ n \in N$:
(α) $m > n \Rightarrow m - n \in N$: $a^m \cdot a^p = a^m \cdot a^{-n} =$
$= a^m : a^n = a^{n+(m-n)} : a^n = \left(a^n \cdot a^{m-n}\right) : a^n = a^{m-n} =$
$= a^{m+(-n)} = a^{m+p}$,
(β) $m = n \Rightarrow m - n = 0$: $a^m \cdot a^p = a^m \cdot a^{-n} = a^m : a^n =$
$= a^m : a^m = 1 = a^0 = a^{m-m} = a^{m-n} = a^{m+(-n)} = a^{m+p}$,
(γ) $m < n \Rightarrow n - m \in N$: $a^m \cdot a^p = a^m \cdot a^{-n} =$
$= a^m : a^n = a^m : \left(a^{m+(n-m)}\right) = a^m : \left(a^m \cdot a^{n-m}\right) =$
$= 1 : a^{n-m} = a^{-(n-m)} = a^{m-n} = a^{m+p}$,

(г) $m < 0, p > 0$ рассматривается аналогично,

(д) $m < 0, p < 0$, тогда $m = -q, p = -n,\ n, q \in N$:
$a^{m+p} = a^{(-q)+(-p)} = a^{-(q+p)} = \frac{1}{a^{q+n}} = \frac{1}{a^q \cdot a^n} =$
$= a^{-q} \cdot a^{-n} = a^m a^p$ $\Rightarrow$ 3 полностью доказано;

4. $a^p \cdot a^{m-p} = a^{p+(m-p)} = a^m$ $\Rightarrow$ $a^{m-p} = a^m : a^p$ $\Rightarrow$ 4 доказано;

5. (а) $m > 0, p > 0$:
$$(a^m)^p = \underbrace{\underbrace{(aa\cdots a)}_{m}\underbrace{(aa\cdots a)}_{m}\underbrace{(aa\cdots a)}_{m}}_{p} = \underbrace{aa\cdots a}_{mp} = a^{mp} ,$$

(б) $m \in Z, p = 0$: $(a^m)^p = (a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m\cdot 0} = a^{mp}$,
$m = 0, p \in Z$: $(a^m)^p = 1^p = 1 = a^0 = a^{0\cdot p} = a^{mp}$,
в частности, $m = p = 0$: $(a^m)^p = (a^0)^0 = 1^0 = 1 = a^0 = a^{0\cdot 0} = a^{mp}$,

(в) $m < 0, p > 0 \Rightarrow m = -q,\ q \in N$:
$$(a^m)^p = (a^{-q})^p = \left(\frac{1}{a^q}\right)^p = \frac{1^p}{(a^q)^p} = \frac{1}{a^{qp}} = a^{-qp} = a^{(-q)p} = a^{mp} ,$$

(г) $m > 0, p < 0 \Rightarrow p = -n,\ n \in N$:
$$(a^m)^p = (a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn} = a^{m(-n)} = a^{mp} ,$$

(д) $m < 0, p < 0 \Rightarrow m = -q, p = -n,\ n, q \in N$:
$$(a^m)^p = (a^{-n})^{-q} = \frac{1}{(a^{-n})^q} = \frac{1}{a^{(-n)q}} = a^{-(-nq)} = a^{nq} = a^{(-n)(-q)} = a^{mp} \Rightarrow$$ 5 полностью доказано;

6. $m > 0$, это свойство сразу вытекает из свойства 10 числовых неравенств (см. выше Вопрос 3),
$m < 0 \Leftrightarrow -m > 0$, далее также, как и ниже, для случая отрицательного рационального показателя или в силу доказанного ниже в Вопросе 16 свойства монотонности степенной функции.

Таким образом, все свойства степеней с целыми и, в частности, с натуральными показателями доказаны.

Вопрос 9. Свойства арифметических корней n - ой степени. Свойства степеней с рациональными показателями

Определение 1. Пусть числа $a, b \in R$. Число b называется ***корнем n-ой степени*** ($n \in N$) из числа a (алгебраическим корнем), если $b^n = a$. Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то число называется ***арифметическим корнем n-ой степени*** из числа a. Арифметический корень обозначается так:
$$b = \sqrt[n]{a} .$$

Это обозначение применяется и для случая нечетного n и отрицательного a $(a<0)$, при этом также $b<0$.

При $n=1$ $b=a$, так как $a^1=a$, при $n=2$ $\sqrt[2]{a}=\sqrt{a}$.

В школьном курсе без доказательства принимается существование арифметического корня n - ой степени; его единственность легко доказывается от противного на основе свойства 10 числовых неравенств.

О понятии степени см. Вопрос 8.

Определение 2. Пусть $p\in Z$, $q\in N$, $a>0$, $a\in R$, $a^{\frac{p}{q}}\overset{df}{=}\sqrt[q]{a^p}$,

в частности, при $p=1$ $a^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{a}$, если $p\in N$, то $a^{\frac{p}{q}}$ определено и для $a=0$.

Если $q<0$, то $a^{\frac{p}{q}}\overset{df}{=}a^{\frac{-p}{|q|}}$, однако все свойства степеней с рациональными показателями будут формулироваться и доказываться для случая, когда у показателей $\alpha=p/q$, $\beta=r/s$ — $q\in N$, $s\in N$, то есть $q,s>0$.

Свойства корней n - ой степени:

1. $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a, \text{ если } n=2k-1,\ \forall k\in N, & \forall a\in R \\ |a|, \text{ если } n=2k,\ \forall k\in N, & \forall a\in R \end{cases}$;

2. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$, $\forall n\in N,\ \forall a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ a,b\in R$;

3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $\forall n\in N,\ \forall a\geqslant 0,\ b>0,\ a,b\in R$;

4. $\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$, $\forall m,n\in N,\ \forall a\geqslant 0,\ a\in R$;

5. $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}=a^k$, $\forall m,n,k\in N,\ k=m:n,\ \forall a\geqslant 0,\ a\in R$,
$\sqrt[n]{a^m}=a^k\sqrt[n]{a^r}$, $\forall m,n,k,r\in N,\ m=nk+r$,
$0<r\leqslant n-1, \forall a\geqslant 0,\ a\in R$;

6. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$, $\forall m,n\in N,\ \forall a\geqslant 0,\ a\in R$;

7. $\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[q]{a^p}$, $\forall m,n,p,q,k\in N:\ m=kq,\ n=kp$,
$\forall a\geqslant 0,\ a\in R$;

8. $\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq+np}}$, $\forall p,q,m,n\in N,\ \forall a\geqslant 0$, $a\in R$,
$\sqrt[n]{a^m}:\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq-np}}$, $\forall p,q,m,n\in N,\ \forall a>0$, $a\in R$.

Свойства степеней. Для любых рациональных чисел α и β:

1. $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$;

2. $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$;

3. $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$;

4. $a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta}$;

5. $(a^\alpha)^\beta = (a^\beta)^\alpha = a^{\alpha\beta}$.

6. $a^\alpha > b^\alpha \Leftrightarrow a > b \geqslant 0$, $\alpha > 0$,

$a^\alpha > b^\alpha \Leftrightarrow 0 < a < b$, $\alpha < 0$,

обратить внимание и на случаи знаков

" $<$ "," $\leqslant$ "," $\geqslant$ ".

Свойства 1 — 5 справедливы для всех действительных a и b, при которых определены левые и правые части выписанных равенств, в частности, для любых $a > 0$, $b > 0$, $a, b \in R$, свойство 6 — $\forall$ указанных $a, b \in R$.

Доказательства

I. Свойства корней

Их доказательства основаны на определении корня, единственности корня (в свойстве 1. применяется еще единственность алгебраического корня нечетной степени из отрицательного числа) и свойствах степеней с натуральными показателями.

1. $(\sqrt[n]{a^n})^n \overset{df}{=} a^n$ и $(a)^n = a^n \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$, $n = 2k-1$, если $n = 2k$, то, так как $a^n = |a|^n$ для любого $n \in N$ $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{|a|^n} = |a|$, что выводится точно так же, как и в случае $n = 2k-1$ (при этом используется то, что $|a| \geqslant 0$);

2. $(\sqrt[n]{ab})^n \overset{df}{=} ab$, $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n = ab \Rightarrow 2$;

3. $\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n \overset{df}{=} \frac{a}{b}$, $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b} \Rightarrow 3$;

4. $(\sqrt[n]{a^m})^n \overset{df}{=} a^m$, $((\sqrt[n]{a})^m)^n = ((\sqrt[n]{a})^n)^m = (a)^m = a^m \Rightarrow 4$;

5. $(\sqrt[n]{a^m})^n = a^m$, $(a^k)^n = a^{kn} = a^m \Rightarrow 5$,
$(a^k\sqrt[n]{a^r})^n = (a^k)^n(\sqrt[n]{a^r})^n = a^{kn}a^r = a^{kn+r} = a^m$,
$(\sqrt[n]{a^m})^n = a^m \Rightarrow 5$;

6. $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m}\right)^{n} = (\sqrt[n]{a})^{n} = a$,

$(\sqrt[mn]{a})^{mn} \stackrel{df}{=} a \Rightarrow 6$;

7. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[kq]{a^{kp}} \stackrel{6.}{=} \sqrt[k]{\sqrt[q]{a^{pk}}} \stackrel{5.}{=} \sqrt[k]{\sqrt[q]{(a^p)^k}} \stackrel{4.}{=} \sqrt[k]{(\sqrt[q]{a^p})^k} = \sqrt[q]{a^p}$;

8. $\sqrt[n]{a^m}\sqrt[q]{a^p} \stackrel{7.}{=} \sqrt[nq]{a^{mq}}\sqrt[nq]{a^{pn}} \stackrel{2.}{=} \sqrt[nq]{a^{mq}a^{pn}} \stackrel{1.}{=} \sqrt[nq]{a^{mq+pn}}$,
аналогично рассматривается случай частного с использованием свойства 4 степеней.

II. Свойства степеней

1. Пусть $\alpha = \frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$ $(ab)^{\alpha} = (ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} =$
$= \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}} = a^{\alpha} b^{\alpha}$;
2. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$;
3. 3. и 4. вытекают из свойств корней 8. и определения степени: пусть $\beta = \frac{p}{q}$,

$a^{\alpha}a^{\beta} = \sqrt[n]{a^m}\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} =$
$= a^{\alpha+\beta}$;

4. $a^{\alpha} : a^{\beta} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq}-\frac{np}{nq}} =$
$= a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{\alpha-\beta}$;
5. $(a^{\alpha})^{\beta} = (\sqrt[n]{a^m})^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(\sqrt[n]{(a^m)})^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{(a^m)^p}} =$
$= \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}} = a^{\alpha\beta}$,
аналогично доказывается, что $(a^{\beta})^{\alpha} = a^{\beta\alpha} = a^{\alpha\beta} = (a^{\alpha})^{\beta}$;

6. $\alpha > 0 \Rightarrow \alpha = m/n$, $m, n \in N$, в силу только что доказанного свойства 5 и свойства 10 числовых неравенств (см. выше Вопрос 3) $a^{m/n} > b^{m/n} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a^{1/n})^m > (b^{1/n})^m \Leftrightarrow a^{1/n} > b^{1/n} \Leftrightarrow (a^{1/n})^n > (b^{1/n})^n \Leftrightarrow a > b$,
$\alpha < 0 \Leftrightarrow -\alpha > 0$, по доказанному и в силу свойства 9 числовых неравенств (см. выше Вопрос 3)
$$a > b \Leftrightarrow a^{-\alpha} > b^{-\alpha} \Leftrightarrow 1/a^{-\alpha} < 1/b^{-\alpha} \Leftrightarrow a^{\alpha} < b^{\alpha} .$$
Свойства степеней и корней доказаны.

Обратить внимание, что в свойствах 2. и 3. корней при $n = 2k$, $k \in N$ для любых $a, b \in R$ таких, что $ab \geqslant 0$ (в случае 3. $b \neq 0$) имеют место равенства, которые предлагается самостоятельно обосновать:

$$2'.\ \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|}\sqrt[n]{|b|} \quad \text{и} \quad 3'.\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}.$$

Вопрос 10. Неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел. Неравенство для суммы двух взаимно обратных чисел

Определение 1. Пусть даны два числа a и $b \in R$. Число $c = \dfrac{a+b}{2}$ называется их *средним арифметическим.*

Определение 2. Пусть $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, $a, b \in R$. Число $d = \sqrt{ab}$ называется их *средним геометрическим.*

Определение 3. Пусть число $a \neq 0$. Число $\dfrac{1}{a}$ называется *обратным* числу a.

Так как $\dfrac{1}{1/a} = a$, то a — число, обратное числу $\dfrac{1}{a}$, следовательно, числа a и $1/a$ — взаимно обратные.

Теорема 1. Для любых $a, b \in R$: $a \geqslant 0, b \geqslant 0$

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \tag{1}$$

причем " $\geqslant$" обращается в " $=$" $\iff a = b$.

Для доказательства этого неравенства достаточно показать, что

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geqslant 0 \quad . \tag{2}$$

Преобразуя левую часть неравенства (2), получаем

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geqslant 0,$$

что очевидно. Из последнего неравенства уже ясно, что в неравенстве (1) имеет место равенство в том и только том случае, когда

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a} = \sqrt{b} \quad \Leftrightarrow \quad a = b.$

Теорема 2. Пусть $a \neq 0$, тогда,

$$\text{если } a > 0, \text{ то } \quad a + \frac{1}{a} \geqslant 2, \tag{3}$$

$$\text{а если } a < 0, \text{ то } \quad a + \frac{1}{a} \leqslant -2, \tag{4}$$

причем неравенства обращаются в равенства тогда и только тогда, когда соответственно $a = 1$ и $a = -1$.

Доказательства. В случае $a > 0$ справедливость неравенства (3) сразу вытекает из (1) при $b = \dfrac{1}{a}$, а так как в данном случае

$a = b \Leftrightarrow a = 1$, то в случае $a > 0$ теорема доказана;

в случае $a < 0$ можно воспользоваться доказанной первой частью теоремы применительно к $|a|$, из которой вытекает

$a + \dfrac{1}{a} = -\left(|a| + \dfrac{1}{|a|}\right) \leqslant -2$, а так как в этом случае

$|a| = 1$ только при $a = -1$, теорема доказана и для этого случая.

Дополнительные вопросы: для любых чисел $a, b, c, d \leqslant 0$ доказать неравенства

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd} \quad , \quad \frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$$

(первое вытекает из теоремы 1 : $\dfrac{\ell + f}{2} \geqslant \dfrac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} =$

$= \sqrt[4]{abcd}$, где $\ell = \dfrac{a+b}{2}$, $f = \dfrac{c+d}{2}$, а второе следует из первого при $d = \sqrt[3]{abc}$).

Вопрос 11. Формулы общего члена и суммы n первых членов арифметической прогрессии

Определение 1. Пусть задана функция, определенная на множестве натуральных чисел N, со значениями $a(n) = a_n \quad (n = 1, 2, ...)$, тогда говорят, что числа a_1, a_2, a_3, ... a_n, ... образуют *числовую последовательность*. Обозначается $\{a_n\}$, иногда $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Определение 2. Последовательность $\{a_n\}$ называется *арифметической прогрессией*, (обозначается $\div$) если существует число d, называемое *разностью* прогрессии, что для любого номера n

$$a_{n+1} = a_n + d \, . \tag{1}$$

Формула общего члена : $\forall n \in N$

$$a_n = a_1 + d(n-1) \, . \tag{2}$$

$$S_n \stackrel{df}{=} a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

— сумма n первых членов арифметической прогрессии. Формула для S_n :

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n \, . \tag{3}$$

Второе равенство в этой формуле сразу следует из (2). В учебной литературе формула (2) выводится так:

$$a_2 = a_1 + d \quad ; \quad a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d \quad ; \quad \ldots \quad ;$$

$$a_n = a_{n-1} + d = a_{n-2} + 2d = \ \ldots \ = a_1 + (n-1)d \ .$$

Замечание. Формула для a_n может быть доказана по методу математической индукции. Об этом см. ниже, в конце раздела "Алгебра".

При выводе формулы для S_n обратить внимание на доказательство промежуточного факта:

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n \ , \quad k = 2, 3, \ldots, n-1 \ , \tag{4}$$

который очень легко устанавливается на основе формулы общего члена (2).

Представим S_n следующими двумя способами:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \ ,$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 \ .$$

Складывая эти два равенства и применяя (4), получим

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) =$$

$$= n(a_1 + a_n), \quad \Rightarrow \quad (3).$$

Вопрос. Доказать, что последовательность $\{a_n\}$ является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда

$$\forall \ n \in N, \ n \geqslant 2 \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \ .$$

Вопрос 12. Формулы общего члена и суммы n первых членов геометрической прогрессии

(Определение последовательности см. в вопросе 11).

Определение. Последовательность $\{b_n\}$ называется *геометрической прогрессией*, (обозначается $\div$) если существует число q, называемое *знаменателем* прогрессии, что для любого номера n

$$b_{n+1} = b_n \cdot q \ . \tag{5}$$

Замечание. В ряде учебников и пособий требуется, чтобы

$$b_1 \neq 0 \ \text{ и } \ q \neq 0 \ .$$

Формулы общего члена

$$\forall n \in N, \ n \geqslant 2 \quad b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \tag{6}$$

(если $q \neq 0$, то формула (6) верна и для $n = 1$).

$$S_n \stackrel{df}{=} b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

— сумма n-первых членов геометрической прогрессии. Формула для S_n

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \ \text{если} \ \ q \neq 1 \ , \tag{7}$$

$$S_n = nb_1, \quad \text{если} \quad q = 1 \ .$$

В учебной литературе формула (6) выводится так:

$$b_2 = b_1 \cdot q \quad ; \quad b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q^2 \quad ; \quad \ldots \quad ;$$

$$b_n = b_{n-1} \cdot q = b_{n-2} \cdot q^2 = \ \ldots \ = b_1 \cdot q^{n-1} \ .$$

Замечание. Формула для b_n может быть доказана по методу математической индукции. Об этом см. ниже, в конце раздела "Алгебра".

При выводе формулы для S_n воспользуемся (5) и запишем выражения для qS_n и S_n

$$qS_n = b_2 + b_3 + \ldots + b_n + b_{n+1} \ ,$$

$$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n \ .$$

Вычитая из первого из этих выражений второе, применяя формулу (6), будем иметь

$$(q-1)S_n = b_{n+1} - b_1 = b_1 q^n - b_1 = b_1(q^n - 1) \ ,$$

откуда при $q \neq 1$ и получается формула (7);

если же $q = 1$, то очевидно, что все члены геометрической прогрессии равны b_1, а потому и $S_n = nb_1$.

Вопрос. Доказать, что последовательность $\{b_n\}$ является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда

$\forall\, n \in N,\ n \geqslant 2 \quad {b_n}^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

Вопрос 13. Основное логарифмическое тождество. Логарифмы произведения, степени, частного. Формула перехода к новому основанию

Определение: Пусть $0 < a \neq 1, b > 0$.

Число $\alpha \overset{df}{=} \log_a b$ *(логарифм числа b по основанию числа a)*, если $a^\alpha = b$.

Существование этого числа принимается в школьном курсе без доказательства, единственность следует из строгой монотонности функции $y = a^x$ при $a > 0, \quad a \neq 1$.

В силу того, что, в частности, при любом действительном a таком, что $0 < a \neq 1 \quad a^0 = 1, \ a^1 = a$ из определения логарифма вытекает

$$\forall a \in R \ : \quad 0 < a \neq 1 \quad \log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1 \ .$$

1. $a^{\log_a b} = b$ — основное логарифмическое тождество

   (при $0 < a \neq 1, \quad b > 0$)

   $1 \ \Rightarrow$ из определения логарифма;

2. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c, \quad 0 < a \neq 1, \quad b > 0, \quad c > 0$;

3. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c, \quad 0 < a \neq 1, \quad b > 0, \quad c > 0;$

4. $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b, \quad 0 < a \neq 1, \quad b > 0, \quad \alpha \in R;$

(2 — 4 - логарифмы произведения, частного, степени)

5. формула перехода к другому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ в частности, при } c = b \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$0 < a \neq 1, \quad 0 < c \neq 1, \quad b > 0$.

Свойства 2 — 4 доказываются на основе основного логарифмического тождества 1 , утверждения о том, что при любом действительном $a > 0$ и $a \neq 1$

$$a^x = a^y \quad \Leftrightarrow \quad x = y \ ,$$

вытекающем из свойства монотонности показательной функции (см. Вопрос 14) и свойств степеней

$$a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta \ ,$$

$$a^{\alpha-\beta} = a^\alpha : a^\beta \ ,$$

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta} \ ,$$

справедливых для любых α и $\beta \in R$
(они в школьном курсе не доказываются), следующим образом :

$$a^{\log_a bc} = bc = a^{\log_a b} a^{\log_a c} =$$

$$= a^{\log_a b + \log_a c} \quad \Rightarrow \quad 2. \ ;$$

$$a^{\log_a b:c} = b : c = a^{\log_a b} : a^{\log_a c} =$$

$$= a^{\log_a b - \log_a c} \quad \Rightarrow \quad 3. \ ;$$

$$a^{\log_a b^\alpha} = b^\alpha = (a^{\log_a b})^\alpha =$$

$$= a^{\alpha \log_a b} \quad \Rightarrow \quad 4.$$

Свойство 5 вытекает из свойств 1 и 4 следующим образом

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c (a^{\log_a b}) = \log_c b \quad \Rightarrow \quad 5.$$

Пусть $b < 0, c < 0$. Что можно сказать о свойствах 2, 3 и 4 ?

2. $\log_a bc = \log_a |b| + \log_a |c|$;

3. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|$;

если в 4. $\alpha = 2k$ — четное, то

$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a |b|$, $0 < a \neq 1$, $b \neq 0$.

Почему в определении $\log_a b$ $0 < a \neq 1$ и $b > 0$?

Поскольку $\forall\, \alpha \in R$ число a^α определено лишь для $a > 0$ и $a^\alpha > 0$;

$\log_1 b$ не определен при любом $b \neq 1$, так как $\forall \alpha \in R$ $1^\alpha = 1 \Rightarrow 1^\alpha \neq b$;

$\log_1 1$ считается не определенным потому, что так как $1^\alpha = 1$ при любом $\alpha \in R$, то по формальному определению логарифма $\log_1 1$ может быть любым действительным числом.

Вопрос 14. Свойства показательной функции и ее график

О понятии степени см. вопрос 8.

Определение 1. Пусть $a > 1$, α — произвольные действительные числа, r_1 и r_2 — произвольные рациональные числа такие, что $r_1 \leqslant \alpha \leqslant r_2$, тогда $a^\alpha \overset{df}{=} b$, если $a^{r_1} \leqslant b \leqslant a^{r_2}$ для любых указанных выше r_1 , $r_2 \in Q$.

Если $0 < a < 1$, то $a^\alpha \overset{df}{=} b$, если $a^{r_2} \leqslant b \leqslant a^{r_1}$ для любых указанных выше $r_1, r_2 \in Q$.

Если $a = 1$, то для любого $\alpha \in R$ $a^\alpha = 1$; если $a = 0$, то для $\forall \alpha > 0$ $(\alpha \in R)$ $a^\alpha = 0$,* a^α не определено $\forall \alpha \leqslant 0$ $(\alpha \in R)$.

Определение 2. Функция вида $y = a^x$ называется *показательной* функцией, $a \geqslant 0$ — постоянное число, x — переменное (аргумент). В школьном курсе без доказательства принимается существование и единственность числа $b = a^\alpha$ $\forall a$ и $\alpha \in R$, $a > 0$.

I. Отсюда область определения функции a^x при $a > 0$ — любое $x \in R$, а при $a = 0$ — любое $x \in R$, где $x > 0$.

Случаи $a = 1$ и $a = 0$ (см. по этому поводу сноску) достаточно тривиальны и подробно рассматриваться не будут.

II. В школьном курсе без доказательства принимается, что для любого $b > 0$ существует и единственное $\alpha : a^\alpha = b$, где $0 < a \neq 1$. Поэтому из определения 1 степени и (см. ниже п. VI) вытекает, что область изменения функции $y = a^x$ — $(0, +\infty)$.

III. $\max a^\alpha$ и $\min a^\alpha$ нет.

Мы докажем от противного второе утверждение:

$$\nexists \min_{x \in R} a^x \ .$$

---

* Такое определение приводится в учебниках по математическому анализу, связано это с тем, что при любом действительном $\alpha > 0$ функция x^α стремится к нулю при стремлении справа к нулю аргумента x, однако в школьном курсе математики случай $a = 0$ не рассматривается.

Предположим, что $\exists x_0 \in R:\ a^{x_0} = \epsilon_0 > 0$ и

$$\forall x \in R \Rightarrow a^x \geqslant \epsilon_0 > 0\ ,$$

тогда $\epsilon_0 \overset{df}{=} \min\limits_{x \in R} a^x$, но так как $E[a^x]$ — $(0, +\infty)$, то, в частности

$$\exists \tilde{x}_0 \in R : a^{\tilde{x}_0} = \frac{\epsilon_0}{2} < \epsilon_0 \left(0 < \frac{\epsilon_0}{2}\right)\ ,$$

пришли к противоречию, аналогично доказывается первое утверждение:

$$\nexists \max_{x \in R} a^x\ .$$

IV. $y = a^x$ не является четной в силу строгой монотонности на $(-\infty, +\infty)$ (см. п.VII), из которой вытекает: $\forall x \neq 0\ \ y(-x) \neq y(x)$,

она же не является нечетной, так как принимает только положительные значения, откуда $\forall x \in R$ равенство $y(-x) = -y(x)$ невозможно.

V. $y = a^x$ не является периодической. Предполжим, что $\exists T_0 \neq 0$, что $\forall x \in R \Rightarrow a^{x+T_0} = a^x$. Тогда в силу не обращения в 0 значений показательной функции (это вытекает из результатов п. VI) и свойства степеней получаем $a^{x+T_0} = a^x \Leftrightarrow a^x \cdot a^{T_0} = a^x \Leftrightarrow a^{T_0} = 1$, в силу строгой монотонности показательной функции (см. п. VII) $a^{T_0} = 1 \Leftrightarrow T_0 = 0$, пришли к противоречию.

VI. Так как при $a > 1$ и $r \in Q\ \ a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} > 0$, то, следовательно, $b = a^\alpha \geqslant a^r > 0$, где $r \leqslant \alpha, r \in Q$, поэтому нулей нет и $a^x > 0$ на $(-\infty, +\infty)$;

аналогичные результат и обоснование — для $0 < a < 1$.

VII. Возрастание функции $y = a^x$ при $a > 1$ и ее убывание при $0 < a < 1$ сначала докажем на множестве рациональных чисел, то есть $\forall r_1, r_2 \in Q$, $r_2 > r_1$, $\forall a > 1\ (0 < a < 1) \ \Rightarrow\ a^{r_2} > a^{r_1}\ (a^{r_2} < a^{r_1})$.

Фиксируем произвольные рациональные числа $r_2 > r_1$. В силу доказанных свойств степеней с рациональными показателями $a^{r_2} - a^{r_1} = a^{r_1}(a^{r_2 - r_1} - 1)$. Так как $a^{r_1} > 0$ и $r_2 - r_1 > 0$, то достаточно доказать, что

$$\forall r > 0,\ \ r \in Q,\ \ \forall\, a > 1\ (0 < a < 1)\ \ \ a^r > 1\ (0 < a^r < 1)\ .$$

При доказательстве этих фактов будем использовать непосредственно вытекающие из свойства 10. числовых неравенств следующие два вспомогательных утверждения.

Утверждение 1. $\forall\, n \in N,\ a \in R,\ a > 1 \ \Leftrightarrow\ a^n > 1^n = 1$.

Утверждение 2. $\forall\, n \in N,\ a \in R,\ 0 < a < 1 \ \Leftrightarrow\ 0 = 0^n < a^n < 1^n = 1$.

Пусть $r > 0,\ r \in Q$, тогда

$$r = \frac{m}{n},\ m,\ n\ \in N, \quad a^r = \sqrt[n]{a^m}\ .$$

В силу утверждений 1 и 2 и определения корня n-ой степени из того, что

$$a > 1\ (0 < a < 1) \Rightarrow a^m > 1\ (0 < a^m < 1) \Rightarrow (\sqrt[n]{a^m})^n = a^m > 1$$

$$(0 < (\sqrt[n]{a^m})^n = a^m < 1) \Rightarrow a^r = \sqrt[n]{a^m} > 1\ (0 < a^r = \sqrt[n]{a^m} < 1)\ .$$

Тем самым возрастание (убывание) функции $y = a^x$ при $a > 1\ (0 < a < 1)$ на множестве рациональных чисел доказано.

Для доказательства соответствующих утверждений на множестве действительных чисел нам потребуется доказать еще одно вспомогательное утверждение.

Утверждение 3. $\forall a, b, \in R$ и $a < b$ $\exists x \in Q$ такое, что $a < x < b$.

Доказательство. Случай $a < 0$ и $b > 0$ тривиален: в качестве числа x можно взять $x = 0$.

Пусть $0 \leqslant a < b$. Представим числа a и b в виде бесконечных десятичных дробей

$$a = a_0, a_1 a_2 a_3 ... a_n ... \ , \quad b = b_0, b_1 b_2 b_3 ... b_n ... \ .$$

Замечание. При этом, не ограничивая общности, можно считать, что среди рассматриваемых бесконечных десятичных дробей отсутствуют дроби с периодом 9.

Согласно правилу сравнения бесконечных десятичных дробей, так как $0 \leqslant a < b$, то либо $a_0 < b_0$, либо

$$\exists\ k \in N: \quad a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots,\ a_{k-1} = b_{k-1},\ a_k < b_k\ .$$

В то же время в силу замечания обязательно существует $p \in N: p > k$, что $a_p < 9$, а потому число

$$x = a_0, a_1 a_2 ... a_k a_{k+1} ... (a_p + 1)000...0... \in Q$$

и будет удовлетворять неравенствам $a < x < b$.

Случай $a < b \leqslant 0$ легко сводится к только что рассмотренному следующим образом:

$$a < b \leqslant 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant -b < -a, \Leftrightarrow \exists\ \tilde{x} \in Q:$$

$$-b < \tilde{x} < -a \Rightarrow \exists\ x = -\tilde{x} \in Q:\ a < x < b$$

Утверждение 3 полностью доказано.

Фиксируем произвольные $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in R$, тогда в силу утверждения 3 существует рациональное число x такое, что $x_1 < x < x_2$, а так как при этом $x \in R$, то существует также рациональное число x' такое, что $x < x' < x_2$.

Таким образом, $\forall\ x_1, x_2 \in R\ :\ x_1 < x_2$ $\exists\ x$ и $x' \in Q$ такие, что $x_1 < x < x' < x_2$.

По определению a^x и доказанному возрастанию (убыванию) показательной функции на множестве рациональных чисел при $a > 1\ (0 < a < 1)$ имеем:

$$a^{x_1} \leqslant a^x < a^{x'} \leqslant a^{x_2} \quad \Rightarrow \quad a^{x_1} < a^{x_2} ,$$
$$(a^{x_1} \geqslant a^x > a^{x'} \geqslant a^{x_2} \quad \Rightarrow \quad a^{x_2} < a^{x_1}) ,$$

что и означает возрастание (убывание) функции $y = a^x$ на всей своей области определения, которая есть множество всех действительных чисел.

VIII. Графики

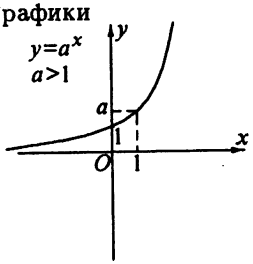


рис. 3 а)

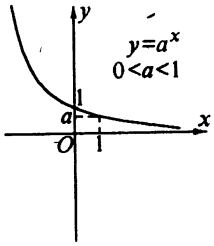


рис. 3 б)

При $x \to +\infty$, $a^x \to +\infty$ $(a^x \to 0+0)$, если $a > 1$ $(0 < a < 1)$,
при $x \to -\infty$, $a^x \to 0+0$ $(a^x \to +\infty)$, если $a > 1$ $(0 < a < 1)$.
(знаний формулировок соответствующих определений не требуется).

Вопрос 15. Свойства логарифмической функции и ее график

Определение. Функция вида $y = \log_a x$, где $0 < a \neq 1$ — постоянное число, а x — переменное (аргумент), называется *логарифмической* функцией.

I. $D[\log_a x]$ — $(0, +\infty)$, так как $\forall x > 0$ и $\forall a: \ 0 < a \neq 1$
$\exists!\ y: \ a^y = x$, а по определению логарифма $y = \log_a x$.
(см. Вопрос 13).

II. $E[\log_a x]$ — $(-\infty, +\infty)$, так как $\forall y \in R$ определено однозначно

$$x = a^y \ \Leftrightarrow \ \log_a x = y \ .$$

III. Нет *max* и нет *min* (это вытекает из II).

IV. Нет четности и нечетности, так как $D[\log_a x]$ не симметрична относительно начала координат.

V. Нет периодичности, так как из приведенного определения периодичности функции вытекает, что у периодической функции область определения не имеет ограниченности ни сверху, ни снизу, а у логарифмической функции она ограничена снизу числом 0 .

VI. $\log_a x = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 1$ (так как $a^0 = 1$);
при $a > 1$ $\log_a x > 0$ на $(1, +\infty)$, $\log_a x < 0$ на $(0, 1)$
(вытекает из возрастания $y = \log_a x$) ;
при $0 < a < 1$ $\log_a x < 0$ на $(1, +\infty)$, $\log_a x > 0$ на $(0, 1)$
(вытекает из убывания $y = \log_a x$).

VII. Пусть $a > 1$, $x_2 > x_1 > 0$, $y_1 = \log_a x_1$, $y_2 = \log_a x_2$, при этом $a^{y_1} = a^{\log_a x_1} = x_1 < x_2 = a^{\log_a x_2} = a^{y_2}$,

в силу возрастания функции a^x следует $y_1 < y_2$, следовательно, $\log_a x_1 < \log_a x_2$, а потому при $a > 1$ логарифмическая функция возрастает;

пусть $0 < a < 1$, $x_2 > x_1 > 0$, так как $y_1 = \log_a x_1$, $y_2 = \log_a x_2$, то $a^{y_1} = a^{\log_a x_1} = x_1 < x_2 = a^{\log_a x_2} = a^{y_2}$,

так как функция a^x убывает, то $y_1 > y_2$, следовательно, $\log_a x_2 < \log_a x_1$, а потому при $0 < a < 1$ логарифмическая функция убывает.

VIII. Графики

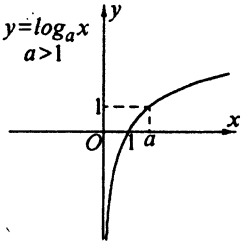


рис. 4 а)

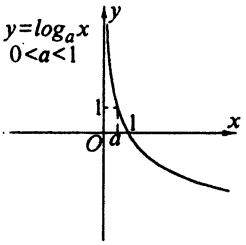


рис. 4 б)

Если $a > 1$, то при $x \to +\infty$ $(x \to 0+0)$ $\log_a x \to +\infty$ $(\log_a x \to -\infty)$,
если $0 < a < 1$, то при $x \to +\infty$ $(x \to 0+0)$ $\log_a x \to -\infty$ $(\log_a x \to +\infty)$
(знаний формулировок соответствующих определений не требуется).

Вопрос 16. Свойства степенной функции с целым показателем и ее график

Определение. Функция вида $y = f(x) = x^n$, где $x \in R$ — переменная, $n \in Z$ — постоянное число, называется ***степенной функцией с целым показателем.***

$n = 1$ это частный случай линейной функции, а $n = 2$ — частный случай квадратичной функции. При $n = 0$ $\forall x \neq 0$ $f(x) = 1$, $f(0)$ не определено.

1. Случай $n \geqslant 3$.

I. $D[x^n]$ — $(-\infty, +\infty)$, так как $\forall x \in R$ однозначно определено число x^n, как произведение n чисел, каждое из которых равно x.

II. $E[x^n]$ — $(-\infty, +\infty)$, если $n = 2k-1$, $k \geqslant 2$, $k \in N$;
$E[x^n]$ — $[0, +\infty)$, если $n = 2k$, $k \geqslant 2$, $k \in N$.

Доказательство. $\forall n \in N$; $\forall\, y_0 \geqslant 0$ существует единственное число $x_0 \geqslant 0$: $x_0 = \sqrt[n]{y_0}$, ${x_0}^n = y_0$;

в то же время при $n = 2k$ из свойств операции умножения действительных чисел следует, что $\forall x \in R \quad x^n = x^{2k} \geqslant 0$;

при $n = 2k-1$ $\forall\, y_0 < 0$ существует $x_0 = -\sqrt[n]{|y_0|}$:

$$x_0^n = x_0^{2k-1} = (-\sqrt[n]{|y_0|})^n = (-1)^{2k-1}|y_0| = -|y_0| = y_0 .$$

III. Если $n = 2k$, то существует $\min\limits_{x \in R} f(x) = f(0) = 0$, так как $\forall x \in R$ $x^n \geqslant 0$, не существует $\max\limits_{x \in R} f(x)$, что легко доказывается от противного на основе результатов п. II; если же $n = 2k-1$, то из п. II вытекает (также от противного) отсутствие наибольшего и наименьшего значений у функции $y = x^n$ на всей ее области определения.

IV. $D[x^n]$ — R симметрична относительно точки $x_0 = 0$. Если $n = 2k$, то $\forall x \in R \quad (-x)^n = (-1)^n \cdot x^n = x^n$, то есть $\forall x \in R$, $f(-x) = f(x)$, следовательно, функция четная.

Если же $n = 2k-1$, то $\forall x \in R \quad (-x)^n = (-1)^n \cdot x^n = -x^n$, то есть $\forall x \in R$, $f(-x) = -f(x)$, следовательно, функция нечетная.

V. $\forall n \in N$ функция $y = x^n$ не периодическая. Предполагая существование числа $T \neq 0$ такого, что $\forall x \in R \Rightarrow (x+T)^n = x^n$, полагая $x = 0$, получим, что $T^n = 0$, а в силу результатов п. VI, будет следовать, что $T = 0$, пришли к противоречию.

VI. Из свойств операции умножения действительных чисел вытекает: если $n = 2k$, то $f(x) = x^n > 0$ на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$; а если $n = 2k-1$, то $f(x) = x^n > 0$ на интервале $(0, +\infty)$ и $f(x) = x^n < 0$ на интервале $(-\infty, 0)$. Так как $\forall n \in N$ при $x = 0 \quad x^n = 0$, то $x_0 = 0$ — единственный нуль функции.

VII. Пусть x_1, x_2 — произвольные из R числа, удовлетворяющие неравенствам $x_2 > x_1 \geqslant 0$, тогда $\forall n \in N$ в силу свойств числовых неравенств вытекает ${x_2}^n > {x_1}^n$, следовательно, функция $y = x^n$ возрастает на промежутке $[0, +\infty)$.

Пусть теперь x_1, x_2 — произвольные из R числа, удовлетворяющие неравенствам $-x_1 < -x_2 \leqslant 0 \iff 0 \leqslant x_2 < x_1$, тогда при $n = 2k$ в силу четности функции и свойств неравенств $(-x_1)^n = x_1^n > x_2^n = (-x_2)^n$, следовательно, функция $y = x^n$ убывает на промежутке $(-\infty, 0]$;

при $n = 2k-1$ в силу нечетности функции и свойств неравенств $(-x_1)^n = -x_1^n < -x_2^n = (-x_2)^n$, следовательно, функция $y = x^n$ возрастает на промежутке $(-\infty, 0]$, а так как она возрастает и на промежутке $[0, +\infty)$,

то она будет возрастающей и на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$.

VIII. Графики функций

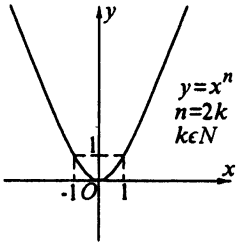


рис. 5 а)

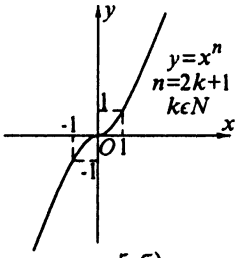


рис. 5 б)

O(0 ; 0) - точка пересечения графика функции $y = x^n$ с осями Ox и Oy.

2. Случай $n \leqslant -1$

Положим $n = -m$, где уже $m \in N$.

I. $D[x^n] = D[x^{-m}]$ — $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, так как $\forall x \neq 0 \quad x^m \neq 0$, а потому $x^n = x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}$ определено, но при $x = 0 \quad x^m = 0$, поэтому $x^n = 1/x^m$ не определено.

II. $E[x^n] = E[x^{-m}] - (0, +\infty)$, если $n = -2k$, $k \in N$; $E[x^n] = E[x^{-m}] - (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, если $n = -(2k-1)$, $k \in N$. Этот случай доказывается аналогично случаю натурального значения n, отметим только, что так как $\forall x \neq 0 \quad 1/x^m \neq 0$, а потому $y_0 = 0 \notin E[x^n]$

III. Таким же образом, как и в случае натурального n из п. II вытекает несуществование $\min\limits_{x \in D[f]} f(x)$ при $n = -(2k-1)$ и $\max\limits_{x \in D[f]} f(x)$ при любом $n \leqslant -1$. Подробнее остановимся на доказательстве несуществования $\min\limits_{x \in D[f]} f(x)$ при $n = -2k$. Если предположить его существование, то он будет равен некоторому числу $m_0 > 0$. А согласно результатам п.II, в частности, для числа $m_0/2$ существует $x_0' \ : \ f(x_0') = m_0/2 < m_0$, пришли к противоречию.

IV. Это свойство полностью аналогично и так же обосновывается, как и в случае $n \in N$.

V. Непериодичность функции вытекает из того, что число $x = 0 \notin D[x^n]$, поэтому, предполагая наличие периода $T \neq 0$ у этой функции, мы получим существование, например, числа $x = -T \in D[x^n]$, но число $x + T = 0 \notin D[x^n]$, тем самым, получим противоречие с определением периодической функции.

VI. Из п.II вытекает, что нулей функция не имеет, а интервалы знакопостоянства у нее такие же (в зависимости от четности или нечетности n), что и в случае натурального показателя n.

VII. Функция $y = x^n$ убывает на промежутке $(0, +\infty)$ при любом $n \leqslant -1$, а также она убывает на промежутке $(-\infty, 0)$ при $n = -(2k-1)$ и возрастает на этом промежутке при $n = -2k$.

Для доказательства фиксируем произвольные $x_2 > x_1 > 0$, так как при этом ${x_2}^m > {x_1}^m > 0$, то в силу свойств числовых неравенств

$$ {x_2}^n = {x_2}^{-m} = \frac{1}{x_2^m} < \frac{1}{x_1^m} = {x_1}^{-m} = {x_1}^n \ . $$

Далее, рассматривая произвольные числа, обозначаемые за $-x_1$ и $-x_2$, где $-x_1 < -x_2 < 0 \iff 0 < x_2 < x_1$, совершенно аналогично случаю натурального показателя n на основе четности или нечетности функции $y = x^n$ и свойств числовых неравенств доказывается, что $(-x_1)^n < (-x_2)^n$ при $n = -2k$ и $(-x_1)^n > (-x_2)^n$ при $n = -(2k-1)$.

Замечание. Необходимо отметить, что при $n = -(2k-1)$ убывания функции $y = x^n$ на *объединении промежутков* $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ нет! Если к примеру $x_2 > 0 > x_1$, то есть $x_2 > x_1$, то также и ${x_2}^n > 0 > {x_1}^n$, то есть ${x_2}^n > {x_1}^n$.

VIII. Графики функций

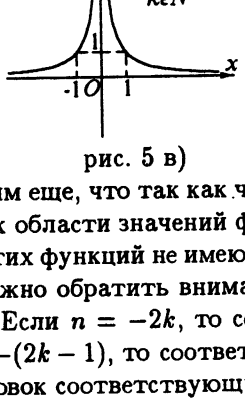


рис. 5 в)

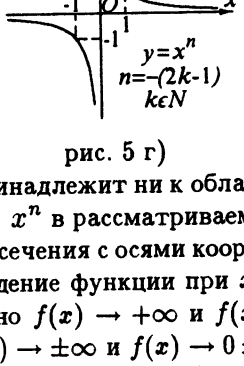


рис. 5 г)

Отметим еще, что так как число 0 не принадлежит ни к области определения, ни к области значений функции $y = x^n$ в рассматриваемом случае, графики этих функций не имеют точек пересечения с осями координат. При $n \leqslant -1$ можно обратить внимание на поведение функции при $x \to 0 \pm 0$ и $x \to \pm\infty$. Если $n = -2k$, то соответственно $f(x) \to +\infty$ и $f(x) \to 0 + 0$. Если $n = -(2k-1)$, то соответственно $f(x) \to \pm\infty$ и $f(x) \to 0 \pm 0$ (знаний формулировок соответствующих определений не требуется).

Замечание. В учебной литературе по определению кривые, являющиеся графиками функций $y = x^n$ при $n = 2$ и $n = -1$, называются соответственно *параболой* и *гиперболой*.

О методе математической индукции (дополнение к вопросам 11 и 12)

Формулировка метода. Предположим, что имеется некоторое утверждение $Q(n)$, сформулированное применительно к натуральному (или

целому) числу n. Пусть это утверждение справедливо для числа $n = 1$ (или $n = n_0$, $n_0 \in Z$) и каково бы ни было натуральное число k (целое число $k \geqslant n_0$), предполагая справедливость утверждения $Q(n)$ для $n = k$, можно доказать справедливость $Q(n)$ для $n = k + 1$. Тогда $Q(n)$ справедливо для любого натурального числа n (любого целого числа $n \geqslant n_0$).*

Для случая $n_0 = 1$ метод непосредственно вытекает из аксиомы Пеано натуральных чисел. Для случая произвольного $n_0 \in Z$ метод следует из некоторых теорем, справедливых для множества целых чисел (см. [4] и [3]).

Для доказательства справедливости утверждения $Q(n)$ с помощью метода математической индукции необходимо:

1) проверить справедливость $Q(n)$ для $n = 1$ ($n = n_0$) — базис индукции;

2) предположить справедливость $Q(n)$ для некоторого произвольного целого числа $k \geqslant 1$ ($k \geqslant n_0$) ;

3) на основе этого предположения и, быть может, и 1) доказать справедливость утверждения $Q(n)$ для числа $n = k + 1$ — индукционный шаг.

С помощью метода математической индукции докажем справедливость формул общего члена арифметической и геометрической прогрессий.

$\forall\, n \in N \quad a_n = a_1 + d(n-1)$; $\forall\, n \in N,\ n \geqslant 2 \quad b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

(для геометрической прогрессии будет применена формулировка метода при $n_0 = 2$, так как не исключается случай $q = 0$, однако при $q \neq 0$ формула ее общего члена также справедлива для любого натурального n).

Доказательства. 1. Пусть $n = 1$ ($n = n_0 = 2$), тогда так как $a_1 = a_1 + 0 = a_1 + d \cdot 0 = a_1 + d(1-1)$ (по определению $b_2 = b_1 \cdot q = b_1 \cdot q^{2-1}$), то для этих случаев формулы общего члена верны.

2. Предположим, что при некотором произвольном натуральном числе k ($k \geqslant 2$) имеет место равенство $a_k = a_1 + d(k-1)$ ($b_k = b_1 \cdot q^{k-1}$).

3. Докажем, что и при $n = k + 1$ $a_{k+1} = a_1 + d[(k+1) - 1]$ ($b_{k+1} = b_1 \cdot q^{[(k+1)-1]}$) .

Используя определение арифметической (геометрической) прогрессии и предположение индукции, а также одно из свойств степеней, мы получим:

$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + d(k-1) + d = a_1 + dk = a_1 + d[(k+1) - 1]$

$(b_{k+1} = b_k \cdot q = b_1 \cdot q^{k-1} \cdot q = b_1 \cdot q^{(k-1)+1} = b_1 \cdot q^k = b_1 \cdot q^{[(k+1)-1]})$,

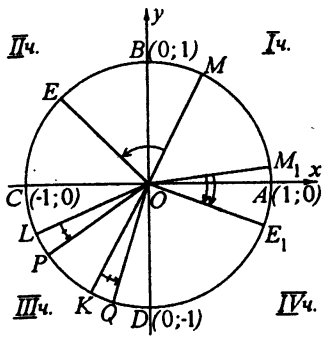
что и требовалось доказать.

Замечание. Если $q \neq 0$, то формула общего члена геометрической прогрессии будет верна и для $n = 1$, так как $b_1 = b_1 \cdot 1 = b_1 \cdot q^0 = b_1 \cdot q^{1-1}$.

Материал к вопросам алгебры 1—9, 13—16 в более подробном изложении см. в [1] и [3], а к вопросам 10—12 в [1].

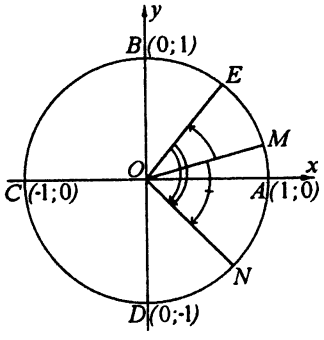
---

* Подробнее об этом методе см. [3], гл. 2, §1 .



$\angle(OL;OP) = \angle(OK;OQ)$

рис. 1 а)



$\angle MON = \\ = \angle(OM;ON) = \angle(OM;OE) + \angle(OE;ON)$

рис. 1 б)

Перед рассмотрением вопросов тригонометрии следует напомнить об измерении углов с вершинами в начале координат, стороны такого угла будут пересекать окружность с центром в начале координат в некоторых точках M и E , поэтому его можно обозначить

$$\angle(OM;OE) \quad \text{или} \quad \angle MOE\,.$$

При этом имеет значение порядок лучей, образующих этот угол, OM и OE.

$\angle(OM;OE)$ можно описать (не определить!) как получающийся в результате вращения вокруг начала координат луча с началом в точке O от положения OM — начального до положения OE — конечного. Это вращение может происходить или против часовой стрелки (в этом случае можно сказать, что угол *ориентирован против часовой стрелки*) или по часовой стрелке (в этом случае можно сказать, что угол *ориентирован по часовой стрелке)* см. рис. 1 а), б), причем:

а) либо на неполный оборот,

б) либо на целое число полных оборотов, в частности, движения может и не происходить (в этих случаях точки M и E совпадают, когда движения не происходит угол называют *нулевым*, его ориентация считается неопределенной),

в) либо на целое число полных оборотов и неполный оборот.

Будем считать первичным (основным) понятие *равных* углов, которое можно описать так: если при совмещении каким либо образом их начальных лучей совместятся и конечные лучи, причем движение от начального

луча к конечному осуществляется в одну и ту же сторону (то есть либо у обоих углов против часовой стрелки, либо у обоих углов по часовой стрелке) на одно и то же количество полных и неполных оборотов вокруг точки O . Нулевые углы считаются равными.

Суммой двух углов называется угол, у которого начальный луч совпадает с начальным лучом первого слагаемого угла, а конечный луч совпадает с конечным лучом второго слагаемого угла, при этом предполагается, что данные углы приведены в такое положение (то есть, если необходимо, то они заменены на равные себе), что конечный луч первого слагаемого угла совпадает с начальным лучом второго слагаемого угла.

См. на рис. 1 а) и 1 б) иллюстрацию равных углов и суммы углов.

Величиной или *мерой* угла ($\angle MOE$) называется поставленное ему в соответствие действительное число, обозначаемое $\angle MOE$ или $\widehat{MOE}$, удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам):

1) существует угол, мера которого равна 1 (единице) — единица измерения углов ;

2) равные углы имеют равные меры ;

3) мера суммы двух углов равна сумме мер углов ;

4) мера нулевого угла равна нулю .

Исходя из условий 3) и 4), если сумма двух углов равна нулевому углу (а это возникает, если второй из этих углов получается из первого в результате перемены мест начального и конечного лучей), то меры этих углов будут равны по абсолютной величине и различаться лишь знаком (при условии, что каждый из этих углов ненулевой). Очевидно, что эти углы будут иметь противоположную друг другу ориентацию: один — против часовой стрелки, другой — по часовой стрелке.

Меры углов, ориентированных против часовой стрелки (по часовой стрелке), считаются положительными (отрицательными).

Наиболее распространенные меры углов — градусная и радианная. Единицей измерения углов в градусной мере является угол величины в один градус — $1/90$ часть прямого угла, а единицей измерения углов в радианной мере является угол величины в один радиан — это такой центральный угол, который опирается на дугу (или стягивает дугу) окружности, по длине равной ее радиусу.

Приведем формулы зависимости между градусной и радианной мерами угла, обозначая μ° и μ_r соответственно градусную и радианную меры,

$$\mu^\circ = \frac{\mu_r}{\pi} 180^\circ \ ; \ \mu_r = \frac{\mu^\circ}{180^\circ} \pi \ ;$$

Всюду в дальнейшем будет в основном использоваться радианная мера угла, которую в виду ее тесной связи с длиной дуги окружности можно отождествлять с числовой мерой угла (или просто с числом).

Ниже будет доказано, что в качестве окружности с центром в начале координат можно будет брать окружность единичного радиуса. Пока мы будем рассматривать окружность с центром в начале координат радиуса $R > 0$, обозначая точки ее пересечения с координатными осями

$$A(R;0)\ ,\ B(0;R)\ ,\ C(-R;0)\ ,\ D(0;-R)\ .$$

В качестве начального луча у рассматриваемых углов будет браться луч OA .

Координатные оси абсцисс и ординат взаимно перпендикулярны и разбивают координатную плоскость на четыре координатные четверти:

I четверть, II четверть, III четверть, IV четверть (см. рис. 1 а).

Будем говорить, что $\angle AOM$ или $\angle(OA;OM)$ оканчивается в данной четверти или на данной координатной оси или полуоси, если луч OM соответственно расположен в этой четверти, или на указанной координатной оси, или совпадает с указанной координатной полуосью.

В школьном курсе без доказательства принимаются факты: взаимно однозначного соответствия между действительными числами из полуинтервала $[0,4\omega)$ и точками окружности с центром в начале координат радиуса $R > 0$., число $\omega > 0$ — мера прямого угла, ориентированного против часовой стрелки (если берется радианная мера угла, то $\omega = \pi/2$, а если — градусная мера, то $\omega = 90°$) , $\quad \alpha_0 \longleftrightarrow M$ — $M(x;y)$, $0 \leqslant \alpha < 4\omega$, а уже точке M соответствует бесконечно много углов $\angle AOM$, меры которых имеют вид $4\omega k + \alpha_0$, $k = 0\ ;\ \pm1\ ;\ \pm2\ ;\ \ldots$ (α_0 — однозначно определенное по точке M число $\in [0,4\omega)$), и только таких углов.

На основе этих фактов и из соотношений между углами и их мерами, которые изучаются в курсе элементарной геометрии, вытекают следующие диапазоны изменения *радианных* мер углов α :

оканчивающихся в I четверти $2n\pi < \alpha < \pi/2 + 2n\pi$;
оканчивающихся во II четверти $\pi/2 + 2n\pi < \alpha < \pi + 2n\pi$;
оканчивающихся в III четверти $-\pi + 2n\pi < \alpha < -\pi/2 + 2n\pi$;
оканчивающихся в IV четверти $-\pi/2 + 2n\pi < \alpha < 2n\pi$;
оканчивающихся на полуоси OA $2n\pi$;
оканчивающихся на полуоси OB $\pi/2 + 2n\pi$;
оканчивающихся на полуоси OC $\pi + 2n\pi$;
оканчивающихся на полуоси OD $-\pi/2 + 2n\pi$;
оканчивающихся на оси абсцисс $n\pi$;
оканчивающихся на оси ординат $\pi/2 + n\pi$;
везде $n = 0\ ;\ \pm1\ ;\ \pm2\ ;\ \ldots$.

Докажем несколько важных утверждений, касающихся свойств периодических функций. На их основе дается строгое обоснование множеств решений простейших тригонометрических уравнений и в значительной мере упрощается исследование промежутков строгой монотонности тригонометрических функций. Также устанавливаются множества всех периодов периодической функции и их основные периоды.

Пусть $X \subseteq D[f]$ и множество $X + a$ представляет собой множество чисел, равных $x + a$, где x — произвольное число из множества X, a — фиксированное действительное число.

Если область определения функции представляет собой объединение множеств

$$X \cup X + a \cup X - a \cup X + 2a \cup X - 2a \cup \dots ,$$

то символически это можно записать следующим образом:

$$D[f] = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} X + na = \bigcup_{n \in Z} X + na .$$

Пусть множество X представляет собой или отрезок $[c, d]$, или один из полуинтервалов $[c, d)$ или $(c, d]$, или интервал (c, d), причем каждое из чисел c и d конечно.

Если функция $f(x)$ является периодической с периодом $T = d - c$, и определена на множестве X, то она будет определена и на множестве

$$\bigcup_{n \in Z} X + nT .$$

В случае, когда множество X является отрезком или полуинтервалом, указанное объединение является множеством всех действительных чисел R — интервалом $(-\infty , +\infty)$.

Утверждение 1. Пусть уравнение $f(x) = a$ имеет единственное решение $x = x_0$ на множестве X, функция $y = f(x)$ определена на множестве X и является периодической с периодом T, тогда при любом целом значении n $x = x_0 + nT$ является единственным значением этого уравнения на множестве $X + nT$.

Доказательство. По определению решения уравнения имеет место равенство $f(x_0) = a$. В силу периодичности функции $f(x)$ при любом целом значении n $f(x_0 + nT) = f(x_0) = a$, а это означает, что число $x_0 + nT$, которое принадлежит множеству $X + nT$, является решением уравнения $f(x) = a$. Предположим, что при некотором целом значении n' существует на множестве $X + n'T$ еще решение рассматриваемого уравнения $x' \neq x_0 + n'T$. Тогда $x' = x'_0 + n'T$, где $x'_0 \neq x_0$ и $x'_0 \in X$.

По предположению $f(x') = a$, а потому в силу периодичности функции $f(x)$ имеют место равенства $f(x') = f(x'_0 + n'T) = f(x'_0) = a$. Это означает, что на множестве X существует отличное от x_0 решение уравнения $f(x) = a$ $x = x'_0$. Получили противоречие с единственностью решения этого уравнения на множестве X, которое полностью доказывает утверждение.

Утверждение 2. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X, является периодической с периодом T и возрастает (убывает) на этом множестве, тогда при любом целом значении n эта функция также возрастает (убывает) на множестве $X + nT$.

Доказательство. Фиксируем произвольные $x_2 > x_1$ из множества $X + nT$, тогда числа $x'_2 = x_2 - nT > x_1 - nT = x'_1$ будут принадлежать множеству X. В силу периодичности функции $f(x)$ и ее возрастания (убывания) на множестве X получаем, что

$$f(x_2) = f(x_2 - nT) = f(x'_2) > (<) f(x'_1) = f(x_1 - nT) = f(x_1),$$

это и означает возрастание (убывание) функции на множестве $X + nT$. Утверждение доказано.

Аналогично формулируются и доказываются аналогичные утверждения применительно к неубывающей (невозрастающей) на множестве X периодической функции.

Утверждение 3. Пусть T_0 — основной период периодической функции $y = f(x)$, определенной на множестве X. Тогда числа вида nT_0, где $n = \pm 1 ; \pm 2 ; \ldots ;$ и только они являются периодами этой функции.

Доказательство. Предположим, что существует некоторое число T', отличное от указанных в утверждении, являющееся периодом этой функции. В силу свойств действительных чисел T' можно представить в виде $T' = n'T_0 + t$, где $0 < t < T_0$. Если для некоторого $x \in X$ $x + T' \notin D[f]$, то нарушается условие 1) в определении периодичности функции и потому число T' не является периодом функции. Если же это условие 1) для всех $x \in D[f]$ применительно к T' выполнено, то в силу периодичности функции с периодами nT_0 $\forall n \in Z$ следует, что из $x + T' \in D[f]$ вытекает $x + t \in D[f]$. Поэтому

$$\forall x \in D[f] \quad f(x) = f(x + T') = f(x + t + nT_0) = f(x + t),$$

это означает, что число t является периодом функции. Пришли к противоречию с тем, что T_0 — ее основной период, которое завершает доказательство этого утверждения.

Утверждение 4. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X, является периодической с периодом T, множество X представляет собой отрезок $[c, d]$, $T = d - c$ и функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на отрезке $[c, (c + d)/2]$, а также она убывает (возрастает) на отрезке $[(c + d)/2, d]$, тогда число T является ее основным периодом.

Доказательство. В силу периодичности функции с указанным в условии периодом $f(c) = f[c + (d - c)] = f(d)$, а потому в силу условий строгой монотонности функции $f(x)$ на соответствующих отрезках мы имеем:

$$\forall x \in \left(c, \frac{c+d}{2}\right] \Rightarrow f(c) < (>) f(x); \; \forall x \in \left[\frac{c+d}{2}, d\right) \Rightarrow f(c) = f(d) < (>) f(x) .$$

Следовательно, $\forall\, x \in (c, d) \;\Rightarrow\; f(c) < (>) f(x)$. Поэтому, предполагая существование числа t, такого, что $0 < t < T = d - c$, являющегося периодом функции $f(x)$, мы получаем, в частности, выполнение равенства $f(c) = f(c + t)$, но так как $c < c + t < c + (d - c) = d$, то $c + t \in (c, d)$. Получили противоречие, которое и доказывает данное утверждение.

Утверждение 5. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X, является периодической с периодом T, множество X представляет собой интервал (c, d), $T = d - c$ и функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на интервале (c, d), тогда число T является ее основным периодом.

Доказательство. Предположим, что существует число t, такое, что $0 < t < T = d - c$, также являющееся периодом функции $f(x)$. Тогда, в частности, при любом $x \in D[f]$ должно выполняться равенство $f(x) = f(x + t)$. Положим $x = d - t$, тогда $x \in (c, d)$. Если $f(d) = f(x + t)$ не определено, то для этого значения x равенство $f(x) = f(x + t)$ невозможно, получили противоречие. Если же значение $f(d)$ определено и случайно окажется, что $f(d - t) = f(d)$, то положим $x = \dfrac{c+d}{2} - \dfrac{t}{2}$, тогда $x + t = \dfrac{c+d}{2} + \dfrac{t}{2}$. В силу положительности числа t, а также того, что $t/2 < (d - c)/2$ имеют место следующие неравенства:

$$\frac{c+d}{2} > x > \frac{c+d}{2} - \frac{d-c}{2} = c \quad \text{и} \quad \frac{c+d}{2} < x + t < \frac{c+d}{2} + \frac{d-c}{2} = d .$$

Следовательно, числа x и $x + t$ принадлежат интервалу (c, d), поэтому значения $f(x)$ и $f(x + t)$ определены. В силу того, что $x < x + t$, а также возрастания (убывания) функции $f(x)$ на интервале (c, d) вытекает неравенство $f(x+t) > (<) f(x)$. Таким образом, равенство $f(x+t) = f(x)$ не выполняется. Пришли к противоречию, которое полностью доказывает это утверждение.

Сформулируем определения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ с помощью окружности с центром в начале координат радиуса $R > 0$, где α — мера угла AOM с началом — лучом OA , A — $A(R;0)$ и концом — лучом OM , M — $M(x;y)$ точка указанной окружности (см. ниже рис. 2 а),

$$\sin\alpha \stackrel{df}{=} \frac{y}{R} \; ; \; \cos\alpha \stackrel{df}{=} \frac{x}{R} \; ;$$

$$\operatorname{tg}\alpha \stackrel{df}{=} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (\cos\alpha \neq 0) \; ; \; \operatorname{ctg}\alpha \stackrel{df}{=} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (\sin\alpha \neq 0) \; .$$

$\operatorname{tg}\alpha$ не определен при $\cos\alpha = 0$; $\operatorname{ctg}\alpha$ не определен при $\sin\alpha = 0$.

Докажем утверждение о том, что определенные таким образом тригонометрические функции являются функциями *только величины угла* α , и никак не зависят от радиуса окружности $R > 0$. *

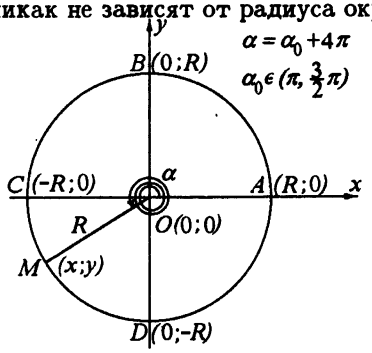


рис. 2 а)

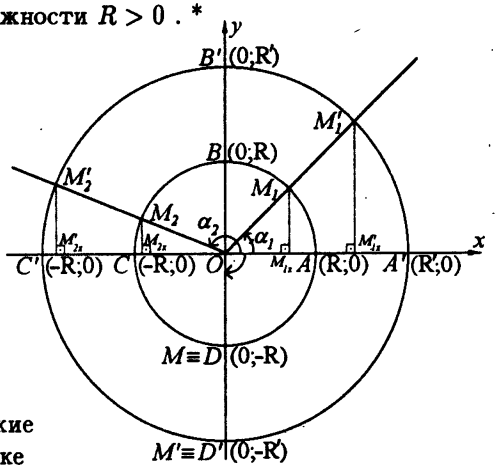


рис. 2 б)

Рассмотрим две концентрические окружности, центр которых в точке $O(0;0)$ и радиусы равны R и R' соответственно. Если, например, $\angle(OA;OM)$ оканчивается на отрицательной полуоси ординат, то точка $M(x;y) \equiv D(-R;0)$, а принадлежащая тому же лучу OM с той же начальной точкой O точка $M'(x';y') \equiv D'(-R';0)$, тогда $y : R = -R : R = -R' : R' = y' : R' = -1$, $x : R = 0 : R = 0 : R' = x' : R' = 0$, следовательно, $\sin(\widehat{OA;OM}) = -1$, $\cos(\widehat{OA;OM}) = 0$, то есть не зависят от радиуса окружности. Аналогично рассматриваются случаи, когда $\angle(OA;OM)$ оканчивается на других координатных полуосях.

Если $\angle(OA;OM_1)$ оканчивается в первой четверти, $(\widehat{OA;OM_1}) = \alpha_1$ (см. рис. 2 б), то поскольку первая координатная четверть — пересечение верхней относительно оси абсцисс полуплоскости и правой относительно оси ординат полуплоскости, то все точки луча OM_1 (в частности, точки

* Это утверждение можно использовать на экзаменах без доказательств, то есть можно сразу вводить тригонометрические функции с помощью единичной окружности.

M_1 и M_1') будут расположены в этой же четверти, а потому знаки абсцисс и ординат точек M_1 и M_1' будут совпадать (в первой четверти координаты точек положительны), $M_1(x;y)$ и $M_1'(x';y')$ — точки пересечения луча OM_1 и окружностей радиусов R и R' * соответственно; прямоугольные треугольники $OM_{1x}M_1$ и $OM_{1x}'M_1'$, как имеющие общий острый угол, подобны, следовательно,

$$\frac{|M_{1x}M_1|}{|OM_1|} = \frac{|M_{1x}'M_1'|}{|OM_1'|} \Leftrightarrow \frac{|y_1|}{R} = \frac{|y_1'|}{R'} \Leftrightarrow \frac{y_1}{R} = \frac{y_1'}{R'} \stackrel{df}{=} \sin\alpha_1 ,$$

$$\frac{|OM_{1x}|}{|OM_1|} = \frac{|OM_{1x}'|}{|OM_1'|} \Leftrightarrow \frac{|x_1|}{R} = \frac{|x_1'|}{R'} \Leftrightarrow \frac{x_1}{R} = \frac{x_1'}{R'} \stackrel{df}{=} \cos\alpha_1 .$$

Аналогично, если $\angle(OA;OM_2)$ оканчивается во второй четверти, $\widehat{(OA;OM_2)} = \alpha_2$ (см. рис. 2 б), то поскольку вторая координатная четверть — пересечение верхней относительно оси абсцисс полуплоскости и левой относительно оси ординат полуплоскости, то все точки луча OM_2 (в частности, точки M_2 и M_2') будут расположены в этой же четверти, а потому знаки абсцисс и ординат точек M_2 и M_2' будут совпадать (во второй четверти ординаты точек положительны, а абсциссы — отрицательны), $M_2(x;y)$ и $M_2'(x';y')$ — точки пересечения луча OM_2 и окружностей радиусов R и R' соответственно; прямоугольные треугольники $OM_{2x}M_2$ и $OM_{2x}'M_2'$ как имеющие общий острый угол подобны, следовательно,

$$\frac{|M_{2x}M_2|}{|OM_2|} = \frac{|M_{2x}'M_2'|}{|OM_2'|} \Leftrightarrow \frac{|y_2|}{R} = \frac{|y_2'|}{R'} \Leftrightarrow \frac{y_2}{R} = \frac{y_2'}{R'} \stackrel{df}{=} \sin\alpha_2 ,$$

$$\frac{|OM_{2x}|}{|OM_2|} = \frac{|OM_{2x}'|}{|OM_2'|} \Leftrightarrow \frac{|x_2|}{R} = \frac{|x_2'|}{R'} \Leftrightarrow \frac{-x_2}{R} = \frac{-x_2'}{R'} \Leftrightarrow \frac{x_2}{R} = \frac{x_2'}{R'} \stackrel{df}{=} \cos\alpha_2 .$$

Точно таким же образом рассматриваются случаи, когда угол оканчивается как в третьей, так и в четвертой четвертях. Итак, мы получили независимость определенных значений функций синус и косинус от радиуса окружности с центром в начале координат. Независимость от радиуса функций тангенс и котангенс следует из их определений как результатов деления функций синус на косинус и соответственно — косинус на синус. Утверждение полностью доказано.

В соответствие с доказанным утверждением впредь мы можем рассматривать определения тригонометрических функций величин углов с помощью окружности с центром в начале координат радиуса 1 , такую окружность называют *единичной*.

---

* Существование и единственность таких точек вытекает из теоремы о существовании и единственности точки M на данном луче с данной начальной точкой (вершиной) O такой, что расстояние от точки M до точки O ($|OM|$) равно заданному положительному числу a .

Сформулируем определения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{ctg}\alpha$ с помощью единичной окружности, где α — мера угла AOM с началом — лучом OA, A — $A(1;0)$ и концом — лучом OM, M — $M(x;y)$ точка единичной окружности (см. ниже рис. 3 а)

$$\sin\alpha \stackrel{df}{=} y\ ;\ \cos\alpha \stackrel{df}{=} x\ ;$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha \stackrel{df}{=} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\quad (\cos\alpha \neq 0)\ ;\ \mathrm{ctg}\,\alpha \stackrel{df}{=} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\quad (\sin\alpha \neq 0)\ .$$

по определению $\mathrm{tg}\,\alpha$ не определен при $\cos\alpha = 0$; $\mathrm{ctg}\,\alpha$ не определен при $\sin\alpha = 0$.

В силу указанного выше факта о том, какие меры имеют углы, отвечающие точке M на окружности с центром в точке $O(0;0)$ радиуса $R > 0$, в частности, отвечающие точке M на единичной окружности, которая в свою очередь отвечает углу радианной меры α , справедливы формулы периодичности для синуса и косинуса

$$\sin(\alpha + 2n\pi) = \sin\alpha\ ;\ \cos(\alpha + 2n\pi) = \cos\alpha\ ,\ n = 0\ ;\ \pm1\ ;\ \pm2\ ;\ \ldots\ .$$

Вопрос 1. Основное тригонометрическое тождество. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

Теорема 1. $\forall\alpha \in R \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (1)$

— основное тригонометрическое тождество.

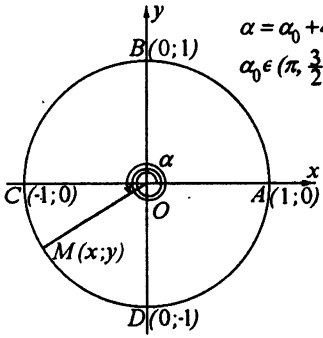


рис. 3 а)

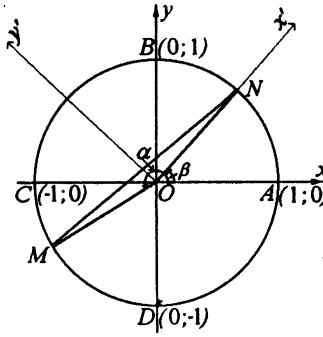


рис. 3 б)

Оно вытекает из уравнения окружности с центром в точке $O(0;0)$ и радиуса $R = 1$: $x^2 + y^2 = 1$, где $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$.

Теорема 2.

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \mathrm{tg}^2\alpha + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \forall k \in Z\ ; \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = \mathrm{ctg}^2\alpha + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \pi k \quad \forall k \in Z\ ; \qquad (3)$$

Эти формулы получаются, если в основном тригонометрическом тождестве произвести почленное деление на $\cos^2\alpha$ и $\sin^2\alpha$ соответственно.

Следствия. Из формул, установленных в теореме 2, следуют:

$$\frac{1}{|\cos\alpha|} = \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}\,, \quad \text{если } \cos\alpha \neq 0\,; \tag{4}$$

$$\frac{1}{|\sin\alpha|} = \sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}\,, \quad \text{если } \sin\alpha \neq 0\,; \tag{5}$$

$$\Longrightarrow \quad \cos\alpha = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}}\,, & \text{если } \cos\alpha > 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}}\,, & \text{если } \cos\alpha < 0 \end{cases}; \tag{6}$$

$$\sin\alpha = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}}\,, & \text{если } \sin\alpha > 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}}\,, & \text{если } \sin\alpha < 0 \end{cases}; \tag{7}$$

$$\Longrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}}\,, & \text{если } \cos\alpha > 0 \\ -\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}}\,, & \text{если } \cos\alpha < 0 \end{cases}; \tag{8}$$

$$\Longrightarrow \cos\alpha = \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}}\,, & \text{если } \sin\alpha > 0 \\ -\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}}\,, & \text{если } \sin\alpha < 0 \end{cases}; \tag{9}$$

$$|\sin\alpha| = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \begin{cases} \sqrt{1 - \cos^2\alpha}\,, & \text{если } \sin\alpha \geqslant 0 \\ -\sqrt{1 - \cos^2\alpha}\,, & \text{если } \sin\alpha \leqslant 0 \end{cases}; \tag{10}$$

$$|\cos\alpha| = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \begin{cases} \sqrt{1 - \sin^2\alpha}, & \text{если } \cos\alpha \geqslant 0 \\ -\sqrt{1 - \sin^2\alpha}, & \text{если } \cos\alpha \leqslant 0 \end{cases}; \tag{11}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \begin{cases} \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}\,, & \text{если } \cos\alpha > 0 \\ -\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}\,, & \text{если } \cos\alpha < 0 \end{cases}; \tag{12}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}, & \text{если } 0 \leqslant \sin\alpha < 1 \\ -\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}, & \text{если } -1 < \sin\alpha \leqslant 0 \end{cases}; \qquad (13)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \begin{cases} \dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}, & \text{если } \sin\alpha > 0 \\ -\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}, & \text{если } \sin\alpha < 0 \end{cases}; \qquad (14)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}, & \text{если } 0 \leqslant \cos\alpha < 1 \\ -\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}, & \text{если } -1 < \cos\alpha \leqslant 0 \end{cases}; \qquad (15)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1}, & \text{если } \operatorname{tg}\alpha \geqslant 0 \\ -\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1}, & \text{если } \operatorname{tg}\alpha \leqslant 0 \end{cases}; \qquad (16)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1}, & \text{если } \operatorname{ctg}\alpha \geqslant 0 \\ -\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1}, & \text{если } \operatorname{ctg}\alpha \leqslant 0 \end{cases}; \qquad (17)$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \quad \alpha \neq = \frac{\pi n}{2} \quad \forall n \in Z\ . \qquad (18)$$

Обратить внимание на *некорректность* записей вида

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}, \quad \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}}$$

без указания, при каких α знак " + ", а при каких " − ", так как согласно такой записи получается неоднозначная определенность синуса или косинуса по данному значению аргумента, что неверно.

Вопрос 2. Формулы сложения:

$$\cos(\alpha \pm \beta)\ ,\ \sin(\alpha \pm \beta)\ ,\ \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)\ ,\ \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta)$$

Обратим внимание на подробный вывод одной из этих формул. Например, формула

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad \forall\alpha, \beta \in R, \qquad (1)$$

выводится так: рассмотрим случай $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha < 2\pi$,
пусть M — $M(\cos\alpha\ ;\ \sin\alpha)$, N — $N(\cos\beta\ ;\ \sin\beta)$, запишем формулу для $|MN|^2$ (см. выше рис. 2 б)

$$|MN|^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 \ ,$$

затем в новой системе координат, повернутой на угол величины β вокруг точки $O(0;0)$, уже N — $N(1;0)$, а M — $M(\cos(\alpha-\beta)\ ;\ \sin(\alpha-\beta))$ (см. выше рис. 2 б), поэтому

$$|MN|^2 = (\cos(\alpha-\beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha-\beta) - 0)^2 \ ,$$

приравнивая выражения для $|MN|^2$, используя основное тригонометрическое тождество, мы и получаем формулу для $\cos(\alpha-\beta)$ при указанных α и β ;

если затем $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta < 2\pi$, то

$\cos(\alpha-\beta) = \cos(-(\alpha-\beta)) = \cos(\beta-\alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha =$
$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ (здесь использовано свойство четности косинуса);

если α и β произвольны, то $\exists\alpha_0, \beta_0 \in [0, 2\pi)$ и $m, n \in Z$:

$$\alpha = \alpha_0 + 2\pi m, \quad \beta = \beta_0 + 2\pi n \ ,$$

$\Rightarrow \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha_0 - \beta_0 + 2\pi(m-n)) = \cos(\alpha_0 - \beta_0) = \cos\alpha_0\cos\beta_0 +$
$+ \sin\alpha_0\sin\beta_0 = \cos(\alpha - 2\pi m)\cos(\beta - 2\pi n) + \sin(\alpha - 2\pi m)\sin(\beta - 2\pi n) =$
$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ (здесь мы использовали полученные выше формулы периодичности для синуса и косинуса).

Вторая формула выводится уже на основе первой совсем коротко:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad (2)$$

(здесь используется четность cos и нечетность sin).

Далее из этих формул выводятся такие формулы: $\forall\ \alpha,\ \beta\ \in R$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha = \sin\alpha \ ; \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \cos\alpha \ ; \qquad (4)$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \ ; \qquad (5)$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \ ; \qquad (6)$$

(опять используется четность cos и нечетность sin)

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} \pm \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} \mp \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\,; \tag{7}$$

здесь $\cos(\alpha \pm \beta) \neq 0$, $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$.

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin(\alpha \pm \beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta} =$$

$$= \frac{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} \mp \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} \pm \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}\,; \tag{8}$$

здесь $\sin(\alpha \pm \beta) \neq 0$, $\sin\alpha \neq 0$, $\sin\beta \neq 0$.

Как выглядит формула для $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$, если либо $\cos\alpha = 0$, либо $\cos\beta = 0$, либо

$$\begin{cases} \cos\alpha = 0\,, \\ \cos\beta = 0 \end{cases} \quad ?$$

Ответ. С помощью формул приведения (см. ниже, Вопрос 4) можно получить следующий общий вид формул тангенса суммы и разности двух аргументов при *любых* их значениях:

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, & \text{если } \alpha \pm \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k;\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n;\ \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi m; \\ \mp\operatorname{ctg}\beta, & \text{если } \alpha = \pi/2 + \pi n;\quad \beta \neq \pi m; \\ -\operatorname{ctg}\alpha, & \text{если } \beta = \pi/2 + \pi m;\quad \alpha \neq \pi n; \\ \text{в частности, } 0, & \text{если } \alpha = \pi/2 + \pi n \text{ и } \beta = \pi/2 + \pi m; \\ \text{не существует,} & \text{если } \alpha \pm \beta = \pi/2 + \pi k. \end{cases} \tag{9}$$

Везде k, n, m принимают значения 0; ± 1; ± 2; ± 3; ... .

Как выглядит формула для $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta)$, если либо $\sin\alpha = 0$, либо $\sin\beta = 0$, либо

$$\begin{cases} \sin\alpha = 0\,, \\ \sin\beta = 0 \end{cases} \quad ?$$

Ответ. С помощью формул приведения (см. ниже, Вопрос 4) можно получить следующий общий вид формул котангенса суммы и разности двух аргументов при *любых* их значениях:

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}, & \text{если } \alpha \pm \beta \neq \pi k;\ \alpha \neq \pi n;\ \beta \neq \pi m; \\ \pm\operatorname{ctg}\beta, & \text{если } \alpha = \pi n;\ \beta \neq \pi m; \\ \operatorname{ctg}\alpha, & \text{если } \beta = \pi m;\ \alpha \neq \pi n; \\ \text{не существует, если } & \alpha \pm \beta = \pi k. \end{cases} \tag{10}$$

Везде k, n, m принимают значения 0; ±1; ±2; ±3; ... .

Вопрос 3. Формулы суммы и разности тригонометрических функций: $\sin\alpha \pm \sin\beta, \cos\alpha \pm \cos\beta, \operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta, \operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta$, *Преобразование в сумму произведений:* $\cos\alpha\cos\beta, \sin\alpha\sin\beta, \sin\alpha\cos\beta$

Формулы имеют вид: $\forall\alpha\ ,\ \beta\ \in R$ *

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cdot[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]\ ; \tag{1}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\cdot[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]\ ; \tag{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cdot[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]\ ; \tag{3}$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}\ ; \tag{4}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\ ; \tag{5}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\ ; \tag{6}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\ ; \tag{7}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}\ . \tag{8}$$

Вывод. Используем формулы:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\ ;$$

---

* В приведенных ниже формулах (7) и (8) на аргументы α и β накладываются ограничения.

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\ .$$

Складывая эти равенства почленно и деля на 2, получаем (1).

Вычитая эти равенства почленно и деля на 2, получаем (2).

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\ ;$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\ .$$

Складывая эти равенства почленно и деля на 2, получаем (3)

Если применить формулы (1) и (2) с заменой α на φ и β на ψ, а затем положить $\alpha=\varphi+\psi$, $\beta=\varphi-\psi\Rightarrow\varphi=\dfrac{\alpha+\beta}{2},\psi=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, мы получим формулы (5) и (6).

Аналогично рассуждая применительно к формуле (3), мы получим формулу (4) со знаком " + ", а (4) со знаком " − " получается из (4) со знаком " + " заменой β на $-\beta$. Формулы (7) получаются, если представить

$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$, следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\pm\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\ .$$

Каковы ограничения на α и β в формуле (7) ?

$(\cos\alpha\neq0,\quad\cos\beta\neq0\Leftrightarrow\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\quad\beta\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi m\quad\forall k,m\in Z.)$

Формулы (8) получаются, если представить

$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ и $\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}$, следовательно,

$$\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\pm\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{\cos\alpha\sin\beta\pm\cos\beta\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}\ .$$

Каковы ограничения на α и β в формуле (8) ?

$(\sin\alpha\neq0,\quad\sin\beta\neq0\Leftrightarrow\alpha\neq\pi k,\quad\beta\neq\pi m\quad\forall k,m\in Z.)$

Вопрос 4. Формулы двойного и половинного аргументов тригонометрических функций. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента. Формулы приведения

$\forall\ \alpha\in R$

$$\sin2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\ ;\qquad(1)$$

(формула (1) вытекает из формулы для $\sin(\alpha+\beta)$ при $\beta=\alpha$)

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\ ; \qquad (2)$$

(формула (2) вытекает из формулы для $\cos(\alpha+\beta)$ при $\beta=\alpha$)

Применяя основное тригонометрическое тождество, получим:

$$\cos 2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\ ; \qquad (3)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1\ ; \qquad (4)$$

$$\mathrm{tg}2\alpha = \mathrm{tg}(\alpha+\alpha) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\alpha} = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}\ ; \qquad (5)$$

(эта формула получается из формулы для $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$ при $\beta=\alpha$).

Каковы ограничения на α ?
($\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ 2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi m,\ \forall\ k, m \in Z$.)

$$\mathrm{ctg}2\alpha = \mathrm{ctg}(\alpha+\alpha) = \frac{\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha - 1}{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha} = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}\alpha}\ ; \qquad (6)$$

(эта формула получается из формулы для $\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)$ при $\beta=\alpha$).

Каковы ограничения на α ?
($\alpha \neq \pi k,\ 2\alpha \neq \pi m,\ \forall\ k, m \in Z \ \Leftrightarrow\ \alpha \neq \frac{\pi n}{2},\ \forall\ n \in Z$.)

Заменяя в формулах (3) и (4) 2α на α, а α на $\frac{\alpha}{2}$, получим: $\forall\ \alpha\ \in R$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \Leftrightarrow \left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\ ; \qquad (7)$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} \Leftrightarrow \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\ . \qquad (8)$$

Из формул (7) и (8) :

$$\Longrightarrow \left|\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \quad (\alpha \neq \pi + 2\pi k, \quad \forall k \in Z)\ ; \qquad (9)$$

$$\Longrightarrow \left|\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} \quad (\alpha \neq \pi + 2\pi k, \quad \forall k \in Z)\ ; \qquad (10)$$

$$\Longrightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}},\ \text{если}\ \sin\dfrac{\alpha}{2} \geqslant 0 \\ -\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}},\ \text{если}\ \sin\dfrac{\alpha}{2} \leqslant 0 \end{array}\right. \quad (\forall\ \alpha\ \in R)\ ; \qquad (11)$$

$$\Longrightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}, & \text{если } \cos\dfrac{\alpha}{2} \geqslant 0 \\ -\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}, & \text{если } \cos\dfrac{\alpha}{2} \leqslant 0 \end{cases} \qquad (\forall\, \alpha \in R)\,; \qquad (12)$$

$$\Longrightarrow \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, & \text{если } \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} \geqslant 0 \\ -\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, & \text{если } \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} \leqslant 0 \end{cases} \qquad (\alpha \neq \pi + 2\pi k, \quad \forall k \in Z)\,; \qquad (13)$$

$$\Longrightarrow \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}, & \text{если } \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} \geqslant 0 \\ -\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}, & \text{если } \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} \leqslant 0 \end{cases} \qquad (\alpha \neq 2\pi k, \quad \forall k \in Z)\,; \qquad (14)$$

Обратить внимание на некорректность записей типа

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

без указания, когда знак " + ", а когда знак " − " (ибо без этого указания получается, что по данному α $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ определен неоднозначно, что неверно).

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} = \frac{2\sin(\alpha/2)\cdot\cos(\alpha/2)}{2\cos^2(\alpha/2)} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad \forall n \in Z\,; \qquad (15)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin^2(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)\cdot\cos(\alpha/2)} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad \forall n \in Z\,; \qquad (16)$$

(в формуле (16) $\sin\alpha \neq 0$).

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)} = \frac{2\sin(\alpha/2)\cdot\cos(\alpha/2)}{2\sin^2(\alpha/2)} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}, \quad \alpha \neq 2\pi n, \quad \forall n \in Z\,; \qquad (17)$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2\cos^2(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)\cdot\cos(\alpha/2)} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad \forall n \in Z\,; \qquad (18)$$

(в формуле (18) $\sin\alpha \neq 0$).

$$\sin\alpha = \frac{2\sin(\alpha/2)\cdot\cos(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)+\sin^2(\alpha/2)} = \frac{2\mathrm{tg}(\alpha/2)}{1+\mathrm{tg}^2(\alpha/2)}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad \forall n \in Z\ ; \tag{19}$$

$$\cos\alpha = \frac{\cos^2(\alpha/2)-\sin^2(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)+\sin^2(\alpha/2)} = \frac{1-\mathrm{tg}^2(\alpha/2)}{1+\mathrm{tg}^2(\alpha/2)}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad \forall n \in Z\ ; \tag{20}$$

Формулы (19) и (20) вытекают из формул (1), (2) и основного тригонометрического тождества.

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2\mathrm{tg}(\alpha/2)}{1-\mathrm{tg}^2(\alpha/2)}\ ,\ \alpha \neq \pi + 2\pi k,\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi m,\ \forall\ k, m \in Z. \tag{21}$$

Эта формула получается из формулы (5) с заменой 2α на α , α на $\alpha/2$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2(\alpha/2)}{2\mathrm{tg}(\alpha/2)}\ . \tag{22}$$

Эта формула вытекает из формулы (21) $\left(\alpha \neq \frac{\pi n}{2}\ ,\quad \forall n \in Z\right)$.

Формулы приведения — это формулы, выражающие тригонометрические функции аргументов $-\alpha$, $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$ и т.п. через тригонометрические функции аргумента α.

Для любого действительного значения α :

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ следует из нечетности sin ; $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ следует из четности cos .

Для любых действительных значений α, при которых определены тангенс и котангенс, соответственно :

$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$ следует из нечетности tg ; $\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$ следует из нечетности ctg .

Для любого действительного значения α :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha\ ;\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha\ ; \tag{23}$$

(эти формулы получены выше (см. Вопрос 2)),

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{2}\cdot\sin\alpha = \cos\alpha\ ; \tag{24}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\alpha = -\sin\alpha\ ; \tag{25}$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{ctg}\alpha\ ;\ \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{tg}\alpha\ ; \tag{26}$$

эти формулы получаются из формул (23) почленным делением первой из них на вторую и наоборот, почленным делением второй из них на первую,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha;\quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha\ ; \tag{27}$$

эти формулы получаются аналогично из формул (24) и (25) почленным делением первой из них на вторую и наоборот, почленным делением второй из них на первую.

Каковы ограничения на α в (26) и (27) ? По этому поводу см. ограничения на аргументы функций тангенс и котангенс.

Для любого действительного значения α :

$$\begin{array}{l}\sin(\pi-\alpha)=\sin\pi\cos\alpha-\cos\pi\sin\alpha=\sin\alpha\\ \cos(\pi-\alpha)=\cos\pi\cos\alpha+\sin\pi\sin\alpha=-\cos\alpha\end{array}\ ; \tag{28}$$

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha;\quad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha\ ; \tag{29}$$

формулы (29) получаются аналогично формулам (28).

Таким же образом, как формулы (26) и (27), получаются формулы вида:

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha\ ;\ \operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha\ ; \tag{30}$$

$$\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha\ ;\ \operatorname{ctg}(\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha\ . \tag{31}$$

Каковы ограничения на α в (30) и (31) ? По этому поводу также см. ограничения на аргументы функций тангенс и котангенс.

Доказать формулы :

$$\sin(\alpha+\pi n)=(-1)^n\sin\alpha\ ;\ \cos(\alpha+\pi n)=(-1)^n\cos\alpha\ . \tag{32}$$

При $n=2k\ \Rightarrow\ (-1)^n=1$ и эти формулы непосредственно получаются из формул периодичности. При $n=2k+1\ \Rightarrow\ (-1)^n=-1$ и эти формулы есть следствие примененных сначала формул периодичности, а затем — формул приведения (29).

Доказать формулы :

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\ ; \tag{33}$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\ . \tag{34}$$

Для доказательства представить $\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)$ и $\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)$, а затем применить соответственно формулы синуса и косинуса суммы двух аргументов, синуса и косинуса суммы двойного аргумента и основное тригонометрическое тождество, формулу (1).

Доказать формулы :

$$\operatorname{tg}3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}\ ; \tag{35}$$

$$\operatorname{ctg}3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}\ . \tag{36}$$

Каковы ограничения на аргументы в этих формулах ?

Вопрос 5. Свойства тригонометрической функции $y = \sin x$ *и ее график. Решение простейшего тригонометрического уравнения* $\sin x = a$

О свойствах этой тригонометрической функции и ее графике см. ниже, после вывода формулы для $a\sin x + b\cos x$ на стр. 326 — 331.

В вопросе о решении уравнения $\sin x = a$ проведем исследование в зависимости от a :

при $|a| > 1$ нет действительных решений, так как $E[\sin]$—$[-1, 1]$;

при $|a| \leqslant 1$ сформулируем определение $\arcsin a$:

$$\alpha \overset{df}{=} \arcsin a, \text{ если } \begin{cases} 1)\ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] , \\ 2)\ \sin\alpha = a\ . \end{cases}$$

Ниже, на стр. 326 — 327 дается геометрическое обоснование единственности решения данного уравнения на отрезках $[-\pi/2, \pi/2]$ и $[\pi/2, 3\pi/2]$, соответственно

$$x = \arcsin a \quad \text{и} \quad x = \pi - \arcsin a$$

(последнее равенство вытекает и на основе формулы $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$).

Отсюда, а также в силу периодичности с периодами $2\pi n$ функции $y = \sin x$ $(n = \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$ и утверждения 1, доказанного выше, вытекает, что

совокупность всех решений уравнения $\sin x = a$ *есть*

$$\left.\begin{array}{l} \text{I серия } x = \arcsin a + 2\pi n \\ \text{II серия } x = \pi - \arcsin a + 2\pi n \end{array}\right\} \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k\ , \quad \forall n, k \in \mathbb{Z}$$

(при $k = 2n$ — I серия, при $k = 2n + 1$ — II серия).

В частных случаях, при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ формулы решений упрощаются и соответственно имеют вид :

$$x = \pi n\ ,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n\ ,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\ , \quad \forall n \in \mathbb{Z}\ .$$

Вопрос 6. Свойства тригонометрической функции $y = \cos x$ *и ее график. Решение простейшего тригонометрического уравнения* $\cos x = a$

О свойствах этой тригонометрической функции и ее графике см. ниже, после вывода формулы для $a\sin x + b\cos x$ на стр. 326 — 331.

В вопросе о решении уравнения $\cos x = a$ проведем исследование в зависимости от a :

при $|a| > 1$ нет действительных решений, так как $E[\cos]$—$[-1, 1]$;

при $|a| \leqslant 1$ сформулируем определение $\arccos a$:

$$\alpha \overset{df}{=} \arccos a, \text{ если } \begin{cases} 1)\ \alpha \in [0, \pi] , \\ 2)\ \cos\alpha = a . \end{cases}$$

Ниже, на стр. 326 — 327 дается геометрическое обоснование единственности решения данного уравнения на отрезках

$[0, \pi]$ и $[-\pi, 0]$, соответственно

$$x = \arccos a \quad \text{и} \quad x = -\arccos a$$

(последнее равенство вытекает и из четности функции $y = \cos x$).

Отсюда, а также в силу периодичности функции $y = \cos x$ с периодами $2\pi n$, $n = \pm 1$; ± 2 ; ... и утверждения 1, доказанного выше,

совокупность всех решений уравнения $\cos x = a$ *есть:*

$$\begin{matrix} x = \arccos a + 2\pi n \\ x = -\arccos a + 2\pi n \end{matrix} \Rightarrow\ x = \pm\arccos a + 2\pi n ,$$

где $n = 0$; ± 1 ; ± 2 ; ... .

В частных случаях, при $a = 0$, $a = 1$, $a = -1$ формулы решений упрощаются и соответственно имеют вид

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n , \ x = 2\pi n , \ x = \pi + 2\pi n , \quad \forall n \in Z .$$

Вопрос 7. Свойства тригонометрической функции $y = \mathrm{tg}x$ *и ее график. Решение простейшего тригонометрического уравнения* $\mathrm{tg}x = a$

О свойствах этой тригонометрической функции и ее графике см. ниже, после доказательств свойств функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ на стр. 331 — 336.

Уравнение $\mathrm{tg}x = a$ имеет решения при любом $a \in R$, так как $E[\mathrm{tg}]$ — $(-\infty, +\infty)$.

Сформулируем определение $\mathrm{arctg}a$,

$$\alpha \overset{df}{=} \mathrm{arctg}a, \text{ если } \begin{cases} 1)\ \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) , \\ 2)\ \mathrm{tg}\alpha = a , \end{cases}$$

$\mathrm{arctg}a$ определен для любого действительного a .

Ниже, на стр. 332 — 333 даются геометрическое и аналитическое обоснования единственности решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$ на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$,

это $x = \operatorname{arctg} a$,

откуда в силу периодичности функции $\operatorname{tg} x$ с периодами πn, $n = \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$ и утверждения 1, доказанного выше, вытекает : *совокупность всех решений уравнения* $\operatorname{tg} x = a$ *имеет вид:*

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n\ , \quad n = 0\ ;\ \pm 1\ ;\ \pm 2\ ;\ \ldots\ .$$

Вопрос 8. Свойства тригонометрической функции $y = \operatorname{ctg} x$ *и ее график. Решение простейшего тригонометрического уравнения* $\operatorname{ctg} x = a$

О свойствах этой тригонометрической функции и ее графике см. ниже, после доказательств свойств функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ на стр. 332 — 336.

Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ имеет решения при любом $a \in R$, так как $E[\operatorname{ctg}]$ — $(-\infty, +\infty)$.

Сформулируем определение $\operatorname{arcctg} a$,

$$\alpha \stackrel{df}{=} \operatorname{arcctg} a, \text{ если } \begin{cases} 1)\ \alpha \in (0, \pi)\ , \\ 2)\ \operatorname{ctg}\alpha = a\ , \end{cases}$$

$\operatorname{arcctg} a$ определен для любого $a \in R$.

Ниже, на стр. 332 — 333 даются геометрическое и аналитическое обоснования единственности решения уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ на интервале $(0, \pi)$,

это $x = \operatorname{arcctg} a$,

откуда в силу периодичности функции $y = \operatorname{ctg} x$ с периодами πn, $n = \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$ и утверждения 1, доказанного выше, вытекает : *совокупность всех решений уравнения* $\operatorname{ctg} x = a$ *имеет вид:*

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n\ , \quad n = 0\ ;\ \pm 1\ ;\ \pm 2\ ;\ \ldots\ .$$

Вопрос 9. Преобразование выражения $a \sin x + b \cos x$ *с помощью вспомогательного аргумента*

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \varphi) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \psi)\ , \text{ где}$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & ; & \cos\psi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & ; & \sin\psi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{array} \right\}\ . \qquad (*)$$

φ, ψ — величины указанных вспомогательных углов. Здесь a и b одновременно не обращаются в нуль, то есть

$$\left[\begin{array}{l} a \neq 0\,; \\ b \neq 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 > 0\,.$$

Доказательство:

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x \right)\,,$$

так как $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1,$

то требуется доказать существование таких величин углов φ или ψ, что выполняются равенства (*) .

$$\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}} \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad \exists \varphi : \ \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,;$$

если $b \geqslant 0$, то в качестве φ можно взять $\varphi = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, тогда

$$\sin\varphi = \sin\left(\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,;$$

если $b < 0$, то положим $\varphi = -\arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, тогда

$$\sin\varphi = -\sin\left(\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = -\sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2+b^2}} = -\sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2}} =$$

$$= -\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,;$$

Существование ψ доказывается совершенно аналогично.

Замечание. Если $a = b = 0$, то выражение $a\sin x + b\cos x$ при любом x обращается в нуль. Поэтому в данном случае оно не требует специального преобразования.

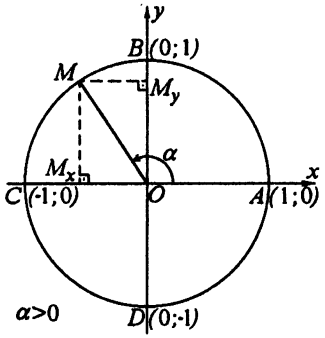


рис. 4 а)

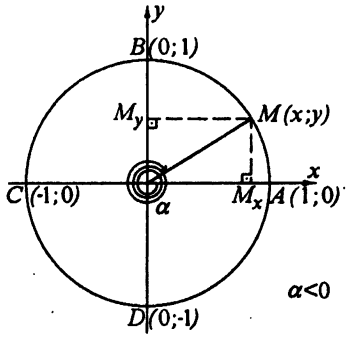


рис. 4 б)

Заменим x на α, так как x — абсцисса точки на окружности.

I. $D[\sin] = D[\cos]$ — $(-\infty, +\infty)$.

Фиксируем произвольное $\alpha \in R$, тогда в силу свойств действительных чисел однозначно определено число $\alpha/2\pi = a_0 + r_0$, где $a_0 \in Z$, причем a_0 — наибольшее целое число, не превосходящее $\alpha/2\pi$, откуда $0 \leqslant r_0 < 1$. Обозначим $k = a_0$, тогда $\alpha = 2k\pi + \alpha_0$, где $\alpha_0 = 2r_0\pi$, следовательно, $0 \leqslant \alpha_0 < 2\pi$.

В начале раздела "Тригонометрия" отмечалось, что $\alpha_0 \longleftrightarrow M$, где M — точка на единичной окружности; этой же точке отвечают числа вида $\alpha = \alpha_0 + 2k\pi \quad \forall\, k \in Z$, где $\alpha = \widehat{AOM}$. Так как

$$\sin\alpha \stackrel{df}{=} y \quad ; \quad \cos\alpha \stackrel{df}{=} x \; ;$$

где $M - M(x; y)$, то есть x — абсцисса, а y — ордината точки M, то для любого $\alpha \in R$ определены $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

II. $E[\sin] = E[\cos]$ — $[-1; 1]$.

В силу основного тригонометрического тождества

$\forall\alpha \in R \qquad 1 = (\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 \geqslant (\cos\alpha)^2$, аналогично $1 \geqslant (\sin\alpha)^2$,

откуда $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1, \qquad -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$

Остается доказать, что $E[\sin]$ и $E[\cos]$ заполняют отрезок $[-1, 1]$ целиком (см. ниже рис. 5 а), б), в)).

Фиксируем произвольные числа $a_0, a_0' \in [-1, 1], \quad a_0 \leftrightarrow M_x - M_x(x; 0)$, $a_0' \leftrightarrow M_y' - M_y'(0; y)$, ибо координатные оси — числовые прямые

(в школьном курсе без доказательства принимается факт взаимно однозначного соответствия между множествами всех действительных чисел и всех точек числовой прямой (оси)).

$OM_x = a_0$ и $OM_y' = a_0'$ — это величины отрезков OM_x и OM_y' соответственно.

В случаях $-1 < a_0 < 1$ и $-1 < a'_0 < 1$ точки M_x и M'_y внутри окружности. Восставляя перпендикуляр из точек M_x или M'_y к осям Ox и Oy соответственно, мы получим единственные точки (которые соответственно обозначим за M_0 и M'_0) их пересечения с верхней и соответственно правой полуокружностями а также — единственные точки (которые соответственно обозначим за M_1 и M'_1) их пересечения с нижней и соответственно левой полуокружностями; * точке M_0 уже *однозначно* отвечает угол с мерой α_0, а точке M_1 уже *однозначно* отвечает угол с мерой α_1, соответственно точке M'_0 уже *однозначно* отвечает угол с мерой α'_0, а точке M'_1 уже *однозначно* отвечает угол с мерой α'_1,

В случае синуса это $\alpha'_0 \in [\,-\pi/2\,,\ \pi/2\,]$, $\alpha'_1 \in [\,\pi/2\,,\ 3\pi/2\,]$,

а в случае косинуса это $\alpha_0 \in [\,0\,,\ \pi\,]$, $\alpha_1 \in [\,-\pi\,,\ 0\,]$;

$\sin\alpha'_0 = a'_0$, $\sin\alpha'_1 = a'_0$, соответственно $\cos\alpha_0 = a_0$, $\cos\alpha_1 = a_0$;

$\alpha'_0 \overset{df}{=} \arcsin a'_0$, соответственно $\alpha_0 \overset{df}{=} \arccos a_0$ и

$\alpha'_1 = \pi - \arcsin a'_0$, соответственно $\alpha_1 = -\arccos a_0$.

При $a'_0 = -1$ в случае синуса точка M'_y совпадает с точкой $M = M(0;-1)$, которая в свою очередь совпадает с точкой D, $\alpha'_0 = -\pi/2$; а в случае косинуса точка M_x совпадает с точкой $M = M(-1;0)$, которая в свою очередь совпадает с C, $\alpha_0 = \pi$. Соответствующие перпендикуляры, восстановленные из точек M'_y и M_x соответственно, будут касаться единичной окружности (см. ниже рис. 5 б).

При $a'_0 = 1$ в случае синуса точка M'_y совпадает с точкой $M = M(0;1)$, которая в свою очередь совпадает с точкой B, $\alpha'_0 = \pi/2$; а в случае косинуса точка M_x совпадает с точкой $M = M(1;0)$, которая в свою очередь совпадает с A, $\alpha_0 = 0$. Соответствующие перпендикуляры, восстановленные из точек M'_y и M_x соответственно, будут касаться единичной окружности (см. ниже рис. 5 в).

Отметим, что при $|a_0| > 1$ и $|a'_0| > 1$ перпендикуляры, восстановленные из точек $M_x \leftrightarrow a_0$ и $M'_y \leftrightarrow a'_0$ к осям Oy и Ox соответственно, не будут иметь общих точек с единичной окружностью, что является геометрическим смыслом отсутствия действительных решений уравнений $\sin x = a$ и $\cos x = a$ при $|a| > 1$ (см. ниже рис. 6 в)). (см. ниже рис. 10 в)).

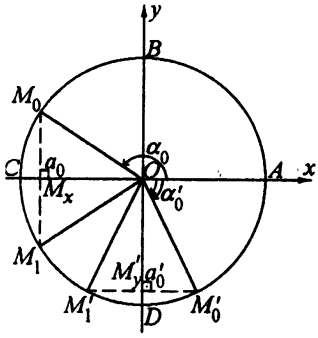
III. Из определений синуса и косинуса с помощью окружности и на основе результатов п.II вытекает:

$$\max_{\alpha\in R}\sin\alpha = 1 = \sin(\pi/2 + 2k\pi)\,,\quad \min_{\alpha\in R}\sin\alpha = -1 = \sin(-\pi/2 + 2k\pi)\,,$$

$$\max_{\alpha\in R}\cos\alpha = 1 = \cos 2k\pi,\ \min_{\alpha\in R}\cos\alpha = -1 = \cos(\pi + 2k\pi),\ k = 0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots\,.$$

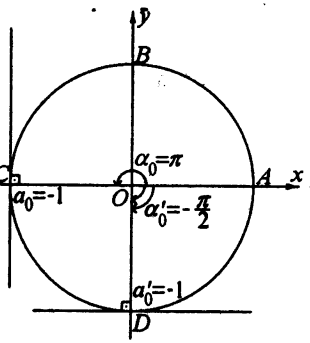
---

* Это вытекает из теорем курса геометрии о взаимном расположении прямой и окружности и о перпендикулярности диаметра и хорды окружности.



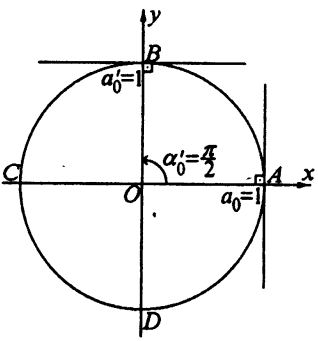
$a_0 = OM_x$, $\alpha_0 = \arccos a_0$
$\alpha_1 = -\alpha_0$,
$a'_0 = OM'_y$, $\alpha'_0 = \arcsin a'_0$
$\alpha'_1 = \pi - \alpha'_0$,

рис. 5 а)



$a_0 = OM_x = OC = -1$,
$\alpha_0 = \arccos(-1) = \pi$,
$a'_0 = OM'_y = OD = -1$,
$\alpha'_0 = \arcsin(-1) = -\pi/2$,

рис. 5 б)



$a_0 = OM_x = OA = 1$,
$\alpha_0 = \arccos 1 = 0$,
$a'_0 = OM'_y = OB = 1$,
$\alpha'_0 = \arcsin 1 = \pi/2$

рис. 5 в)

IV. $\forall \alpha \in R \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \quad , \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$
то есть синус — функция нечетная, а косинус — функция четная.

Схема доказательства.

Пусть $\alpha \in [0;\pi]$. Для $\alpha = 0$, $\pi/2$, π доказываемые равенства сразу получаются из определений синуса и косинуса.

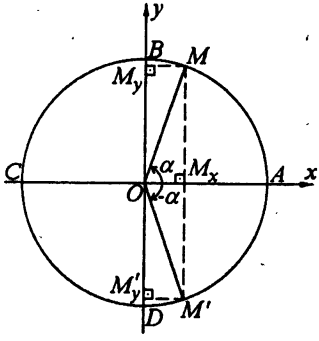


рис. 6 а)

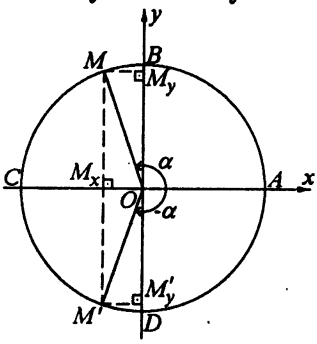


рис. 6 б)

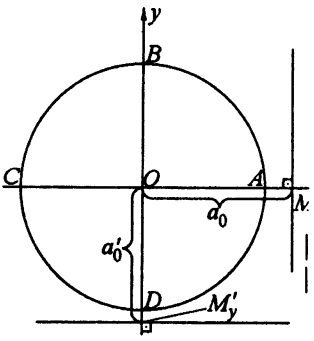


рис. 6 в)

При $0 < \alpha < \pi, \alpha \neq \pi/2$, рассматривая на рис. 6 а) (б)) треугольники $\triangle OMM_x$ и $\triangle OM_xM'$, где $MM' \perp Ox$, получим их равенство по общему катету и гипотенузе, откуда

$$\left|\widehat{M'OM_x}\right| = \left|\widehat{M_xOM}\right| = \alpha \quad (\pi - \alpha) \quad \Rightarrow \quad \widehat{AOM} = \alpha \text{ и } \widehat{AOM'} = -\alpha \ .$$

Следовательно, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha = x =$ величине отрезка OM_x, где $M_x - M_x(x;0)$.

Так как $|M_xM| = |M'M_x|$, то величина отрезка M_xM'* равна минус величине отрезка M_xM, величина отрезка M_xM равна $y = \sin\alpha$, $M - M(x;y)$, величина отрезка M_xM' равна $\sin(-\alpha) = -y$, $M' - M'(x;-y) \Rightarrow \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

Далее из равенств $\cos\alpha = \cos(-(-\alpha)) = \cos(-\alpha)$ и $\sin\alpha = \sin(-(-\alpha)) = -\sin(-\alpha)$ доказывается нечетность синуса и четность косинуса на отрезке $[-\pi, 0]$, ибо если $\alpha \in [-\pi, 0]$, то $-\alpha \in [0, \pi]$, а на этом отрезке соответствующие свойства уже доказаны.

Затем с использованием периодичности (см. п. V) доказываются равенства $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ уже для любого действительного α путем его представления в виде $\alpha = \alpha_0 + 2n\pi$, $n \in Z$, $-\pi < \alpha_0 \leqslant \pi$ и использования того, что эти равенства доказаны для α_0 следующим образом: $\sin(-\alpha) = \sin(-\alpha_0 - 2n\pi) = \sin(-\alpha_0) = -\sin\alpha_0 = \neg\sin(\alpha_0 + 2n\pi) = -\sin\alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos(-\alpha_0 - 2n\pi) = \cos(-\alpha_0) = \cos\alpha_0 = \cos(\alpha_0 + 2n\pi) = \cos\alpha$.

V. $\forall\alpha \in R, \quad n \in Z \quad \sin(\alpha + 2n\pi) = \sin\alpha, \quad \cos(\alpha + 2n\pi) = \cos\alpha$.

Эти равенства вытекают из определений синуса и косинуса с помощью окружности и того, что углам AOM с мерами α и $\alpha + 2n\pi$ отвечает одна и та же точка $M - M(x;y)$ на единичной окружности. Таким образом, функции синус и косинус — периодические с периодами $2n\pi$, $\quad n = \pm1, \pm2, \ldots$.

2π — основной период этих функций. Это доказывается на основе результатов п. VII с использованием результатов утверждения 4, доказанного в начале раздела "Тригонометрия" ; при этом в случае функции $\sin\alpha$ в качестве c, фигурирующего в этом утверждении, берется $-\pi/2$, а в качестве d берется $3\pi/2$; в случае функции $\cos\alpha$ в качестве c, берется 0, а в качестве d берется 2π.

На основе этого факта, периодичности этих функций с периодами $2\pi n$ и утверждения 3, доказанного в начале раздела "Тригонометрия" , вытекает, что никаких других периодов, кроме $2\pi n$, функции $\sin x$ и $\cos x$ не имеют.

VI. $\sin\alpha = 0 \iff \alpha = n\pi \quad \forall n \in Z$ так как углам с этими мерами на единичной окружности отвечают точки A или C с нулевыми ординатами.

$\cos\alpha = 0 \iff \alpha = \pi/2 + n\pi \quad \forall n \in Z$ так как углам с этими мерами на единичной окружности отвечают точки B или D с нулевыми абсциссами.

$\sin\alpha > 0 \iff 2n\pi < \alpha < \pi + 2n\pi \qquad \forall n \in Z$,

так как углы с такими мерами оканчиваются в I или II координатных четвертях, или на положительной части оси ординат, где соответствующая ордината y, фигурирующая в определении синуса, положительна.

---

* Если мы имеем направленный отрезок, параллельный какой-либо числовой оси или лежащий на ней, то, по определению, его величина равна его длине (минус его длине), если направление этого отрезка совпадает с положительным (отрицательным) направлением указанной числовой оси.

$\sin\alpha < 0 \iff -\pi + 2n\pi < \alpha < 2n\pi \qquad \forall n \in Z$,

так как углы с такими мерами оканчиваются в III или IV координатных четвертях, или на отрицательной части оси ординат, где соответствующая ордината y, фигурирующая в определении синуса, отрицательна.

$\cos\alpha > 0 \iff -\pi/2 + 2n\pi < \alpha < \pi/2 + 2n\pi \qquad \forall n \in Z$,

так как углы с такими мерами оканчиваются в I или IV координатных четвертях, или на положительной части оси абсцисс, где соответствующая абсцисса x, фигурирующая в определении косинуса, положительна.

$\cos\alpha < 0 \iff \pi/2 + 2n\pi < \alpha < 3\pi/2 + 2n\pi \qquad \forall n \in Z$,

так как углы с такими мерами оканчиваются во II или в III координатных четвертях, или на отрицательной части оси абсцисс, где соответствующая абсцисса x, фигурирующая в определении косинуса, отрицательна.

VII. Функция синус возрастает на каждом из отрезков $[-\pi/2 + 2n\pi, \pi/2 + 2n\pi]$ и убывает на каждом из отрезков $[\pi/2 + 2n\pi, 3\pi/2 + 2n\pi] \qquad \forall n \in Z.$

Функция косинус возрастает на каждом из отрезков $[-\pi + 2n\pi, 2n\pi]$ и убывает на каждом из отрезков $[2n\pi, \pi + 2n\pi] \qquad \forall n \in Z$.

В силу периодичности этих функций и утверждения 2, доказанного в начале раздела "Тригонометрия", достаточно доказать эти утверждения для случая $n = 0$.

Рассмотрим разность

$$\sin(x_2) - \sin(x_1) = 2\sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right) ,$$

где $-\pi/2 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \pi/2$ или $\pi/2 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 3\pi/2$.

В силу свойств числовых неравенств в первом случае :

$$0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} \; ; \; -\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2} ,$$

а во втором случае :

$$0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} \; ; \; \frac{\pi}{2} < \frac{x_2 + x_1}{2} < \frac{3\pi}{2} ,$$

откуда в силу результатов п.VI указанная разность в первом случае положительна, а во втором случае отрицательна, что и доказывает свойство монотонности функции синус.

Рассмотрим разность

$$\cos(x_2) - \cos(x_1) = -2\sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right) ,$$

где $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \pi$ или $-\pi \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 0$.

В силу свойств числовых неравенств в первом случае :

$$0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} \ ; \ 0 < \frac{x_1 + x_2}{2} < \pi \ ,$$

а во втором случае :

$$0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} \ ; \ -\pi < \frac{x_2 + x_1}{2} < 0 \ ,$$

откуда в силу результатов п.VI указанная разность в первом случае отрицательна, а во втором случае положительна, что и доказывает свойство монотонности функции косинус.

Замечание. При доказательстве свойств монотонности этих функций с помощью теоремы о знаке их производных на самом деле они обосновываются лишь для соответствующих *интервалов*, поэтому для обоснования монотонности на *отрезках* все равно необходимы дополнительные исследования.

VIII. Графики:

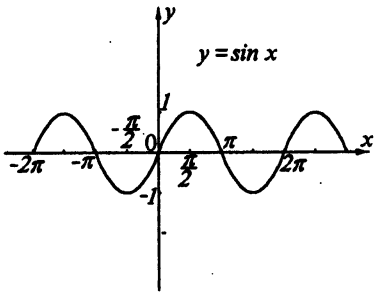


рис. 7 а)

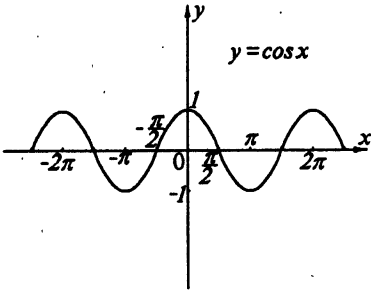


рис. 7 б)

Свойства тригонометрических функций $y = \mathrm{tg}x$ и $y = \mathrm{ctg}x$ и их графики

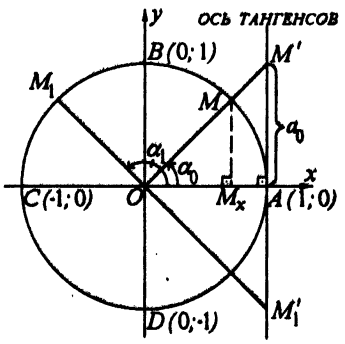
Так же, как при обосновании свойств синуса и косинуса заменим x на α,

$$\mathrm{tg}\alpha \stackrel{df}{=} \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} & \nexists \\ \cos\alpha \neq 0, & \cos\alpha = 0 \end{array} \right\}; \qquad \mathrm{ctg}\alpha \stackrel{df}{=} \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} & \nexists \\ \sin\alpha \neq 0, & \sin\alpha = 0 \end{array} \right\}.$$

I. Исходя из результатов пп. I и VI исследования функций синус и косинус, мы получаем:

$D[\mathrm{tg}]$ - любое $\alpha \in R : \alpha \neq \pi/2 + k\pi$, $D[\mathrm{ctg}]$ - любое $\alpha \in R : \alpha \neq k\pi$, $k = 0; \ \pm 1; \ \pm 2; \ \ldots$.

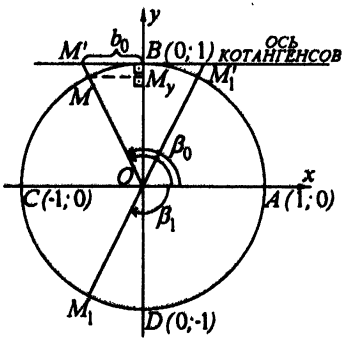
II. $E[\mathrm{tg}] = E[\mathrm{ctg}] — (-\infty, +\infty)$.



$AM' = \mathrm{tg}\alpha_0 = a_0$, $AM_1' = \mathrm{tg}\alpha_1$

$\alpha_0 = \mathrm{arctg}a_0$

рис. 8 а)



$BM' = \mathrm{ctg}\beta_0 = b_0$, $BM_1' = \mathrm{ctg}\beta_1$

$\beta_0 = \mathrm{arcctg}b_0$

рис. 8 б) *

Оси тангенсов и котангенсов являются касательными к единичной окружности в точках A и B соответственно и обладают аналогичными свойствами числовых прямых, что и оси Oy и Ox соответственно в том смысле, что положительное и отрицательное направления на оси тангенсов (котангенсов) совпадают с положительным и отрицательным направлениями оси $Oy(Ox)$; единицы измерений на них те же, что и на всей координатной плоскости, в том числе и на осях Oy и Ox; начала отсчета на оси тангенсов — точка $A(1;0)$, а на оси котангенсов — точка $B(0;1)$.

Фиксируем произвольные числа $a_0, b_0 \in R$; $a_0 \leftrightarrow M'$, $b_0 \leftrightarrow M'$ на осях тангенсов и котангенсов соответственно. $M' \leftrightarrow M$ на правой и соответственно верхней полуокружностях, M — $M(x;y)$;
$M \leftrightarrow \alpha_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$, соответственно $M \leftrightarrow \beta_0 \in (0;\pi)$; $\mathrm{tg}\alpha_0 = a_0$, соответственно $\mathrm{ctg}\beta_0 = b_0$ (см. рис. 8 а) и б)).

Докажем последние два равенства.

При $\alpha_0 \neq 0$ прямоугольные треугольники $\triangle OMM_x$ и $\triangle OM'A$ подобны как имеющие общий острый угол, следовательно,

$$\frac{|AM'|}{1} = \frac{|AM'|}{|OA|} = \frac{|M_xM|}{|OM_x|} = \frac{|y|}{|x|} = \frac{|y|}{x}.$$

Последнее равенство выполняется в силу того, что $x > 0$. Так как знаки

* На этих рисунках за AM', BM' и т.п. обозначены величины соответствующих отрезков.

величин отрезков AM' и M_xM совпадают, то и имеют место равенства

$$a_0 = AM' = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \overset{df}{=} \operatorname{tg}\alpha.$$

Если $\alpha = 0$, то точки M', M и A совпадают, а потому и в этом случае также $a_0 = AM' = 0 = \operatorname{tg}0 = \operatorname{tg}\alpha$. По определению $\alpha_0 = \operatorname{arctg}a_0$.

Соответственно при $\beta_0 \neq \pi/2$ прямоугольные треугольники $\triangle OMM_y$ и $\triangle OM'B$ подобны как имеющие общий острый угол, следовательно,

$$\frac{|BM'|}{1} = \frac{|BM'|}{|OB|} = \frac{|M_yM|}{|OM_y|} = \frac{|x|}{|y|} = \frac{|x|}{y}.$$

Последнее равенство выполняется в силу того, что $y > 0$. Так как знаки величин отрезков BM' и M_yM совпадают, то и имеют место равенства

$$b_0 = BM' = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \overset{df}{=} \operatorname{ctg}\alpha.$$

Если $\beta = \pi/2$, то точки M', M и B совпадают, а потому и в этом случае также $b_0 = BM' = 0 = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = \operatorname{ctg}\beta$. По определению $\beta_0 = \operatorname{arcctg}a_0$.

Докажем теперь *аналитическим способом* утверждение об области значений функций тангенс и котангенс, правда, существенно используя результат об области значений функций синус и косинус, который выше был получен *геометрическим способом* (см. также пп. 24 — 25 в [12]).

Фиксируем произвольное число $a \in R$ и положим,

$$c_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}, \quad d_0 = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \quad \Rightarrow \quad |c_0| < 1, \ 0 < |d_0| \leqslant 1.$$

Полагая, $\alpha = \arcsin c_0 \Rightarrow \sin\alpha = c_0$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, и на основе формулы косинуса арксинуса (см. шестая формула сверху на стр. 41) получаем:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-c_0^2} = \sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} = d_0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{c_0}{d_0} = a.$$

Теперь положим, $\alpha = \arccos c_0 \Rightarrow \cos\alpha = c_0$ и $0 < \alpha < \pi$, на основе формулы синуса арккосинуса (см. шестая формула сверху на стр. 41) получаем:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-c_0^2} = \sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} = d_0 \Rightarrow \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{c_0}{d_0} = a.$$

III. В силу результатов п.II ясно, что функции тангенс и котангенс не имеют наибольшего и наименьшего значений на своих областях определения.

IV. При исследовании четности или нечетности функций тангенс и котангенс (согласно определению этих свойств) сначала докажем, что для любого $\alpha \in D[\mathrm{tg}]$ или $\alpha \in D[\mathrm{ctg}]$, то есть $\forall\, n \in Z \quad \alpha \neq \pi/2 + n\pi$, соответственно $\forall m \in Z \quad \alpha \neq m\pi \quad -\alpha$ также принадлежит соответствующей области определения.

Предположим, что некотором α из области определения тангенса или котангенса $-\alpha$ в эту область не входит, тогда мы получим, что $-\alpha = \pi/2 + \pi n'$, $n' \in Z$, соответственно $-\alpha = \pi m'$, $m' \in Z$. Откуда $\alpha = -\pi/2 - \pi n' = \pi/2 - \pi(n'+1) = \pi/2 + \pi n_0$, где $n_0 = -(n'+1) \in Z$, соответственно $\alpha = -\pi m' = \pi(-m') = \pi m_0$, где $m_0 = -m' \in Z$. Получили противоречие. Следовательно, $\forall\, n \in Z \quad -\alpha \neq \pi/2 + n\pi$, соответственно $\forall m \in Z \quad -\alpha \neq m\pi$, то есть области определения функций тангенс и котангенс симметричны относительно начала координат.

Далее *нечетность* функций тангенс и котангенс уже непосредственно вытекает из их определений, нечетности синуса и четности косинуса следующим образом: $\forall\, \alpha \in D[\mathrm{tg}]$

$$\mathrm{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\mathrm{tg}\alpha\ ;$$

$\forall\, \alpha \in D[\mathrm{ctg}]$

$$\mathrm{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\mathrm{ctg}\alpha\ .$$

V. При исследовании периодичности функций тангенс и котангенс, согласно определению этого свойства, сначала установим, что если $\alpha \in D[\mathrm{tg}]$ или $\alpha \in D[\mathrm{ctg}]$, то $\forall m \in Z \quad \alpha + m\pi \in D[\mathrm{tg}]$, соответственно $\alpha + m\pi \in D[\mathrm{ctg}]$. Предположим, что при некотором α из области определения тангенса или котангенса и некотором целом значении $m' \quad \alpha + \pi m'$ в эту область не входит, тогда мы получим, что $\alpha + \pi m' = \pi/2 + \pi n'$, $n' \in Z$, соответственно $\alpha + \pi m' = \pi n'$, $n' \in Z$. Отсюда вытекает, что

$\alpha = \pi/2 + \pi n' - \pi m' = \pi/2 + \pi(n' - m') = \pi/2 + \pi k'$, $k' = n' - m' \in Z$, соответственно $\alpha = \pi n' - \pi m' = \pi(n' - m') = \pi k'$, $k' = n' - m' \in Z$. Следовательно, указанное значение α не входит в область определения тангенса или соответственно котангенса. Получили противоречие, которое доказывает сформулированное выше утверждение.

Далее периодичность тангенса и котангенса вытекает из их определений и формул (32) Вопроса 4 раздела "Тригонометрия" следующим образом:

$$\operatorname{tg}(\alpha + n\pi) = \frac{\sin(\alpha + n\pi)}{\cos(\alpha + n\pi)} = \frac{(-1)^n \sin\alpha}{(-1)^n \cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha\ ;$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + n\pi) = \frac{\cos(\alpha + n\pi)}{\sin(\alpha + n\pi)} = \frac{(-1)^n \cos\alpha}{(-1)^n \sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$$

при любом α из области определения функции тангенс или соответственно котангенс и любом целом значении числа n. А это и означает периодичность каждой из этих функций с периодами $n\pi$, $n = \pm 1; \pm 2; \ldots$.

VI. Из результатов п. VI исследования функций синус и косинус и определений функций тангенс и котангенс вытекает, что

$\operatorname{tg}\alpha = 0 \iff \sin\alpha = 0 \iff \alpha = n\pi$,

$\operatorname{ctg}\alpha = 0 \iff \cos\alpha = 0 \iff \alpha = \pi/2 + n\pi$,

$n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$

$\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ положительны (отрицательны) тогда и только тогда, когда функции синус и косинус принимают значения одного знака (разных знаков). Следовательно, функции тангенс и котангенс положительны на каждом из интервалов $(n\pi; \pi/2 + n\pi)$ и отрицательны на каждом из интервалов $(-\pi/2 + n\pi, n\pi)$ $\forall n \in Z$.

VII. $\operatorname{tg}\alpha$ возрастает на $(-\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi)$ $\forall n \in Z$, причем на каждом из этих интервалов *в отдельности*, а $\operatorname{ctg}\alpha$ убывает на $(n\pi; \pi + n\pi)$ $\forall n \in Z$ и также *в отдельности* на каждом из этих интервалов.

Доказательства. В силу периодичности тангенса и котангенса, утверждения 2, доказанного начале раздела "Тригонометрия", достаточно рассмотреть случай $n = 0$. Фиксируем произвольные x_1 и x_2, где $-\pi/2 < x_1 < x_2 < \pi/2$ в случае тангенса, и $0 < x_1 < x_2 < \pi$ в случае котангенса, откуда в силу свойств числовых неравенств в обоих случаях $0 < x_2 - x_1 < \pi$. Применим формулы разностей тангенсов и котангенсов аргументов x_2 и x_1 :

$$\operatorname{tg}x_2 - \operatorname{tg}x_1 = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_2 \cos x_1}; \qquad \operatorname{ctg}x_2 - \operatorname{ctg}x_1 = -\frac{\sin(x_2 - x_1)}{\sin x_2 \sin x_1},$$

Эти формулы доказаны выше, в Вопросе 3 (формула (7) и (8) для знака " $-$ "). В силу результатов исследования п.VI о промежутках знакопостоянства функций синус и косинус, мы и получаем, что

$$\operatorname{tg}x_2 - \operatorname{tg}x_1 > 0 \quad ; \quad \operatorname{ctg}x_2 - \operatorname{ctg}x_1 < 0\ .$$

Отсюда и вытекают доказываемые утверждения.

Замечание. Утверждения этого пункта можно доказать с помощью теоремы о знаке производной.

В силу результатов этого пункта, а также утверждения 5, доказанного в начале раздела "Тригонометрия" вытекает, что π — основной период рассматриваемых функций. При этом в случае функции $\mathrm{tg}\alpha$ в качестве c, фигурирующего в этом утверждении, берется $-\pi/2$, а в качестве d берется $\pi/2$; в случае функции $\mathrm{ctg}\alpha$ в качестве c, берется 0, а в качестве d берется π.

На основе этого факта, периодичности этих функций с периодами πn, и утверждения 3, доказанного начале раздела "Тригонометрия", устанавливается, что никаких других периодов, кроме πn, функции $\mathrm{tg}x$ и $\mathrm{ctg}x$ не имеют.

VIII. Графики:

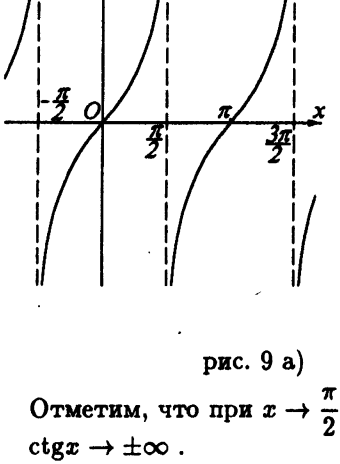


рис. 9 а)

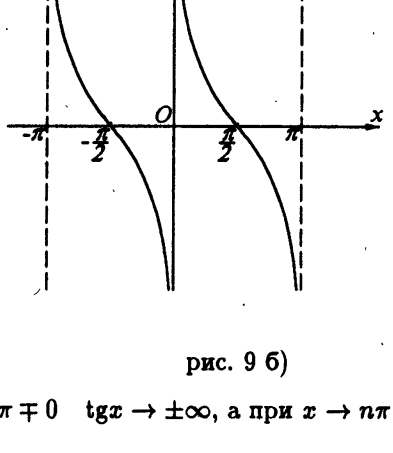


рис. 9 б)

Отметим, что при $x \to \dfrac{\pi}{2} + n\pi \mp 0$ $\mathrm{tg}x \to \pm\infty$, а при $x \to n\pi \pm 0$ $\mathrm{ctg}x \to \pm\infty$.

(знаний формулировок соответствующих определений не требуется).

Материал к вопросам по тригонометрии можно найти, например, в [1].

2.3. Геометрия

В настоящем издании книги этот раздел существенно переработан. Теперь в п. 2.3.1 помимо определений и формулировок теорем даны *подробные доказательства*, которые необходимо знать на устном экзамене. При этом, стремясь к единой схеме изложения материала, мы приводим системы основных (первичных) понятий и аксиом, на основе которых вводятся определения тех или иных геометрических объектов, формулируются и доказываются теоремы. Помимо этого в п. 2.3.0 формулируется и ряд утверждений, выводимых из этих аксиом. Эти утверждения можно знать и использовать на экзаменах *без доказательств*. Особо следует обратить внимание на определения луча, отрезка, угла и связанных с ними понятий, определения сравнения отрезков и углов, определения арифметических операций над отрезками и углами, длины отрезка и величины (меры) угла и их свойства. В конце раздела "Геометрия" даются, в частности, ссылки на учебники списка литературы [5] — [9], в которых тоже можно найти все необходимые формулировки и доказательства (см. список литературы на стр. 249 —250).

Отметим, что вместо учебников [8] и [9] можно соответственно использовать (с точно такими же ссылками) следующие учебники:
Киселев А.П. "Геометрия, часть первая, планиметрия." Учебник для 6—9 классов средней школы. — М.: Учпедгиз, 1961 (можно и более ранние издания).
Киселев А.П. "Геометрия, часть вторая, стереометрия." Учебник для 9—10 классов средней школы. — М.: Просвещение, 1974 (можно и более ранние издания).

Можно также использовать материал книги [12], п. 39 — 82.

В ряде случаев при изложении основной части ответов на некоторые теоретические вопросы могут возникать важные дополнительные вопросы, ответы на которые сразу приводятся.

В дополнительной части раздела "Геометрия" (в п. 2.3.2) приводятся различные варианты определений ряда геометрических фигур и отношений между элементами этих фигур, которые используются в различных учебниках. Помимо этого (что очень важно!) приводятся примеры того, как надо внимательно следить за логической последовательностью вводимых определений и доказываемых теорем в том или ином учебнике геометрии (о чем уже упоминалось в конце п.1.2 раздела II и с чем, в частности, связаны приведенные варианты определений). Формальное заучивание доказательств одних теорем по одному учебнику, а других теорем — по другому может привести к недопустимому в математике логическому кругу, в

котором может оказаться, что доказательство той или иной теоремы или использует то, что в данной теореме доказывается, или ссылку на теорему, которая доказывается на основе еще не доказанной теоремы.

2.3.0. Вводная часть. Об используемой системе основных (первичных) понятий и аксиом; об утверждениях геометрии, которые можно использовать на экзаменах без доказательств; о понятиях луча, отрезка, угла и их свойствах и измерениях

В геометрии рассматриваются три основных множества объектов:

объекты первого множества, именуемые *точками*, как правило, они обозначаются большими латинскими буквами $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$ и т.п. ;

объекты второго множества, именуемые *прямыми*, как правило, они обозначаются малыми латинскими буквами a , b , c , d , e , ℓ и т.п. ;

объекты третьего множества, именуемые *плоскостями*, как правило, они обозначаются малыми греческими буквами α , β , γ , δ , π и т.п.

Понятия "точка", "прямая", "плоскость" относятся к так называемым *первичным* (основным) понятиям, которые строго не определяются и представляются интуитивно.

Совокупность всех точек, прямых и плоскостей называют *пространством*. Другими словами, можно сказать, что совокупность всех точек, прямых и плоскостей образует пространство.

Абстрактно (в идеале) математическая точка не имеет никаких размеров, математическая прямая не имеет ни ширины, ни толщины, неограниченно распространяется в обе стороны и состоит из бесконечного количества точек, математическая плоскость не имеет толщины, неограниченно распространяется и в длину, и в ширину, она состоит из бесчисленного количества точек и прямых. *

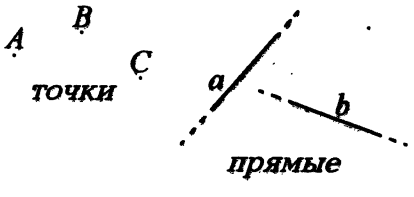


рис. 1 а)

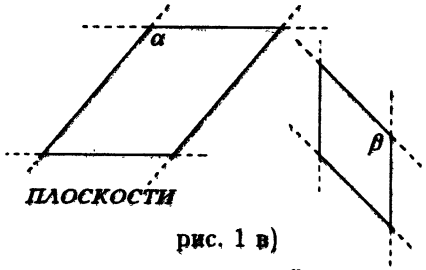


рис. 1 б)

рис. 1 в)

Под терминами "две, три и т.д. точки, прямые, плоскости" обычно понимаются все *различные* точки, прямые, плоскости. Для них используются

* Наличие бесконечного количества точек на прямой и бесконечного количества точек и прямых на плоскости, а также — бесконечного количества плоскостей в пространстве можно доказать на основе первых 12 следующих ниже аксиом.

обозначения *разными* буквами: A , B , C для точек, a , b , d для прямых, α , β , γ для плоскостей (см. рис. 1 а), б), в).

В случае совпадения точек, прямых и плоскостей мы будем считать их, по сути дела, одной точкой, одной прямой, одной плоскостью, и обозначать соответственно $A \equiv B$, $b \equiv c$, $\alpha \equiv \beta$, причем каждый раз, когда эта ситуация имеет место, это будет специально оговариваться.

Если точки A и B , прямые b и c , плоскости α и β — различные, то это соответственно обозначается $A \not\equiv B$, $b \not\equiv c$, $\alpha \not\equiv \beta$.

В рассматриваемых трех множествах как первичные понятия вводятся следующие отношения между объектами: "принадлежит" (обозначается $\in$), "не принадлежит" (обозначается $\notin$), "лежит между", "не лежит между" , "наложен" ("совмещен"). *

При этом, если точки A и B принадлежат прямой a (то есть $A \in a$ и $B \in a$), то говорят, что прямая a соединяет точки A и B, или прямая a проходит через точки A и B .

Если точка A принадлежит прямой a ($A \in a$) , а точка C не принадлежит прямой a ($C \notin a$) , то говорят, что "точка A лежит на прямой a" , а "точка C не лежит на прямой a", или "прямая a проходит через (содержит) точку A" , но "прямая a не проходит через (не содержит) точку C" (см. рис. 2 а) и т.п. Если точка A принадлежит плоскости α ($A \in \alpha$) , а точка B не принадлежит плоскости α ($B \notin \alpha$) , то говорят, что "точка A лежит на (в) плоскости α" или что "плоскость α проходит через (содержит) точку A" , а "точка B не лежит на (в) плоскости α" или что "плоскость α не проходит через (не содержит) точку B" ** (см. рис. 2 б) и т.п.

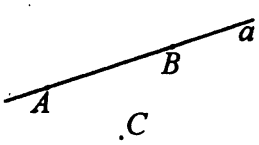


рис. 2 а)

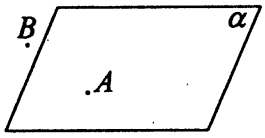


рис. 2 б)

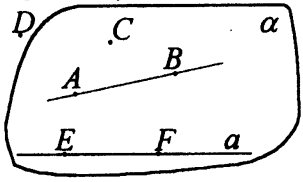


рис. 2 в)

Основные понятия "точка", "прямая", "плоскость" и указанные отношения между ними "принадлежит", "не принадлежит", "лежит между", "не лежит между", "наложен" ("совмещен") удовлетворяют (подчинены) аксиомам (утверждениям, принимаемым без доказательств). Эти аксиомы условно разбиты на группы:

---

* то есть принята схема изложения, характерная для учебников [6], [7], [8], [9], хотя она полностью ни с одним из этих учебников не совпадает.

** На основе первых 12 следующих ниже аксиом можно доказать, что через каждую точку проходит бесконечно много прямых и бесконечно много плоскостей, через каждую прямую проходит бесконечно много плоскостей.

I группа — *аксиомы принадлежности (соединения или связи)*, их всего 8;
II группа — *аксиомы порядка*, их всего 4 ;
III группа — *аксиомы наложения (совмещения)*, их всего 7 ;
IV группа — *аксиомы непрерывности*, их всего 2 ;
V группа — всего одна аксиома, *аксиома параллельности* .

Переходим к формулировкам аксиом и вытекающих из них утверждений, а также — определений. Сразу же отметим, что все аксиомы, определения и утверждения, приведенные в данном п. 2.3.0, будут пронумерованы, начиная с номера 1, и в дальнейшем при ссылке на аксиому с тем или иным номером, на определение с тем или иным номером, на утверждение с тем или иным номером будем соответственно говорить "в силу А2", "в силу О3", "в силу У4", что будет соответственно означать: идет ссылка на аксиому 2, на определение 3, на утверждение 4 и т.п. Доказательства большинства сформулированных утверждений можно найти в книгах [17] и [18]. В отдельных случаях будут даваться и ссылки на учебники [5] — [9], книгу [10] и справочные пособия [13] и [16].

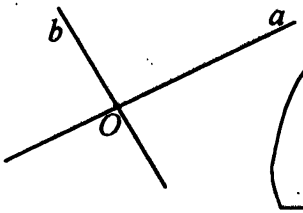


рис. 2 г)

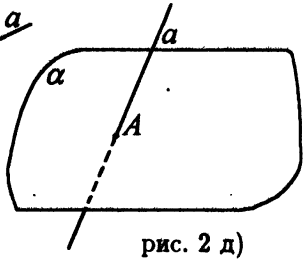


рис. 2 д)

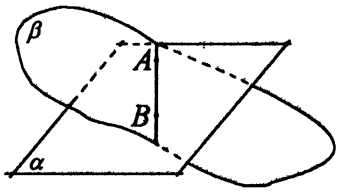


рис. 2 е)

I. Аксиомы принадлежности

Аксиома 1. На каждой прямой существуют по крайней мере две точки (см. рис. 2 а).

Аксиома 2. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой (см. рис. 2 а).

Аксиома 3. Для любых двух точек существует единственная прямая, проходящая через них ($\forall\, A\,,\ B\quad \exists a\ :\ A \in a$ и $B \in a$) (см. рис. 2 а). Таким образом, прямая однозначно определяется парой различных точек, через которые она проходит. Если обозначить эти точки за A и B , то мы будем обозначать эту прямую (AB) или (BA).

Аксиома 4. Для любой плоскости существует по крайней мере одна, принадлежащая ей точка (см. рис. 2 б).

Аксиома 5. Для любых трех точек, не лежащих на одной прямой, существует единственная плоскость, проходящая через эти точки ($\forall\, A\,,\ B\,,\ C\ :\ C \notin (AB)\quad \exists!\alpha\ :\ A \in \alpha\,,\ B \in \alpha\,,\ C \in \alpha$) (см. рис. 2 в). Таким образом, плоскость однозначно определяется тремя различными точками, не лежащими на одной прямой, через которые она проходит. Если обозначить эти точки за A , B и C), то мы будем обозначать эту плоскость или (ABC) , или (CBA) , или (BCA) и т.п.

Аксиома 6. Если две точки некоторой прямой лежат в плоскости, то и любая точка (то есть все точки) этой прямой лежат в этой плоскости (см. рис. 2 в), $E \neq F,\ E, F \in \alpha\ E, F \in a \Rightarrow a \in \alpha$).

Определение 1. Если любая точка некоторой прямой лежит в некоторой плоскости, то говорят, что вся эта прямая лежит в указанной плоскости (если $\forall\ A \in a\ \Rightarrow\ A \in \alpha$, то $a \in \alpha$).

Аксиома 7. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют по крайней мере еще одну общую точку
(из $\exists\ A \in \alpha$ и $A \in \beta\ \Rightarrow\ \exists B \neq A\ :\quad B \in \alpha$ и $B \in \beta$) (см. рис. 2 е).

Аксиома 8. Существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости (см. рис. 2 в), точки A, B, C, D).

С помощью аксиом 1 — 8 (А1 — А8) могут быть доказаны некоторые утверждения.

Утверждение 1:

А) *Две не совпадающие прямые имеют не более одной общей точки.*

Это утверждение означает, что две прямые либо не имеют общих точек, либо имеют единственную общую точку.

Б) *Две различные плоскости либо не имеют общих точек, либо имеют общую прямую, которой принадлежат все общие точки этих плоскостей.*

В) *Плоскость и не лежащая на ней прямая имеют не более одной общей точки.*

Это утверждение означает, что плоскость и не лежащая на ней прямая либо не имеют общих точек, либо имеют единственную общую точку. Док-во см. [17], гл. II, §12, теорема 1 и [18], гл. I, §2, теорема 1 и примеч. 4

Определение 2.

А) *Две прямые, имеющие единственную общую точку называются* **пересекающимися**, *указанная точка называется их* **точкой пересечения** (см. рис. 2 г).

Б) *Две плоскости, имеющие общую прямую, содержащую все их общие точки называются* **пересекающимися** *или* **пересекающимися по указанной прямой**, *(эта прямая называется* **прямой их пересечения**) (см. рис. 2 е).

В) *Прямая и плоскость, имеющие единственную общую точку называются* **пересекающимися**, *указанная точка называется их* **точкой пересечения** (см. рис. 2 д).

Утверждение 2. Через прямую и не лежащую на ней точку, так же как и через две пересекающиеся прямые проходит одна и только одна (единственная) плоскость.

Доказательство см. [17], гл. II, § 12, теорема 2 и [18], гл. I, §2 теорема 2 и примечание 4.

Замечание. В учебниках [5], [7] и [9] *в качестве аксиомы* формулируется утверждение о наличии прямой, по которой пересекаются две плоскости в случае существования у них общей точки, хотя определение пересечения плоскостей перед этим не сформулировано. Однако, если указанное определение перед этой аксиомой сформулировать, то, как нетрудно видеть, согласно приведенным аксиомам стереометрии в учебниках [7] и [9] утверждение 1 Б) в случае наличия у двух плоскостей общей точки и аксиома 7 — утверждения *эквивалентные*, то есть если имеет место одно из этих утверждений, то можно доказать другое. Что касается учебника [5] и книги [10], то в них иная картина: в качестве аксиом принимается наличие у каждой прямой и у каждой плоскости как точек, принадлежащих им, так и точек, не принадлежащих им. Это, например, приводит к тому, что утверждение аксиомы А6 становится теоремой, доказанной после доказательства У2, и тут не приходится говорить об эквивалентности А7 и У1 Б).

Утверждение 3. Каждая плоскость содержит по крайней мере три точки. Доказательство см. [17], гл. II, §12, теорема 3.

II. Аксиомы порядка

Аксиомы порядка подчиняют первичное понятие "лежит между" ряду аксиом, на основе которых и самого этого понятия делается возможным установить *порядок* точек как на прямой, лежащей в некоторой плоскости, так и на прямой, находящейся в пространстве. Это, в частности, играет важную роль при введении систем координат как на прямой, так и на плоскости, и в пространстве.

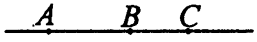


рис. 3 а)

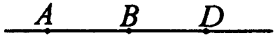


рис. 3 б)

Аксиома 9. Если на некоторой прямой a расположены три точки A, B, C, и точка B лежит между точками A и C, то A, B, C — различные точки этой прямой, и точка B лежит между точками C и A (см. рис. 3 а).

Аксиома 10. Каковы бы ни были точки A и B $(A \not\equiv B)$ на прямой (AB), существует по крайней мере одна точка D такая, что точка B лежит между точками A и D (см. рис. 3 б).

Аксиома 11. Среди любых трех точек прямой существует не более одной, лежащей между двумя другими этими точками.



рис. 3 в)

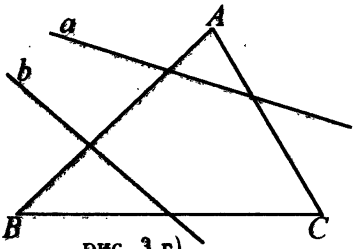


рис. 3 г)

Определение 3. Пару точек A и B будем называть **отрезком** *и обозначать AB или BA .* Если точки A и B совпадают $(A \equiv B)$, то отрезок AA или BB называется* **нулевым**, *если точки A и B — различные $(A \not\equiv B)$, то отрезок AB будем называть* **ненулевым**. *Каждую точку прямой (AB), лежащую между точками A и B , будем называть* **внутренней точкой** *отрезка AB . Каждую точку прямой (AB), отличную от точки A и от точки B и не лежащую между точками A и B, будем называть* **внешней точкой** *отрезка AB . Сами точки A и B , определяющие отрезок AB , будем называть* **концами отрезка** AB (см. рис. 3 в).

На рис. 3 в) AB — ненулевой отрезок, C — его внутреняя точка, D — его внешняя точка, EE — нулевой отрезок (точка).

Всюду в дальнейшем к точкам отрезка AB мы будем относить как его концы, так и его внутренние точки.

Отметим, что нулевой отрезок AA не имеет внутренних точек, а в качестве его внешних точек можно брать все точки любой, проходящей через него фиксированной прямой. Этих прямых может быть бесчисленное множество (последний факт мы формулируем без доказательства).

Отметим, что А10 гарантирует наличие лишь внешних точек отрезка у всякого ненулевого (то есть не являющегося нулевым) отрезка AB .

Аксиома 12 (аксиома Паша). *Пусть A , B , C — три точки, не лежащие на одной прямой, и a — прямая, лежащая в плоскости (ABC) и не проходящая ни через одну из точек A , B и C . Тогда, если эта прямая проходит через точку отрезка AB , то она проходит или через точку отрезка BC , или через точку отрезка AC* (см. рис. 3 г).

* Обращаем внимание на различие в обозначениях прямой (AB) и отрезка AB .

На нем прямая a , проходящая через внутреннюю точку отрезка AB, проходит через внутреннюю точку отрезка AC ; прямая b , проходящая через внутреннюю точку отрезка AB , проходит через внутреннюю точку отрезка BC .

Таким образом, к аксиомам порядка относят аксиомы А9 — А12. Отметим, что аксиомы А9 — А11 относят еще и к *линейным* аксиомам порядка.

Утверждение 4. Для любых двух точек A и B на прямой (AB) $(A \neq B)$ существует по крайней мере одна точка C , лежащая между точками A и B .

Доказательство см. [17], гл. II, §14, теорема 4 и [18], гл. I,§ 4, теорема 3.

Из У4 непосредственно следует, что наличие внутрених точек у ненулевого отрезка можно доказать в качестве теоремы.

Вместе с А10 и У4 получаем, что каждый ненулевой отрезок на прямой имеет как внутренние, так и внешние точки (см. рис. 3 в).

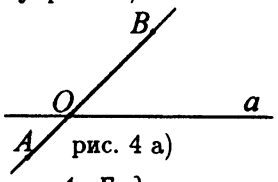


рис. 4 а)

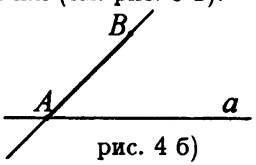


рис. 4 б)

Определение 4. Будем говорить, что ненулевой отрезок AB и прямая a **пересекаются**, *если прямые a и (AB) — различные и пересекаются в некоторой внутренней точке O отрезка AB . Если прямые a и (AB) пересекаются или в точке A , или — в точке B , то будем говорить, что прямая a* **проходит через** *соответствующий конец отрезка AB* (см. соответственно рис. 4 а) и рис. 4 б).

Так как точка пересечения у прямых всегда единственная, то и точка пересечения у прямой и отрезка также единственная или прямая проходит через один и только один конец отрезка.

После этого определения аксиому Паша можно сформулировать следующим образом: пусть A , B , C — три точки, не лежащие на одной прямой, и a — прямая, лежащая в плоскости (ABC) и не проходящая ни через одну из точек A , B и C . Тогда, если эта прямая пересекает отрезок AB , то она пересекает или отрезок BC , или отрезок AC (см. рис. 3 г).

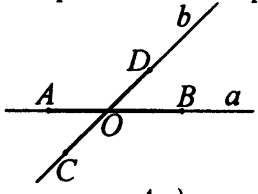


рис. 4 в)

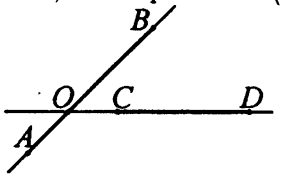


рис. 4 г)

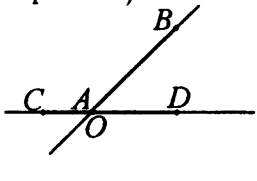


рис. 4 д)

Определение 5. Два ненулевых отрезка AB и CD называются **пересекающимися**, *если прямые (AB) и (CD) пересекаются в точке O, причем эта точка является внутренней точкой как отрезка AB, так и отрезка CD* (см. рис. 4 в).

Отметим, что возможны ситуации, когда прямые (AB) и (CD) пересекаются в точке O, а эта точка является либо внешней точкой хотя бы одного из отрезков AB или CD, либо концом хотя бы одного из этих отрезков, в каждом из этих случаев мы не будем считать отрезки AB и CD пересекающимися (см. рис. 4 г), д), е), ж), з). На рис. 4 з) отрезки AB и CD лежат на пересекающихся прямых в точке, являющейся их общим концом $A \equiv C \equiv O$.

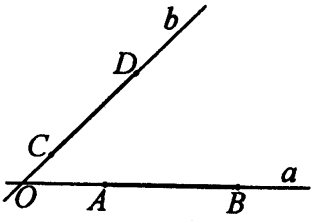


рис. 4 е)

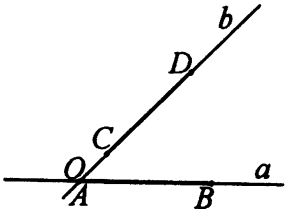


рис. 4 ж)

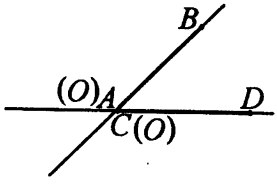


рис. 4 з)

Утверждение 5. Среди трех точек на одной прямой всегда существует одна из них, лежащая между двумя другими точками.

Доказательство см. [17], гл. II, §14, теорема 5 и [18], гл. I, §4, теорема 4.

Следствие. Из А11 и У5 непосредственно вытекает: среди трех точек на одной прямой существует одна и только одна из них, лежащая между двумя другими.

Замечание. В учебниках [5], [6] и [7] утверждение этого следствия, которое по своей сути является теоремой, формулируется *в качестве аксиомы.*

Утверждение 6. Если точки A, B, C не лежат на одной прямой, и если прямая a, лежащая в плоскости (ABC), пересекает какие-либо два из трех отрезков AB, BC, AC, то она не пересекает третий из этих отрезков (см. рис. 3 г).

Доказательство см. [17], гл. II, §14, теорема 5а.

Следствие. Из А12 и У6 и О4 непосредственно вытекает: пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, и a — прямая, лежащая в плоскости (ABC) и не проходящая ни через одну из точек A, B и C, тогда, если эта прямая пересекает отрезок AB, то она пересекает еще один и только один из оставшихся отрезков: либо отрезок BC, либо отрезок AC (см. рис. 3 г).

Определение 6. Будем говорить, что точка C является **точкой отрезка AB (точка C принадлежит отрезку AB),** *обозначается $C \in AB$, если точка C является внутренней точкой этого отрезка* (см. рис. 3 в).

Замечание. В случае, когда точка C совпадает с одним из концов отрезка AB , то есть или $C \equiv A$, или $C \equiv B$, то мы тоже будем считать ее принадлежащей отрезку AB , но этот случай будет специально оговариваться и обозначаться $C \equiv A \in AB$, или $C \equiv B \in AB$.



рис. 5 а)

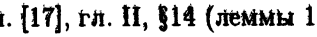


рис. 5 б)

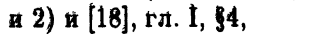


рис. 5 в)

Утверждение 7. Если $B \in AC$ и $C \in BD$, то $B, C \in AD$ (см. рис. 5 а).

Утверждение 8. $C \in AD$, $B \in AC \Rightarrow B \in AD$, $C \in BD$ (см. рис. 5 а).

Доказательства см. [17], гл. II, §14 (леммы 1 и 2) и [18], гл. I, §4, теорема 5, примечания 8 , 9.

На основе этих утверждений можно доказать (см. [18], гл. I, §4, теорема 6) следующее утверждение:

Утверждение 9. При любом натуральном числе $n \geqslant 3$ различные $n+1$ точку на прямой a можно обозначить так, что $\forall\, i = 1$, 2 , 3 , ... , $n-1$ и $\forall\, k$, $m \in N_0$: $0 \leqslant k < i < m \leqslant n$ точка A_i будет лежать между точками A_k и A_m $(A_i \in A_k A_m)$, то есть A_0 , A_1 , A_2 , ... A_{n-1} , A_n, причем при выполнении указанных условий возможен еще только обратный порядок расположения точек A_n , A_{n-1} , ... , A_2 , A_1 , A_0 (см. рис. 5 б), 5 в).

Утверждение 10. Между любыми двумя точками на прямой существует бесчисленное множество точек. Другими словами, каждый ненулевой отрезок на прямой имеет бесчисленное множество внутренних точек.

Доказательство см. [17], гл. II, §14, теорема 6 и [18], гл. I, §4, теорема 7, примечание 12.

Замечание. Следует отметить, что традиционно в учебной литературе (см., в частности, учебники [5] — [9], книги [10], [11]) отрезок *определяется* как множество всех точек прямой, лежащих между двумя точками этой прямой, эти две точки называются концами отрезка, а точки, лежащие между ними, называются внутренними точками отрезка.

Подобный подход к введению определения отрезка вызван исключительно стремлением привести в соответствие наглядные представления об отрезке с его определением, видимо, для более легкого восприятия материала учащимися. Этими же обстоятельствами вызваны и упоминавшиеся

выше замечания об "аксиомах", которые на самом деле являются теоремами. Кстати, в учебнике [6] в приложении об аксиомах геометрии говорится об одной такой "аксиоме", которая в действительности является теоремой, и в качестве аксиомы она приведена исключительно для упрощения изложения материала (см. ниже У15 и то же самое касается У18), что, быть может, простительно с точки зрения ориентации *не только на учащихся*, готовящихся поступать в вузы с повышенными требованиями к знанию математики.

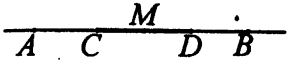


рис. 5 г)

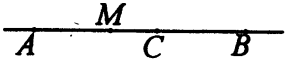


рис. 5 д)

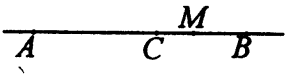


рис. 5 е)

Утверждение 11. Если $C \in AB$, $D \in AB$, $C \not\equiv D$, *то* $\forall M \in CD \Rightarrow M \in AB$ (см. рис. 5 г).

Доказательство см. [17], гл. II, §14, теорема 7.

Определение 7. В случае выполнения условий У11 говорят, что отрезок CD **целиком лежит внутри отрезка** AB (это обозначается $CD \subset AB$) (см. рис. 5 г).

Утверждение 12. Если $C \in AB$ $(A \not\equiv B)$, *то* $\forall M \in AC \Rightarrow M \in AB$ (см. рис. 5 д).

Доказательство. Это утверждение непосредственно вытекает из У8 .

Утверждение 13. Если $C \in AB$ $(A \not\equiv B)$, то $\forall M \in AC \Rightarrow M \notin CB$ (см. рис. 5 д).

Доказательство см. [17], гл. II , §14, теорема 8а.

Утверждение 14. Если $C \in AB$ $(A \not\equiv B)$, *то* $\forall M \in AB$, $M \not\equiv C \Rightarrow$ $\Rightarrow$ $M \in AC$ *или* $M \in CB$ (см. рис. 5 е).

Доказательство см. [17], гл. II, §14, теорема 8б.

Замечание. Из У12 — У14 непосредственно вытекает, что если $C \in AB$, M_1 — множество всех внутренних точек отрезка AC , M_2 — множество всех внутренних точек отрезка CB , то отрезок AB представляет собой объединение $AB = \{A\} \cup \{C\} \cup \{B\} \cup M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \varnothing$.

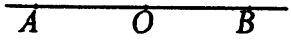


рис. 6 а)

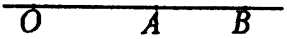


рис. 6 б)

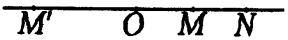


рис. 6 в)

Определение 8. Пусть O *— некоторая точка прямой* a , A *и* B *— две другие точки этой же прямой. Если* $O \in AB$ $(O \notin AB)$, *то говорят, что точки* A *и* B **расположены по разные стороны (по одну сторону)** *относительно точки* O , *или говорят, что точка* O **разделяет (не разделяет)** *точки* A *и* B (см. рис. 6 а) (6 б)).

Утверждение 15. Всякая точка O на прямой a разделяет все остальные точки этой прямой на два непустых класса (две полупрямые) так, что любые две точки одного класса расположены по одну сторону от точки O, то есть не разделяются точкой O, а любые две точки разных классов расположены по разные стороны от точки O, то есть разделяются точкой O . См. рис. 6 в), на котором точки M и N расположены на одной полупрямой относительно точки O , а точки M и M' расположены на разных полупрямых относительно точки O .

Доказательство см. [17], гл. II, §14, теорема 9 и [18], гл. I, §4, теорема 8.

Схема доказательства. Доказывается, что :

1) каждый из указанных классов не пуст ;

2) каждая точка прямой a , отличная от точки O попадает в один и только один класс ;

3) если M и N — две точки из одного класса, то точка $O \notin MN$;

4) если M и M' — две точки из разных классов, то точка $O \in MM'$.

У15 позволяет ввести важное определение геометрии, определение *луча*.

Определение 9. Пусть на прямой a выбраны точки O и A $(O \neq A)$. **Лучом (полупрямой)**, *определенным указанными точками, называется множество всех точек прямой a , расположенных вместе с точкой A по одну сторону относительно точки O , включающее в себя и точку A* (обозначается OA). *Точка O называется* **началом** *луча, ее считают* **границей** *луча, а также* **точкой приложения** *указанного луча.*

Если точку O считать *не принадлежащей* указанному в этом определении множеству, то такой луч называют *открытым лучом*, а если точку O считать *принадлежащей* указанному множеству, то такой луч называют *замкнутым лучом*.

Договоримся, что если рассматривать замкнутый луч, то это будет всегда оговариваться, если речь идет просто о луче, то под этим будет подразумеваться открытый луч.

Отметим, что в отличии от отрезка, в обозначении которого не существенен порядок его концов, в обозначении луча двумя буквами всегда на первое место будет ставиться его начало.

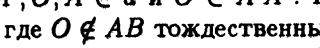


рис. 6 г)

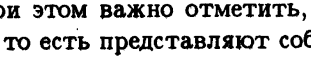


рис. 6 д)

У15 означает, что на прямой a определены два луча — луч OA и луч OA' , где $A', O, A \in a$ и $O \in A'A$. При этом важно отметить, что лучи OA и OB , где $O \notin AB$ тождественны, то есть представляют собой одно и то же множество точек на прямой a (один и тот же луч), лучи OA' и OB' также тождественны, где $O \in AA'$ и $O \in BB'$ (см. рис. 6 г).

Определение 10. Если точки A', O, A на одной прямой a и $O \in A'A$, то лучи OA и OA' называются **взаимно дополнительными**, *каждый из них называется дополнительным по отношению к другому.*

Если один из взаимно дополнительных лучей обозначить h , то другой из них обозначается $\overline{h}$ (см. рис. 6 г).

В связи со справедливостью У15 на любой прямой можно выбирать *порядки* расположения точек (всего их возможно лишь два) и с каждым из этих порядков определяется *направление*, которых, стало быть, тоже два; каждое из этих направлений считается *противоположным* по отношению друг к другу.

Пусть O — произвольная точка на прямой a . Рассмотрим произвольную из двух полупрямых, на которые точка O делит прямую a .

Определение 11. Будем говорить, что точка A **предшествует** *точке B на полупрямой (точка B* **следует за** *точкой A на этой полупрямой), если точка A — внутренняя точка отрезка OB* ($A \in OB$), обозначается $A \prec B$. (См. рис. 6 д), на котором $A \prec B$, $B \prec C$).

Из У8 вытекает, что если $A \prec B$, $B \prec C$, то $A \prec C$, то есть отношение "предшествует", так же как и отношение "следует за" обладает свойством транзитивности (см. рис. 6 д).

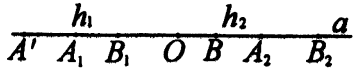


рис. 6 е)

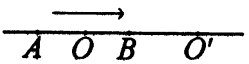


рис. 6 ж)

Назовем условно одну из полупрямых прямой a с началом в точке O *первой* и обозначим ее h_1 , а дополнительную ей полупрямую назовем *второй* и обозначим ее h_2 ($h_2 \equiv \overline{h_1}$), установим порядок точек *на всей прямой* a следующим образом:

1) если A_1 и B_1 — две точки первой полупрямой ($A_1, B_1 \in h_1$),
то $A_1 \prec B_1$ на прямой, если $B_1 \prec A_1$ на этой полупрямой ;
2) $\forall A' \in h_1 \Rightarrow A' \prec O$;
3) $\forall A' \in h_1$, $\forall B \in h_2 \Rightarrow A' \prec B$;
4) $\forall B \in h_2 \Rightarrow O \prec A$;
5) если A_2 и B_2 — две точки второй полупрямой ($A_2, B_2 \in h_2$),
то $A_2 \prec B_2$ на прямой, если $A_2 \prec B_2$ на этой полупрямой (см. рис. 6 е).

Утверждение 16. Каковы бы ни были две точки на прямой a , условия 1) — 5) определяют одну из них как предшествующую другой на этой прямой. Условия транзитивности отношения "предшествует" при этом будут выполнены.

Доказательство см. [17], гл. II, §14, стр. 50 — 51.

Замечание 1. Если поменять ролями первую и вторую полупрямые и реализовать условия 1) — 5), то мы получим новый порядок точек на всей прямой a, являющийся *противоположным* по отношению к первоначальному порядку точек на этой прямой, а именно, если из двух точек A и B $A \prec B$ в смысле одного из этих порядков, то $B \prec A$ в смысле противоположного ему порядка (см. рис. 6 ж).

Замечание 2. Можно доказать, что если на прямой a выбрать точку $O' \not\equiv O$ и выбрать на этой прямой одну из полупрямых с началом в точке O' и относительно уже точки O' установить порядок точек на прямой a согласно условиям 1) — 5), то этот порядок точек будет совпадать с одним из двух возможных порядков точек на прямой a относительно точки O (см. рис. 6 ж).

Замечание 3. У16 играет важную роль при введении системы координат на прямой, на плоскости и в пространстве, где одним из составных условий этого метода является наличие *положительного* и противоположного ему *отрицательного* направлений на координатных осях (см. выше определения 6 и 7 п. 2.0.3). Что касается терминов расположения одной из двух точек на координатных осях правее или левее другой, а также — расположения выше или ниже другой, то это означает, что точка, расположенная на координатной оси левее или ниже, предшествует точке на этой оси, расположенной правее или соответственно выше.

С помощью определения порядка точек на прямой можно доказать и такое утверждение.

Утверждение 17. А) *Если точка B лежит между точками A и C на прямой a ($B \in AC$), то или $A \prec B$, $B \prec C$, или $C \prec B$, $B \prec A$.*
Б) *Обратно, если на прямой a или $A \prec B$, $B \prec C$, или $C \prec B$, $B \prec A$, то точка B лежит между точками A и C.*
Доказательство: об этом утверждении говорится в [17], гл. II, §14, стр. 52.

Замечание. Из У17 непосредственно вытекает: порядок точек на прямой a устанавливается таким образом, что расположение на этой прямой точки B относительно точек A и C в смысле этого порядка таково, что $A(C) \prec B$, $B \prec C(A) \Leftrightarrow$ точка B лежит между точками A и C в прежнем смысле.

Утверждение 18. Всякая прямая a на плоскости α разделяет все остальные точки этой плоскости на два непустых класса (две полуплоскости) так, что любые две точки A и B из одного класса определяют отрезок AB, не пересекающийся с прямой a, а любые две точки A и A' из разных классов определяют отрезок AA', который пересекает прямую a (см. рис. 7 а).

Доказательство см. [17], гл. II, §15, теорема 10 и [18], гл. I, §4, теорема 8, примечание 13.

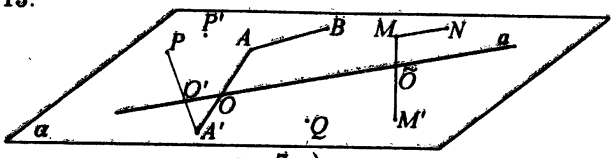


рис. 7 а)

Схема доказательства. Выберем в плоскости α произвольную точку $P \notin a$ и отнесем в первый класс каждую точку $A \notin a$ такую, что отрезок PA не пересекает прямую a , а также в этот класс отнесем и точку P; во второй класс отнесем каждую точку $A' \notin a$ такую, что отрезок PA' пересекает прямую a . Доказывается, что :

1) каждый из указанных классов не пуст ;

2) каждая точка плоскости α (за исключением точек прямой a) попадает в один и только один класс ;

3) если M и N — две точки из одного класса, то они определяют отрезок MN , не пересекающий прямую a (см. рис. 7 а) ;

4) если M и M' — две точки из разных классов, то они определяют отрезок MN , пересекающий прямую a (см. рис. 7 а).

Замечание 1. Можно доказать, что каждый из этих двух классов содержит бесконечно много точек.

Замечание 2. Если выбрать какую-либо точку $P' \neq P$ из того же класса, что и точка P , и относительно точки P' по аналогии с точкой P разбить точки плоскости α на два класса, то можно доказать, что при этом получатся те же самые классы (см. рис. 7 а).

Замечание 3. Если точку P заменить какой-либо точкой Q второго класса и относительно точки Q разбить точки плоскости α на два класса (по аналогии, как это делалось относительно точки P), то это приведет только к изменению нумерации классов: тот класс, который был первым станет вторым, а тот, который был вторым, станет первым (см. рис. 7 а).

Аналогично определению 7 мы можем ввести следующее определение:

Определение 12. Если точки A и B плоскости α таковы, что они не лежат на прямой $a \in \alpha$ и отрезок AB не пересекает прямую a , то говорят, что они расположены на этой плоскости **по одну сторону от прямой** a , *если же точки A и A' плоскости α таковы, что они не лежат на прямой $a \in \alpha$ и отрезок AA' пересекает прямую a , то говорят, что они расположены на этой плоскости* **по разные стороны** *от прямой a* (см. рис. 7 а).

Аналогично определению 3 можно ввести такое определение:

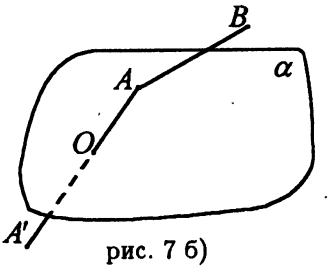


рис. 7 б)

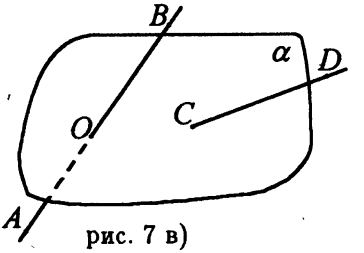


рис. 7 в)

Определение 13. Будем говорить, что ненулевой отрезок AB и плоскость α **пересекаются**, *если плоскость α и прямая (AB) пересекаются в некоторой внутренней точке O отрезка AB. Если плоскость α и прямая (CD) пересекаются или в точке C, или — в точке D, то будем говорить, что плоскость α* **проходит** *через соответствующий конец отрезка CD* (см. рис. 7 б).

Так как точка пересечения у прямой и плоскости всегда единственная, то и точка пересечения у плоскости и отрезка также единственная, или плоскость проходит через один и только один конец отрезка.

Отметим, что если прямую a присоединить к какой-либо из полуплоскостей плоскости α, на которые она разбивает эту плоскость, то такую полуплоскость мы будем называть *замкнутой* полуплоскостью, если все точки прямой прямой a не относятся ни к одной из указанных полуплоскостей, то каждую из этих полуплоскостей мы будем называть *открытой* полуплоскостью.

Договоримся, так же как и в случае открытого и замкнутого лучей что если рассматривать замкнутую полуплоскость, то это будет всегда оговариваться, если речь идет просто о полуплоскости, то под этим будет подразумеваться открытая полуплоскость.

Также отметим, что прямую a можно считать *границей* каждой из полуплоскостей, на которые она разбивает плоскость α.

Аналогично У18 приведем следующее утверждение:

Утверждение 19. Всякая плоскость α в пространстве разделяет все остальные точки пространства на два непустых класса (два полупространства) так, что любые две точки A и B из одного класса определяют отрезок AB, не пересекающийся с плоскостью α, а любые две точки A и A' из разных классов определяют отрезок AA', который пересекает плоскость α (см. рис. 7 в).

Доказательство см. учебник [5], п. 135, [17], гл. II, §15, теорема 11 (правда, там она сформулирована без доказательства) и [18], гл. I, §4, теорема 8, примечания 13, 14, 16.

Аналогично определению 10 мы можем ввести следующее определение.

Определение 14. Если точки A и B пространства таковы, что они не лежат на плоскости α и отрезок AB не пересекает плоскость α, то говорят, что они расположены в пространстве **по одну сторону** *от плоскости α, если же точки A и A' пространства таковы, что они не лежат на плоскости α и отрезок AA' пересекает плоскость α, то говорят, что они расположены в пространстве по разные стороны от плоскости α* (см. рис. 7 б).

Отметим, что если плоскость α присоединить к какому-либо из полупространств, на которые она разбивает пространство, то такое полупространство мы будем называть *замкнутым* полупространством, если все точки плоскости α не относятся ни к одному из указанных полупространств, то каждое из этих полупространств мы будем называть *открытым* полупространством.

Договоримся, так же как и в случае открытой и замкнутой плоскостей, что если рассматривать замкнутое полупространство, то это будет всегда оговариваться, если речь идет просто о полупространстве, то под этим будет подразумеваться открытое полупространство.

Также отметим, что плоскость α можно считать *границей* каждого из полупространств, на которые она разбивает пространство.

Теперь докажем еще три важных утверждения.

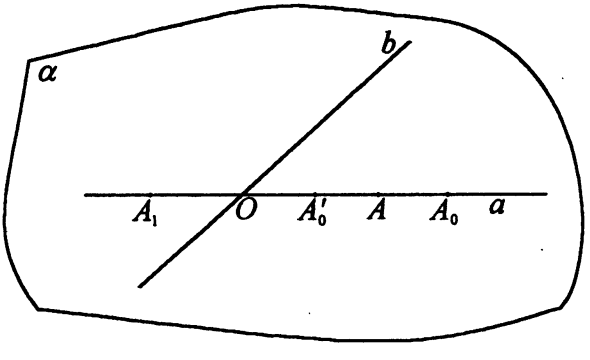


рис. 7 г)

Пусть на плоскости α имеются две пересекающиеся прямые a и b, O — точка их пересечения ($O \equiv a \cap b$).

Утверждение 20. Каждый из двух лучей, на которые точкой O разбита прямая a (прямая b) целиком расположены один в одной полуплоскости, другой в другой полуплоскости, на которые прямая b (прямая a) разбивает плоскость α (см. рис. 7 г).

Доказательство

Фиксируем две произвольные точки A и A_0 на одном луче прямой a, тогда вершина луча — точка O *не принадлежит* отрезку AA_0. Следовательно отрезок AA_0 *не пересекает* прямую b (в противном случае точкой пересечения была бы точка пересечения прямых (AA_0) и b, то есть точка O, следовательно, или $O \in AA_0$, что неверно, или эта точка совпадала с одной из точек A или A_0, что противоречит принадлежности точек A и A_0 именно *лучу*, то есть *открытому лучу* с вершиной в точке O на прямой a). Таким образом, точки A и A_0 лежат в одной полуплоскости плоскости α относительно прямой b. Выбирая какую-либо еще точку A_0' на луче OA, отличную от точек A и A_0, мы таким же образом докажем ее принадлежность той же полуплоскости плоскости α относительно прямой b, что и точка A_0. В силу произвольности выбора точек A_0 и A_0' получаем, что *весь* луч OA расположен в одной полуплоскости плоскости α относительно прямой b.

Если теперь зафиксировать произвольную точку A_1 на дополнительном луче по отношению к лучу OA, то так как точки A и A_1 лежат на разных полупрямых прямой a относительно точки O, то точка O *принадлежит* отрезку AA_1, а потому отрезок AA_1 *пересекает* прямую b в точке O, следовательно, точки A и A_1 лежат в разных полуплоскостях плоскости α относительно прямой b. В силу произвольности выбора точки A_1 весь луч, дополнительный лучу OA лежит в другой полуплоскости плоскости α относительно прямой b нежели луч OA. Утверждение полностью доказано.

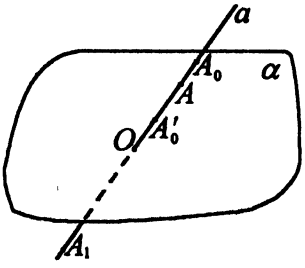


рис. 7 д)

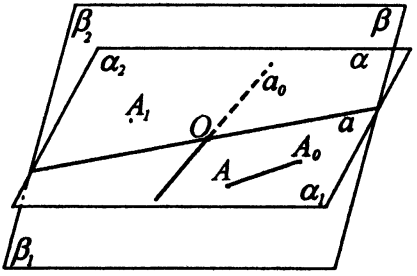


рис. 7 е)

Пусть в пространстве мы имеем плоскость α и пересекающую ее прямую a, O — точка их пересечения $(O \equiv a \cap \alpha)$.

Утверждение 21. Каждый из двух лучей, на которые точкой O разбита прямая a целиком расположены один в одном полупространстве, другой в другом полупространстве, на которые плоскость α разбивает пространство (см. рис. 7 д).

Доказательство этого утверждения совершенно аналогично доказательству У20 с заменой слов о расположении точек "в одной полуплоскости" на "в одном полупространстве" и "в разных полуплоскостях" на "в разных полупространствах".

Пусть в пространстве мы имеем две пересекающиеся плоскости α и β прямая a — прямая их пересечения ($a \equiv \alpha \cap \beta$).

Утверждение 22. Каждая из двух полуплоскостей, на которые прямой a разбита плоскость α: α_1 и α_2 (плоскость β: β_1 и β_2) целиком расположены одна в одном полупространстве, другая в другом полупространстве, на которые плоскость β (плоскость α) разбивает пространство (см. рис. 7 е). Доказательство

Отметим, что если две точки A и A_0 плоскости α лежат в одном полупространстве относительно плоскости β , то эти точки *не принадлежат* плоскости β , отрезок AA_0 не пересекает плоскость α , а потому он не пересекает и прямую a , следовательно, точки A и A_0 будут в одной полуплоскости плоскости α относительно прямой a , обратно, если две точки A и A_0 плоскости α лежат в одной полуплоскости плоскости α относительно прямой a , то отрезок AA_0 не пересекает прямую a , а потому этот отрезок не пересекает и плоскость β (в противном случае так как $A \notin \beta$ и $A_0 \notin \beta$ существовала бы внутренняя точка C отрезка AA_0 на плоскости β, а так как вся прямая (AA_0) целиком лежит в плоскости α , то и точка C лежит в плоскости α , из $C \in \alpha$, $C \in \beta \Rightarrow C \in a$ и отрезок AA_0 пересекает прямую a , что неверно), стало быть, точки A и A_0 лежат в одном полупространстве относительно плоскости β .

Из приведенных только что рассуждений вытекает, что две точки A и A_1 плоскости α лежат в разных полупространствах относительно плоскости β тогда и только тогда, когда точки A и A_1 лежат в разных полуплоскостях плоскости α относительно прямой a (это устанавливается доказательством от противного).

Замечание. Если в плоскости α провести прямую a_0 , пересекающую прямую $a \equiv \alpha \cap \beta$ в точке O , то каждая из полупрямых этой прямой с началом в точке O лежит целиком одна в одной полуплоскости, другая в другой полуплоскости плоскости α относительно прямой a , а также каждая из этих полупрямых целиком лежит одна в одном полупространстве, другая в другом полупространстве относительно плоскости β
(см. рис. 7 е).

Справедливость этого утверждения вытекает из У20 и У22.

Введем следующее важное определение *угла* и тесно связанные с ним другие определения.

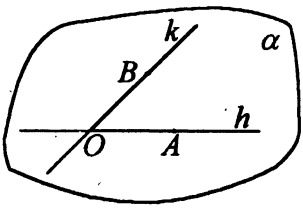


рис. 8 а)

Определение 15. **Углом** *называется пара лучей, имеющих общее начало. Указанная точка — общее начало лучей называется* **вершиной** *угла, а указанные лучи называются* **сторонами** *угла.*

Если обозначить вершину угла за O , стороны угла за h и k , при этом если луч h обозначен еще как луч OA , а луч k обозначен еще как луч OB , то будем использовать следующие обозначения угла или $\angle(h;k)$, или $\angle(k;h)$, или $\angle(OA;OB)$, или $\angle(OB;OA)$, (то есть для так называемых "геометрических" углов порядок определяющих их лучей не существенен), а также или $\angle AOB$, или $\angle BOA$ (в этих обозначениях не существенен порядок крайних точек A и B , но существенно то, что вершина угла всегда в середине) (см. рис. 8 а). Применяются и обозначения угла одной буквой, которой обозначена его вершина, например, $\angle O$; $\angle A$; $\angle B$ и т.п.

Будем рассматривать следующие четыре типа углов.

К углу *первого типа* будем относить такой угол, что лучи, определяющие его, *различные* и *не являются взаимно дополнительными.*

Тогда прямые, на которых они расположены, пересекаются в точке O — вершине угла, а потому согласно У2 через эти прямые проходит единственная плоскость α (см. рис. 8 б).

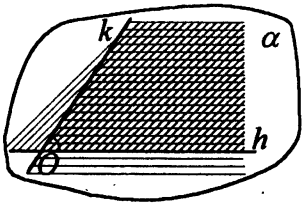


рис. 8 б)

Из У18 о разбиении каждой прямой, находящейся на некоторой плоскости, этой плоскости на две полуплоскости и из У20 следует, что стороны

угла, первого типа разбивают плоскость, α , которую они однозначно определяют, на две части:

1) *общая часть* (то есть *пересечение*) полуплоскости плоскости α относительно прямой (OA) $(A \in h)$, в которой содержится луч OB $(B \in k)$, и полуплоскости плоскости α относительно прямой (OB), в которой содержится луч OA (см. рис. 8 б),

2) остальная часть плоскости α , не включающая в себя стороны угла и его вершину, представляет собой *объединение* полуплоскости плоскости α относительно прямой (OA), в которой содержится луч, дополнительный лучу OB (это луч $\overline{k}$) и полуплоскости плоскости α относительно прямой (OB), в которой содержится луч, дополнительный лучу OA (это луч $\overline{h}$) (см. рис. 8 б).

Следовательно, стороны угла и его вершину мы не относим ни к одной из этих частей, однако объединение сторон и вершины угла естественно считать *границей* каждой из этих частей.

Часть плоскости α, определяемую условиями 1), мы будем называть *внутренней областью* угла (h, k), а часть плоскости α, определяемую условиями 2), мы будем называть *внешней областью* угла $(h; k)$ (см. рис. 8 б).

Замечание. В математической литературе углы первого типа часто называют *неразвернутыми* углами, однако к неразвернутым углам можно отнести и рассматриваемые ниже углы третьего типа. Поэтому ниже, после рассмотрения углов всех типов мы присвоим более точное название углам каждого типа, тесно связанное с их обозначениями.

К углам *второго типа* или к *развернутым* углам будем относить такие углы, что определяющие их лучи — *являются взаимно дополнительными*, то есть углы вида $\angle(h; \overline{h})$.

Очевидно, что объединение сторон такого угла вместе с его вершиной представляет собой *прямую* a, причем вершина угла (согласно У15 делит ее на лучи h и $\overline{h}$) (см. рис. 8 в).

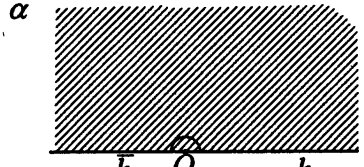


рис. 8 в)

Фиксируем некоторую плоскость α , содержащую прямую a . Тогда внутренней областью развернутого угла $(\angle(h; \overline{h}))$ мы будем считать одну из полуплоскостей, а внешней областью — другую из полуплоскостей, на которые (согласно У18) прямая a разбивает плоскость α (см. рис. 8 в).

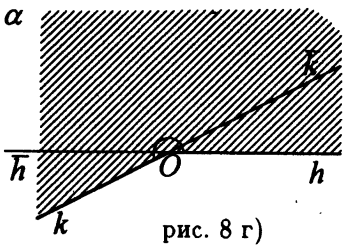


рис. 8 г)

К углу *третьего типа* будем относить такой угол, что лучи, определяющие его (так же, как и в случае угла первого типа), *различные* и *не являются взаимно дополнительными.*

Однако в отличие от угла первого типа *внутренней областью* такого угла мы будем считать часть плоскости вида 2), что в случае угла первого типа, а *внешней областью* такого угла мы будем считать часть плоскости вида 1), что в случае угла первого типа. Стороны угла и его вершину и в этом случае мы не относим ни к одной из указанных областей, однако объединение сторон и вершины угла естественно считать *границей* каждой из этих областей (см. рис. 8 г).

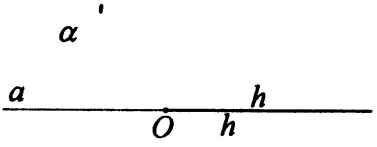


рис. 8 д)

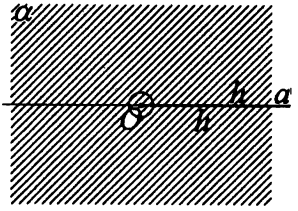


рис. 8 е)

К углам *четвертого типа* будем относить углы вида $\angle(h,h)$, то есть углы, образованные *совпадающими* лучами.

Фиксируем некоторую плоскость α , содержащую прямую a , на которой располагаются указанные совпадающие лучи (по сути дела, один луч h). Тогда углы четвертого типа подразделяют еще на два вида:

1) *нулевой* угол — угол, не имеющий внутренней области, а его внешней областью является плоскость α без точек луча h и его вершины (см. рис. 8 д) ;

2) *полный* угол — угол, не имеющий внешней области, а его внутренней областью является плоскость α без точек луча h и его вершины (см. рис. 8 е).

Всякий угол, не являющийся нулевым, то есть угол первого или третьего типа, развернутый угол и полный угол будем считать *ненулевым* углом.

На основании введенных 12 аксиом можно доказать ряд утверждений, касающихся внутренней и внешней областей угла.

Утверждение 23. Всякий угол, не являющийся нулевым или полным всегда имеет внутреннюю и внешнюю области (то есть каждая из этих областей имеет точки) (см. рис. 8 б), в), г).

Доказательство этого утверждения, касающегося углов первого и третьего типов, см. [18], примечание 19, п. 1, а относительно углов второго типа это вытекает из У15.

Важно отметить, что при доказательстве У23 попутно устанавливается справедливость и такого утверждения:

Утверждение 24. Если точки H и K лежат на сторонах угла $(h;k)$ первого (третьего) типа, $H \in h$, $K \in k$, то всякая внутренняя точка A отрезка HK лежит во внутренней (внешней) области этого угла, всякая внешняя точка A' отрезка HK лежит во внешней (внутренней) области этого угла (см. рис. 9 а).

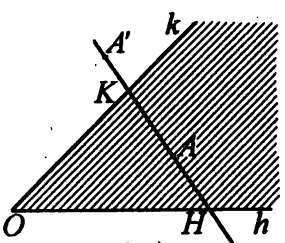


рис. 9 а)

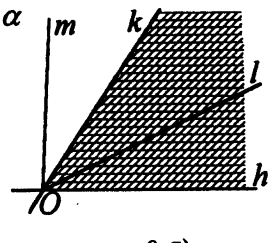


рис. 9 б)

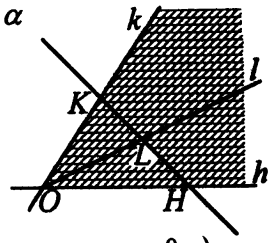


рис. 9 в)

В силу У20 и определений внутренней и внешней областей угла нетрудно получить справедливость следующего утверждения.

Утверждение 25. Всякий луч с началом в вершине угла и расположенный в плоскости, содержащей этот угол, целиком лежит либо во внутренней области этого угла, либо — в его внешней области (см. рис. 9 б).

Доказательство этого утверждения см. [18], примечание 19, п. 3.

Утверждение 26. Всякий луч с началом в вершине угла, расположенный в плоскости, содержащей этот угол, и проходящий во внутренней (внешней) области угла первого (третьего) типа пересекает любой отрезок, один конец которого на одной стороне угла, а другой конец этого отрезка на другой стороне угла. Обратно, если луч с началом в вершине угла пересекает какой-нибудь отрезок с концами один на одной стороне угла, а другой на другой стороне угла, причем этот угол первого (третьего) типа, то этот луч лежит во внутренней (внешней) области этого угла (см. рис. 9 в).

Доказательство первого из этих утверждений см. [18], примечание 19, п. 4 (оно, в частности, использует аксиому 12), второе из этих утверждений следует из У24 и У25.

Сформулируем определения углов каждого из рассмотренных типов и введем характерные для каждого типа углов обозначения.

Определение 15 А. Всякий угол первого типа мы будем называть **неразвернутым** *и* **обозначать** $\angle(h;k)$ *или* $\angle AOB$ *, где* O *— вершина угла,* $A \in h$, $B \in k$ (см. рис. 8 б).

Определение 15 Б. Всякий угол второго типа, угол вида $\angle(h,\overline{h})$ *называется* **развернутым** *углом*, его также можно обозначать $\angle AOB$, где O — вершина угла, $A \in h$, $B \in \overline{h}$ (см. рис. 8 в).

Определение 15 В. Всякий угол третьего типа мы будем называть **неразвернутым** * *и* **обозначать** $\overline{\angle(h;k)}$ *или* $\overline{\angle AOB}$, где O — вершина угла, $A \in h$, $B \in k$ (см. рис. 8 г).

Определение 15 Г. Всякий угол четвертого типа, угол вида $\angle(h;h)$ *или* $\angle(OA;OA)$ *, где* O *— вершина угла,* $A \in h$ *называется* **нулевым**, *если он не имеет внутренней области ; и он называется* **полным**, *если не имеет внешней области.*

Для нулевого угла в дальнейшем будет использоваться обозначение вида $\angle(h;h)$ или $\angle(OA;OA)$,
а для полного угла — обозначение вида $\overline{\angle(h;h)}$ или $\overline{\angle(OA;OA)}$
(см. рис. 8 д), 8 е).

Определение 16. Множество точек плоскости, являющееся объединением внутренней области угла, его сторон и вершины, называется **плоским углом** (см. рис. 8 б).

Определение 17. Будем говорить, что из трех лучей h , l , k *, имеющих общую вершину и расположенных в одной плоскости, луч* l **проходит между** *лучами* h *и* k *или луч* l **лежит внутри** *угла* $(h;k)$ *, если он лежит во внутренней области угла* $(h;k)$. Это можно обозначать $l \in \angle(h;k)$, $l \in \angle(h;\overline{h})$, $l \in \overline{\angle(h;k)}$, $l \in \overline{\angle(h;h)}$ в зависимости от того, какого типа угол $(h;k)$.

Из У26 непосредственно вытекает, что в случае угла $(h;k)$ первого типа луч l проходит между его сторонами тогда и только тогда, когда он пересекает отрезок с одним концом на луче h , а с другим концом на луче k (см. рис. 9 в).

Имеют место следующие утверждения, доказанные для углов первого типа.

* Иногда такой угол называют углом больше развернутого.

Утверждение 27. Из трех лучей h , l , k , имеющих общее начало O только один из них может проходить между двумя другими (см. рис. 9 б), в).

Доказательство см. [18], примечание 19, п. 5.

Состоит оно в том, что, если, например, луч l проходит между лучами h и k, то он пересекает отрезок HK , где $H \in h$, $K \in k$ в некоторой внутренней точке этого отрезка L , следовательно, точка L лежит между точками H и K , тогда в силу следствия У5 и А11 точка H не лежит между точками L и K , а потому луч h не пересекает отрезок LK и потому согласно У26 и О17 этот луч не проходит между лучами l и k , аналогичными рассуждениями мы приходим к тому, что луч k не проходит между лучами h и l .

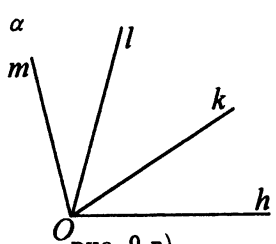


рис. 9 г)

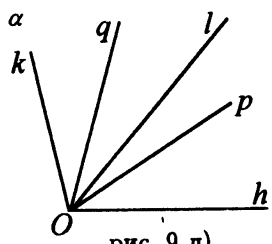


рис. 9 д)

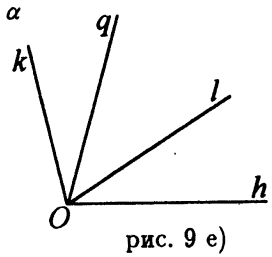


рис. 9 е)

Утверждение 28. Если луч l лежит внутри угла $\angle(k;m)$, а луч k лежит внутри угла $\angle(h;m)$, то луч l лежит внутри угла $\angle(h;m)$ (см. рис. 9 г).

Доказательство см. [18], примечание 19, п. 5.

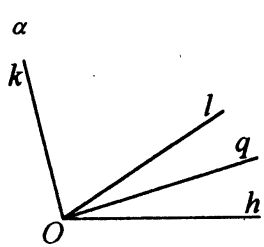


рис. 9 ж)

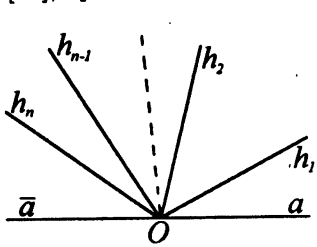


рис. 9 з)

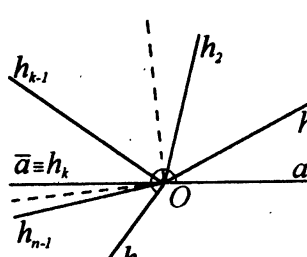


рис. 9 и)

Следствие 1. (аналог У11 для отрезков). *Если $p \in \angle(h;k)$, $q \in \angle(h;k)$, $p \not\equiv q$, то $\forall l \in \angle(p;q) \Rightarrow l \in \angle(h;k)$* (см. рис. 9 д).

Определение 18. В случае выполнения условий следствия 1 У28 говорят, что угол $\angle(p;q)$ **целиком лежит внутри угла** *$\angle(h;k)$* (это обозначается $\angle(p;q) \subset \angle(h;k)$) .

Следствие 2. (аналог У12 для отрезков). *Если луч* $l \in \angle(h;k)$ $(l \not\equiv k)$, *то для любого луча* $q \in \angle(l;k) \Rightarrow q \in \angle(h;k)$ (см. рис. 9 е).

Следствие 3. (аналог У13 для отрезков). *Если луч* $l \in \angle(h;k)$ $(h \not\equiv k)$, *то для любого луча* $q \in \angle(h;l) \Rightarrow q \notin \angle(l;k)$ (см. рис. 9 ж).

Доказательство см. [18], гл. I, §6, теорема 20.

Следствие 4. (аналог У14 для отрезков). *Если луч* $l \in \angle(h;k)$ $(h \not\equiv k)$, *то для любого луча* $q \in \angle(h;k)$, $q \not\equiv l \Rightarrow q \in \angle(h;l)$ *или* $q \in \angle(l;k)$ (см. рис. 9 ж).

Доказательство см. [18], гл. I, §6, теорема 20.

Замечание. Из следствий 2 — 4 непосредственно вытекает, что поскольку любая точка внутренней области угла лежит на некотором луче, проходящем между его сторонами (для этого достаточно провести луч с началом в вершине угла через эту точку), если луч $l \in \angle(h;k)$, O — вершина этого угла, L_1 — множество всех проходящих внутри угла $\angle(h;l)$ лучей, L_2 — множество всех проходящих внутри угла $\angle(l;k)$ лучей, то плоский $\angle(h;k)$ представляет собой объединение $\{O\} \cup \{h\} \cup \{l\} \cup \{k\} \cup L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2 = \varnothing$.

Читателям предлагается самим подумать об основании У27 и У28 и следствий для случая углов всех четырех типов.

Утверждение 29. Если n *лучей* h_1, h_2, ... h_n *и луч* a *исходят из одной точки, при этом все лучи* h_1, h_2, ... h_n *расположены в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей луч* a, *то среди указанных* n *лучей найдется один и только один луч, образующий с лучом* a *угол, внутри которого лежат все остальные* $n-1$ *лучей* (см. рис. 9 з).

Доказательство см. [18], примечание 19, п. 5, оно проводится индукцией по n.

Замечание. Справедливость этого утверждения можно распространить и на случай, когда не все эти лучи (лежащие в одной плоскости) располагаются в одной полуплоскости, но имеют общее начало. Для этого надо (если среди этих лучей нет дополнительного лучу a) ввести его в рассмотрение (пусть это будет луч $h_k \equiv \overline{a}$), сначала применить У29 для лучей a, h_1, ..., h_{k-1}, затем применить У29 для лучей $\overline{a}$, h_{k+1}, ..., h_n и объединить полученные лучи. Очевидно, что только внутри угла $\angle(a;h_n)$ будут находиться все остальные лучи (см. рис. 9 и).

III. Аксиомы наложения

Следующие ниже аксиомы связаны с понятиями наложения и равенства фигур. *

При наглядном представлении о наложении одной фигуры на равную ей другую фигуру наблюдается то, что всякая точка первой фигуры накладывается на некоторую точку второй фигуры, и при этом всякая точка второй фигуры оказывается сопоставленной некоторой точке первой фигуры. Более того, считается, что при этом и любая точка плоскости или пространства отображается на некоторую точку соответственно плоскости или пространства, то есть происходит отображение плоскости или пространства на себя. Однако не всякое отображение плоскости или пространства на себя считается наложением. Наложения это такие отображения плоскости или пространства на себя, которые удовлетворяют ниже следующим аксиомам.

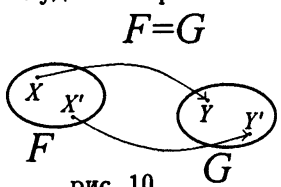


рис. 10

Определение 19. Будем говорить, что фигура F **равна** *фигуре G ,* ***если существует наложение****, при котором всякой точке X фигуры F ставится в соответствие ** единственная точка Y фигуры G и для каждой точки Y' фигуры G существует точка X' фигуры F , которой она поставлена в соответствие* (см. рис. 10).

Переходим к формулировкам аксиом о свойствах наложений.

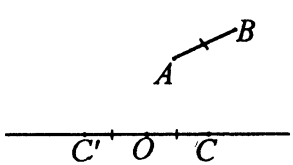


рис. 11 а)

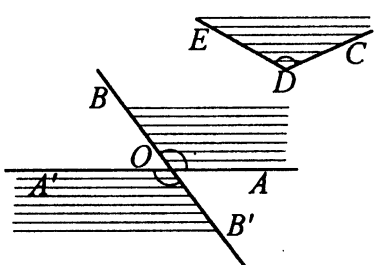


рис. 11 б)

* Под фигурой в геометрии понимается всякое непустое множество точек, фигурами, в частности, являются отрезок, луч, прямая, плоскость, плоская фигура, поверхность в пространстве, пространственное тело и т.п.

** Термин "соответствует" в данной книге относится к первичным (основным) понятиям.

Аксиома 13. Если при наложении (в плоскости или в пространстве) совмещаются концы отрезков, то при этом совмещаются сами отрезки (то есть все их внутренние точки).

Аксиома 14. На любом луче от его начала можно отложить единственный отрезок, равный данному отрезку (см. рис. 11 а).

Смысл этой аксиомы в том, что если заданы какой-либо отрезок AB и какой-то луч h с вершиной в точке O , то на этом луче существует единственная точка C такая, что отрезок AB равен отрезку OC .

Аксиома 15. От любого луча в данную полуплоскость можно отложить единственный угол, равный данному неразвернутому углу (см. О15 А). *При этом внутренняя область откладываемого угла располагается в указанной полуплоскости.*

Смысл этой аксиомы означает то, что если на некоторой плоскости α заданы луч OA с началом в точке O и какой-либо неразвернутый угол $\angle CDE$, то в каждой из двух полуплоскостей с границей OA существует единственный луч OB такой, что $\angle AOB = \angle CDE$, причем внутренняя область откладываемого угла целиком располагается в соответствующей полуплоскости (см. рис. 11 б).

Аксиома 16. Любой угол $\angle(h;k)$ можно совместить с равным ему углом $\angle(h_0;k_0)$ двумя способами:

1) луч h совмещается с лучом h_0 , а луч k совмещается с лучом k_0 ,

2) луч h совмещается с лучом k_0 , а луч k совмещается с лучом h_0 .

(при этом также предполагается, что если плоскости, в которых расположены углы $\angle(h;k)$ и $\angle(h_0;k_0)$, являются границами полупространств P и P_0 , то совмещаются и сами эти полупространства).

Аксиома 17. Любая фигура F равна сама себе, то есть $F = F$.

Аксиома 18. Если фигура F равна фигуре G , то и фигура G равна фигуре F , откуда $F = G \Leftrightarrow G = F$.

Аксиома 19. Если фигура F равна фигуре G и фигура G равна фигуре H , то фигура F равна фигуре H , то есть $F = G$, $G = H \Rightarrow F = H$.

Утверждения аксиом 17, 18 и 19 соответственно означают, что отношение равенства фигур обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Утверждение 30. При наложении фигур любые две различные точки первой фигуры отображаются в различные точки второй фигуры.

Доказательство

Предположим противное, что существуют две различные точки A и B фигуры F , которые при наложении переходят в одну и ту же точку C

фигуры G . Тогда, в частности, фигура H_1 , состоящая из двух точек A и B , окажется равной фигуре H_2 , состоящей из одной точки C . В силу аксиомы 18 при этом $H_2 = H_1$, то есть фигура H_2 может быть наложена на фигуру H_1 , при этом окажется, что точке C будет соответствовать более одной точки (это точки A и B), что противоречит определению 16 равенства фигур.

Доказанное утверждение означает, что при наложении фигур между их точками устанавливается взаимно однозначное соответствие (см. сноску на стр. 10 данной книги).

Из А13, А16 и О19 вытекает, что *если отрезки могут быть совмещены, то они равны, и если углы могут быть совмещены, то они равны. При этом естественно считать равными любые два нулевых отрезка, равными любые два нулевых угла, равными любые два полных угла* * *и равными любые два развернутых угла.*

Введем определения сравнения отрезков и углов, а также — определения суммы и разности отрезков и углов.



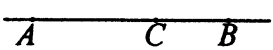


рис. 12 а)

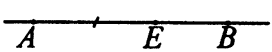


рис. 12 б)

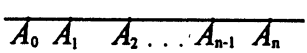


рис. 12 в)

Пусть на прямой a мы имеем отрезок AB , C — его внутренняя точка.

Определение 20. Говорят, что при этом отрезок AB **больше** *отрезка AC (откуда также отрезок AB больше отрезка CB), а отрезок AC* **меньше** *отрезка AB (откуда также отрезок CB меньше отрезка AB). По определению считается, что всякий ненулевой отрезок больше нулевого отрезка, а нулевой отрезок меньше любого ненулевого отрезка.* Обозначения: $AB > AC$; $AB > CB$; $AC < AB$; $CB < AB$ (см. рис. 12 а).

Определение 20 А. Будем говорить, что из двух произвольных отрезков AB и CD $AB > CD$, если между точками A и B существует точка E такая, что $AE = CD$ или $EB = CD$, при этих же условиях $CD < AB$ (см. рис. 12 б).

Пусть на прямой a мы имеем отрезок AB , C — его внутренняя точка.

Определение 21. Говорят, что при этом отрезок AB равен **сумме** *отрезков AC и CB , а каждый из отрезков AC и CB равен* **разности**

* По поводу равенства такого рода см. ниже о свойствах движения.

отрезка AB и другого из них (см. рис. 12 а). По определению также считается, что *сумма каждого отрезка и нулевого отрезка равна данному отрезку, разность каждого отрезка и нулевого отрезка равна данному отрезку, разность каждого отрезка с этим же отрезком равна нулевому отрезку.*

Обозначения: $AB = AC + CB$; $AC = AB - CB$; $CB = AB - AC$; $AB = AB + BB$, $AB = AB - AA$, $AA = BB = AB - AB$.

Из определений 20 и 21 вытекает, что разность отрезков определена тогда и только тогда, когда уменьшаемый отрезок больше или равен вычитаемому отрезку.

Определение 21 А. Если на прямой выбраны $n+1$ точка таким образом, как об этом говорится выше, в У9, то по определению отрезок $A_0A_n = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n$ (см. рис. 12 в).

Нетрудно видеть, что этот отрезок равен $A_0A_{n-1} + A_{n-1}A_n$, где $A_0A_{n-1} = A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-2}A_{n-1}$.

Замечание. Следует отметить, что множество всех внутренних точек суммарного отрезка представляет собой объединение множеств всех внутренних точек слагаемых отрезков вместе с точками A_1 , A_2 , ... , A_{n-1}.

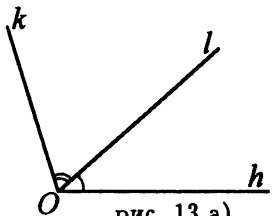


рис. 13 а)

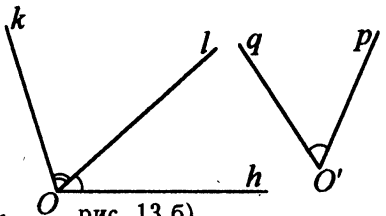


рис. 13 б)

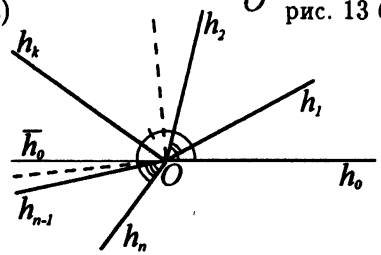


рис. 13 в)

Пусть на плоскости α мы имеем ненулевой угол $\angle(h;k)$, (в данном случае за $\angle(h;k)$ обозначен угол *любого* из четырех типов, кроме нулевого угла) l — луч, проходящий внутри этого угла (см. выше О17).

Определение 22. Говорят, что $\angle(h;k)$ **больше** *угла* $\angle(h;l)$ *(откуда также* $\angle(h;k)$ *больше* $\angle(l;k)$*), а* $\angle(h;l)$ **меньше** *угла* $\angle(h;k)$ *(откуда также* $\angle(l;k)$ *меньше* $\angle(h;k)$*).* По определению считается, что *всякий не-*

нулевой угол больше нулевого угла, а нулевой угол меньше любого ненулевого угла (см. рис. 13 а).
Обозначения: $\angle(h;k) > \angle(h;l)$; $\angle(h;k) > \angle(l;k)$; $\angle(h;l) < \angle(h;k)$; $\angle(l;k) < \angle(h;k)$.

Определение 22 А. Будем говорить, что из двух произвольных углов $\angle(h;k)$ *и* $\angle(p;q)$ $\angle(h;k) > \angle(p;q)$, *если между лучами* h *и* k *проходит луч* l *такой, что* $\angle(h;l) = \angle(p;q)$ *или* $\angle(l;k) = \angle(p;q)$, *при этих же условиях* $\angle(p;q) < \angle(h;k)$ (см. рис. 13 б).

Пусть на плоскости α мы имеем ненулевой угол $\angle(h;k)$, (в данном случае за $\angle(h;k)$ обозначен угол *любого* из четырех типов, кроме нулевого угла) l — луч, проходящий внутри этого угла (см. выше О17).

Определение 23. Говорят, что при этом угол $\angle(h;k)$ *равен сумме углов* $\angle(h;l)$ *и* $\angle(l;k)$, *а каждый из углов* $\angle(h;l)$ *и* $\angle(l;k)$ *равен разности угла* $\angle(h;k)$ *и другого из них. По определению также считается, что сумма каждого угла и нулевого угла равна данному углу, разность каждого угла и нулевого угла равна данному углу, разность каждого угла с этим же углом равна нулевому углу* (см. рис. 13 а).
Обозначения: $\angle(h;k) = \angle(h;l) + \angle(l;k)$; $\angle(l;k) = \angle(h;k) - \angle(h;l)$; $\angle(h;l) = \angle(h;k) - \angle(l;k)$; $\angle(h;k) = \angle(h;k) + \angle(k;k)$, $\angle(h;k) = \angle(h;k) - \angle(k;k)$, $\angle(h;h) = \angle(k;k) = \angle(h;k) - \angle(h;k)$.

Из О22 и О23 вытекает, что разность углов определена тогда и только тогда, когда уменьшаемый угол больше или равен вычитаемому углу.

Следует также отметить, что из этих определений вытекает и то, что всякий угол первого, второго и третьего типа меньше полного угла, а полный угол больше всякого угла первого, второго и третьего типа.

Определение 23 А. Пусть на плоскости α *выбраны* $n+1$ $(n \geqslant 3$, $n \in N)$ *луч* h_0 , h_1 , ... h_{n-1} , h_n, *каждый из которых имеет общую вершину* O *таким образом, как об этом говорится выше, в У29, причем*
$\forall\, i = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \ldots\ ,\ n-1$ *и* $\forall\, k\ ,\ m \in N_0\ :\ 0 \leqslant k < i < m \leqslant n$
луч h_i *будет проходить между лучами* h_k *и* h_m , * *тогда по определению угол* $\angle(h_0;h_n) = \angle(h_0;h_1) + \angle(h_1;h_2) + \ldots + \angle(h_{n-1};h_n)$ (см. рис. 13 в).

---

* В случае, когда лучи h_1 , h_2 , ... h_n расположены в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей луч h_0 или $h_n \equiv \overline{h_0}$ такая возможность вытекает из У29, в остальных случаях это будет вытекать из А15, согласно которой при всех углах $\angle(h_{i-1};h_i)$ меньше развернутого угла от очередного луча h_{j_0} $(1 \leqslant j_0 < n)$ в другую полуплоскость относительно прямой, содержащей луч h_{j_0} (нежели ту полуплоскость, в которой находится луч h_{j_0-1}) можно отложить единственный угол, равный $\angle(h_{j_0};h_{j_0+1})$; если очередной угол $\angle(h_{j_0};h_{j_0+1})$ окажется больше развернутого угла или равен развернутому углу и меньше полного угла, то его мы представляем в виде суммы $\angle(h_{j_0};\overline{h_{j_0}}) + \angle(\overline{h_{j_0}} + h_{j_0+1})$, когда луч $h_{j_0+1} \equiv \overline{h_{j_0}}$ последний слагаемый угол нулевой, то есть просто добавляется еще один луч $\overline{h_{j_0}}$.

Нетрудно видеть, что этот угол равен $\angle(h_0;h_{n-1})+\angle(h_{n-1};h_n)$, где $\angle(h_0;h_{n-1})=\angle(h_0;h_1)+\angle(h_1;h_2)+\ldots+\angle(h_{n-2};h_{n-1})$.

Замечание. Следует отметить, что внутренняя область суммы углов представляет собой объединение всех внутренних областей слагаемых углов вместе со всеми лучами h_1 , h_2 , ... , h_{n-1} .

Теперь отметим, что в принципе можно определить сумму произвольного конечного количества отрезков и углов с не обязательно совпадающими (у предшествующего и последующего) концами у отрезков и лучами у углов.

Если заданы какие угодно n отрезков AB, CD, EF, ... , XY и какие угодно m углов $\angle(h;k)$, $\angle(l;m)$, $\angle(n;p)$, ... , $\angle(r;q)$, то выбрав соответственно некоторую прямую a и некоторую плоскость α , точку $A_0\in a$ луч $OA_0\in\alpha$, мы можем на выбранной полупрямой с началом в точке A_0 и в выбранной полуплоскости плоскости α относительно прямой (OA_0) согласно А14 и А15 соответственно отложить: отрезок $OA_1=AB$, затем отложить отрезок $A_1A_2=CD$ так, что точка A_1 лежит между точками O и A_2 (если отрезок CD ненулевой) и т.д., наконец, отложить отрезок $A_{n-1}A_n=XY$ так, что точка A_{n-1} лежит между точками $A_{n-2}A_n$ (если отрезок XY ненулевой), полученный отрезок $A_0A_n\stackrel{df}{=}AB+CD+EF...+XY$; угол $\angle(OA_0;OA_1)=\angle(h;k)$, затем отложить $\angle(OA_1;OA_2)=\angle(l;m)$ так, что луч OA_1 проходит внутри угла $(OA_0;OA_2)$, (если угол $(l;m)$ не нулевой), согласно У27 это исключает прохождение луча OA_0 внутри угла $\angle(OA_1;OA_2)$ и — луча OA_2 внутри угла $\angle(OA_0;OA_1)$ и т.д., наконец, отложить угол $\angle(OA_{n-1};OA_n)=\angle(r;q)$ так, что луч OA_{n-1} проходит внутри угла $(OA_{n-2};OA_n)$ (если угол $(r;q)$ не нулевой), полученный угол $\angle(OA_0;OA_n)\stackrel{df}{=}\angle(h;k)+\angle(l;m)+\angle(n;p)+\ldots+\angle(r;q)$.

Отметим, что если среди слагаемых углов встречается угол третьего типа (то есть больше, чем развернутый угол), то мы его представляем в виде суммы развернутого угла и угла первого типа, тем самым добавляя еще один развернутый слагаемый угол. Важно также отметить, что *в геометрии* всегда рассматривается ситуация, когда результирующий суммарный угол не превосходит полного угла.

Если какой-либо очередной слагаемый отрезок или угол — нулевой, то его прибавление не изменяет полученный до этого результат, то есть отрезок или соответственно угол остаются равными отрезку или углу, полученным на предыдущем этапе.

Отметим, что формально можно определить произведение натурального числа n на отрезок AB , это будет сумма n отрезков, каждый из которых равен отрезку AB , а также формально можно определить произведение на-

турального числа n на угол $\angle(h;k)$, это будет сумма n углов, каждый из которых равен углу $\angle(h;k)$.

Определение 21 Б. **Разностью** *двух произвольных отрезков AB и CD называется такой отрезок EF , что $EF + CD = AB$* , обозначается $EF = AB - CD$.

Определение 23 Б. Разностью двух произвольных углов $\angle(h;k)$ и $\angle(p;q)$ называется такой угол $\angle(r;s)$, что $\angle(r;s) + \angle(p;q) = \angle(h;k)$, обозначается $\angle(r;s) = \angle(h;k) - \angle(p;q)$.

Для построения разности двух произвольных отрезков (углов) надо от какого-либо конца (какой-либо стороны) уменьшаемого отрезка (угла) внутри него отложить отрезок (угол), равный уменьшаемому отрезку (углу) и в качестве разности отрезков (углов) будет выступать отрезок (угол) в соответствии с О21 (О23).

Очевидно, что при таком определении разности отрезков (углов) она будет существовать тогда и только тогда, когда уменьшаемый отрезок (угол) будет больше или равен вычитаемому отрезку (углу).

Докажем следующее утверждение:

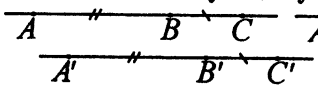


рис. 14 а)

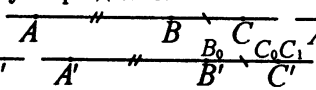


рис. 14 б)

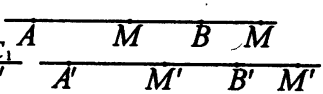


рис. 14 в)

Утверждение 31. * *Пусть AB и BC — два отрезка на прямой a , не имеющие общих внутренних точек, и пусть $A'B'$ и $B'C'$ — два отрезка на прямой a' , также не имеющие общих внутренних точек. Если $AB = A'B'$ и $BC = B'C'$, то $AC = A'C'$* (см. рис. 14 а).

Доказательство

См. рис. 14 б). Отложим на луче $A'C'$ от точки A' отрезок $A'C_0 = AC$ (это возможно согласно А14), означает это то, что отрезок AC можно совместить наложением с отрезком $A'C_0$ так, что совместятся их концы: точки A и A' , точки C и C_0 , а также совместятся все их внутренние точки, в частности, точка $B \in AC$ совместится с точкой $B_0 \in A'C_0$ (откуда следует, что точка B_0 будет лежать на луче $A'C_0$). В силу равенства $AB = A'B'$ и А14 это будет означать совпадение точек B' и B_0 ($B' \equiv B_0$), поэтому $B' \in A'C_0$ (откуда вытекает, что точка B' будет лежать на луче $A'C_0$). На луче $B'C_0$ (дополнительном лучу $B'A'$), на котором будет располагаться точка C' , можно отложить единственный отрезок с одним из концов в точке B' , равный отрезку BC , пусть это будет отрезок $B'C_1$, так как по условию $BC = B'C'$ и $BC = B'C_1$, то $B'C' = B'C_1$, а поскольку

* В системе аксиом "конгруэнтности" это утверждение принимается в качестве аксиомы.

точки C' и C_1 на одном луче с началом в точке B', то они (согласно А14) совпадают (то есть $C_1 \equiv C'$). Теперь отметим, что равенство $BC = B'C'$ означает, что при наложении отрезка BC (BC — часть отрезка AC) на луч $B'C_0$ (или на луч $B'C_1$) при совмещении точки B с точкой B' совместятся точки C и C' и также совместятся внутренние точки отрезков BC и $B'C'$. Итак мы получили, что при наложении отрезка AC на луч $A'C_0$ точка C совместилась с точкой C' ($\Rightarrow C_0 \equiv C'$), следовательно, $AC = A'C'$. Утверждение полностью доказано.

Замечание. Из этого утверждения и определения суммы отрезков следует, что из $AB = A'B'$ и $BC = B'C'$ вытекает $AB + BC = A'B' + B'C'$.

Следствие 1. Если отрезки AC и $A'C'$ равны, то для любой точки $B \in AC$ существует единственная точка $B' \in A'C'$ такая, что $AB = A'B'$ и $BC = B'C'$.

Доказательство см. [18], примечание 26, лемма.

Замечание. Из этого следствия и определения разности отрезков следует, что из $AC = A'C'$ и $AB = A'B'$ вытекает $AC - AB = A'C' - A'B'$.

Следствие 2. Если ненулевые отрезки AB и $A'B'$ равны, то лучи AB и $A'B'$, а также лучи BA и $B'A'$ могут быть совмещены наложением.

Доказательство

См. рис. 14 в). Фиксируем произвольную точку M на отрезке AB, тогда существование точки M' на отрезке $A'B'$, в которую она переходит при наложении отрезка AB на отрезок $A'B'$, вытекает из равенства $AB = A'B'$. Если точка $M \equiv B$, то соответствующая ей при наложении точка $M' \equiv B'$ в силу равенства $AB = A'B'$. Пусть теперь точка M не лежит на отрезке AB, тогда поскольку она на луче AB, то точка B будет лежать между точками A и M. Выбирая на луче $B'M'$, не содержащем точку A', точку M' так, чтобы $B'M' = BM$ (это возможно в силу А14) получим в силу У31 $AM = A'M'$, а потому при наложении отрезка AB на отрезок $A'B'$ точка M луча AB совместится с некоторой точкой M' на луче $A'B'$. В силу симметричности отношения равенства фигур (на основании А18) и У30 при наложении отрезка $A'B'$ на отрезок AB точка M' луча $A'B'$ наложится на точку M луча AB именно ту, которая переходит в нее при наложении отрезка AB на отрезок $A'B'$. Точно также доказывается возможность совмещения наложением лучей BA и $B'A'$.

Проведенное доказательство означает, что при наложении равных ненулевых отрезков AB и $A'B'$ совмещаются наложением прямые (AB) и $(A'B')$. Следствие доказано. С помощью следствия 1 У31 с использованием первого признака равенства треугольников можно доказать аналогичное ему утверждение для углов.

Утверждение 31 А. Если угол $\angle(h;k)$ в плоскости α равен углу $\angle(h';k')$ в плоскости α', то для любого луча l, проходящего внутри угла $\angle(h;k)$, существует единственный луч l', проходящий внутри угла $\angle(h';k')$, такой, что $\angle(h;l)=\angle(h';l')$ и $\angle(l;k)=\angle(l';k')$ (см. ниже рис. 15 в), г).

Доказательство см. [18], гл. I, теорема 16, примечание 26.

Следствие. При совмещении сторон h и h', k и k' или при совмещении сторон h и k', k и h', углов первого типа $\angle(h;k)$ и $\angle(h';k')$ совмещаются их внутренние области.

Доказательство

См. ниже рис. 15 в), г). Фиксируем произвольную точку M во внутренней области $\angle(h;k)$ и проведем через нее и вершину этого угла луч l, который в силу У20 будет проходить во внутренней области $\angle(h;k)$. В силу У31 А внутри угла $\angle(h';k')$ существует единственный луч l' такой, что $\angle(h;l)=\angle(h';l')$ и $\angle(l;k)=\angle(l';k')$, а это означает, что луч l совместится с лучом l', тем самым точка M совместится с некоторой точкой M' на луче l'. Так как луч l' проходит внутри угла $\angle(h';k')$, то точка M' лежит во внутренней области $\angle(h';k')$. Далее, осуществляя наложение $\angle(h';k')$ на $\angle(h;k)$, таким же образом мы докажем (используя У20 и А13), что точка M' внутри угла $\angle(h';k')$ будет отвечать именно точке M внутри угла $\angle(h;k)$ при наложении этих углов. Следствие доказано.

Теперь важно отметить, что в системе аксиом Д. Гильберта, изложенных в книгах [17] и [18], в качестве третьей группы аксиом выступают не аксиомы наложения, а так называемые аксиомы конгруэнтности (равенства), то есть в этой системе аксиом отношение равенства отрезков и углов выступает в качестве основного (первичного) понятия, удовлетворяющего соответствующим аксиомам. Наложение при этой схеме изложения уже вводится как определение.

В гл. II, §19 книги [17] под **движением** или **наложением** множества точек понимается такое взаимно однозначное соответствие между исходным множеством и тем, в которое оно при этой операции преобразуется, что отрезок, концами которого являются произвольные точки исходного множества, равен отрезку, концами которого являются соответствующие точки множества, в которое исходное множество преобразуется.

При этом согласно доказанному У31, а также А13 — А15, нетрудно получить справедливость всех аксиом третьей группы, изложенных в книгах [17] и [18], за исключением одной аксиомы.

Эта аксиома утверждает, что если A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, A', B', C' — также три точки, не лежащие на одной прямой, и $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $AC=A'C'$, $\angle BAC=\angle B'A'C'$, то $\angle ABC=\angle A'B'C'$ и $\angle ACB=\angle A'C'B'$.

Если доказать следующий ниже первый признак равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними) с помощью наложения, то из него непосредственно и будет вытекать утверждение последней аксиомы "конгруэнтности".

Обратно, исходя из системы аксиом третьей группы, изложенных в книгах [17] и [18], можно, в частности, доказать свойство рефлексивности, симметричности и транзитивности отношения равенства отрезков и углов, откуда, исходя из определения наложения и аксиом конгруэнтности отрезков и углов, будет следовать справедливость аксиом наложения A14, A15, A17 — A19. Справедливость A13 и A16 будет вытекать из свойств движения, о которых говорится ниже, в VI п. 2.3.0

Этот важный вывод об эквивалентности системы аксиом наложения и системы аксиом "конгруэнтности" отрезков и углов, изложенных в книгах [17] и [18], позволит нам и в дальнейшем при необходимости использовать утверждения указанных книг [17] и [18].

Утверждения, в определенном смысле аналогичные У31 и его следствию 1, имеет место и для углов.

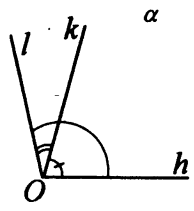


рис. 15 а)

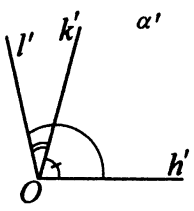


рис. 15 б)

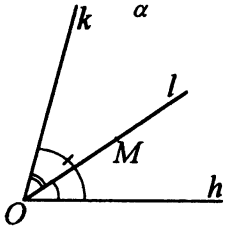


рис. 15 в)

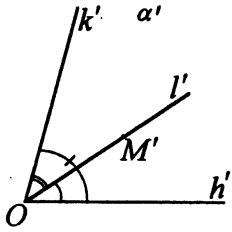


рис. 15 г)

Утверждение 32. Пусть h , k , l — тройка лучей, лежащих в одной плоскости и имеющих общее начало O , h' , k' , l' — также тройка лучей, лежащих в одной плоскости и имеющих общее начало O' , пусть луч l в первой тройке проходит (не проходит) между лучами h и k , а луч l' во второй тройке проходит (не проходит) между лучами h' и k' . Тогда, если $\angle(h;l) = \angle(h';l')$, $\angle(l;k) = \angle(l';k')$, то $\angle(h;k) = \angle(h';k')$
(см. рис. 15 а), б), в), г).

Доказательство см. [17], гл. II, §17, теорема 16 и [18], гл. I, §6, теорема 15.

Отметим ряд важных свойств, касающихся отношений "равен", "больше" и "меньше" между отрезками и углами. В силу аксиом 17 — 19 отношение "равен" для отрезков и углов обладает свойствами рефлексивности, симметричеости и транзитивности, однако если систему аксиом наложения заменить системой аксиом "конгруэнтности", то, например, свойство транзитивности отношения "равен" для отрезков и углов можно было бы доказать как теоремы (см. [17] и [18]). Стало быть, при выбранной нами

схеме изложения материала соответствующие свойства отношения "равен" вытекают из аксиом. Однако, как отмечалось выше, из системы аксиом наложения, принятой в данной книге, можно вывести ряд аксиом "конгруэнтности" на основе которых доказываются следующие утверждения.

Утверждение 33. Для произвольных двух отрезков AB и CD всегда выполняется одно и только одно из трех соотношений: или $AB = CD$, или $AB > CD$, или $AB < CD$.

Доказательство см. [17], гл. II, §18, теорема 27.

Утверждение 34. Для произвольных трех отрезков AB, CD и EF из $AB < CD$, $CD < EF$ следует $AB < EF$ (свойство транзитивности отношения "меньше" для отрезков).

Доказательство см. [17], гл. II, §18, теорема 28.

Следствие 1. Для произвольных трех отрезков AB, CD и EF из $AB > CD$, $CD > EF$ следует $AB > EF$ (свойство транзитивности отношения "больше" для отрезков).

Доказательство. Поскольку из определений отношений "больше" и "меньше" для отрезков (см. О19 и О19 А) вытекает, что $AB > CD \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow CD < AB$, $CD > EF \Leftrightarrow EF < CD$, то из У34 вытекает, что $EF < AB$, откуда $AB > EF$.

Следствие 2. Если отрезок CD — часть отрезка AB, то $CD < AB$ (см. выше рис. 5 г).

Доказательство. Если обе точки C и D лежат между точками A и B, то (см. У11 — У14 и О7) если, например, C лежит между A и D, то $CD < AD$, $AD < AB \Rightarrow CD < AB$, аналогично рассматривается случай D лежит между A и C. Если одна из точек C или D совпадает с одним из концов отрезка AB, а другая из них является внутренней точкой отрезка AB, то $CD < AB$ следует из О19.

Замечание. Справедливость У33, У34 и следствий распространяется и на случай, когда некоторые из рассматриваемых отрезков могут быть нулевыми, в частности, в следствии 2 точки C и D могут совпадать. Для доказательства надо применить определенные выше отношения "равен", "больше", "меньше" по отношению к нулевому отрезку.

Утверждение 35. Для произвольных двух углов $\angle(h;k)$ и $\angle(p;q)$ всегда выполняется одно и только одно из трех соотношений:
или $\angle(h;k) = \angle(p;q)$, или $\angle(h;k) > \angle(p;q)$, или $\angle(h;k) < \angle(p;q)$.

Доказательство см. [18], гл. I, §6, теорема 20 и вывод из нее.

Замечание. Справедливость этого утверждения распространяется на случай углов каждого из четырех типов. Для этого надо воспользоваться соответствующими определениями отношения "равен", "больше" и "меньше" для углов различных типов, включая и нулевой, полный и развернутый углы, если речь идет о двух углах третьего типа, (они обозначаются $\overline{\angle(h;k)}$ и $\overline{\angle(p;q)}$, результат относительно них можно свести к результату относительно углов первого типа, которые дополняют их до полного угла $\overline{\angle(h;k)} = \angle(h;h) - \angle(h;k)$, $\overline{\angle(p;q)} = \angle(p;p) - \angle(p;q)$.

Утверждение 36. Для произвольных трех углов $\angle(h;k)$, $\angle(l;m)$ *и* $\angle(n;p)$ *из* $\angle(h;k) > \angle(l;m)$, $\angle(l;m) > \angle(n;p)$ *следует* $\angle(h;k) > \angle(n;p)$ (свойство транзитивности отношения "больше" для углов).

Доказательство см. [18], примечание 28.

Следствие 1. Для произвольных трех углов $\angle(h;k)$, $\angle(l;m)$ *и* $\angle(n;p)$ *из из* $\angle(h;k) < \angle(l;m)$, $\angle(l;m) < \angle(n;p)$ *следует* $\angle(h;k) < \angle(n;p)$ (свойство транзитивности отношения "меньше" для углов).

Доказательство проводится точно так же, как и доказательство следствия 1 из У34 на основе определений отношений "больше" и "меньше" для углов (см. О21 и О21 А).

Замечание. Справедливость У36 и следствия 1 также распространяется на случай углов всех четырех типов, для этого обоснования можно воспользоваться соответствующими определениями отношений "больше" и "меньше" для углов различных типов, включая и нулевой, полный и развернутый углы, если речь идет о всех углах третьего типа, результат относительно них можно свести к результату относительно углов первого типа, которые дополняют их до полного угла (точно так же, как в замечании к У35).

Следствие 2. Если угол $\angle(l;q)$ — *часть угла* $\angle(h;k)$,
то $\angle(l;q) < \angle(h;k)$ (см. выше рис. 9 е).

Доказательство. Если оба луча l и q проходят между лучами h и k, то (см. У27 и О17) если, например, l проходит между лучами h и q , то $\angle(p;q) < \angle(h;p)$, $\angle(h;p) < \angle(h;k) \Rightarrow \angle(p;q) < \angle(h;k)$, аналогично рассматривается случай, когда луч q проходит между лучами h и l . Если один из лучей l или q совпадает с одной из сторон угла $\angle(h;k)$, а другой из них проходит внутри угла $\angle(h;k)$, то $\angle(l;q) < \angle(h;k)$ следует из О21.

Замечание. Справедливость этого следствия тоже распространяется на случай углов всех четырех типов, это доказывается точно так же с учетом предыдущих двух замечаний.

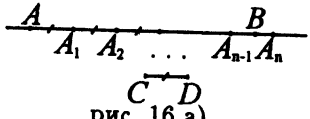


рис. 16 а)

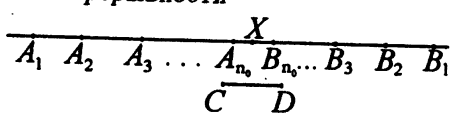


рис. 16 б)

Аксиома 20. Пусть AB и CD какие-либо два ненулевых отрезка. Тогда на прямой (AB) существует конечное количество точек A_1 , A_2 , A_3 , ... , A_n таких, что точка A_1 лежит между точками A и A_2 (то есть $A_1 \in AA_2$), $A_2 \in A_1A_3$ и т.д., $A_{n-1} \in A_{n-2}A_n$, и выполняются равенства $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n = CD$ и точка B лежит между точками A и A_n (см. рис. 16 а). Аксиома 20 носит название *аксиомы измерения* или *аксиомы Архимеда.*

Аксиома 21. Пусть на какой угодно прямой a имеется бесконечная последовательность отрезков A_1B_1 , A_2B_2 , ... , A_nB_n , ... такая, что каждый последующий отрезок целиком лежит внутри предыдущего (это означает, что $\forall n \in N$ и $\forall M \in A_{n+1}B_{n+1} \Rightarrow M \in A_nB_n$), и каким бы ни был заранее заданный отрезок CD , найдется номер n_0 такой, что отрезок $A_{n_0}B_{n_0}$ меньше отрезка CD . Тогда на прямой a существует точка X , лежащая внутри всех этих отрезков, (то есть $\forall n \in N \Rightarrow X \in A_nB_n$) (см. рис. 16 б).

Аксиома 21 носит название *аксиомы Кантора.*

Замечание. В таком виде эта аксиома приводится в книге [17], гл. II, §20. Из нее сразу вытекает единственность указанной точки X. Предполагая существование еще одной такой точки Y , в силу У11 вытекает, что весь отрезок XY (то есть вместе со всеми своими внутренними точками) целиком лежит внутри любого из отрезков A_nB_n , то есть будет меньше или равен каждого из этих отрезков, а это противоречит утверждению аксиомы Кантора, согласно которой $\exists n_0' : A_{n_0'}B_{n_0'} < XY$.

Однако в ряде других книг, в частности [18], в приложении об аксиомах геометрии учебника [9], вместо аксиомы Кантора приводится следующая аксиома.

Аксиома 21′. Какова бы ни была прямая a совокупность всех ее точек нельзя пополнить новыми, также принадлежащими ей точками, чтобы на пополненной прямой были определены отношения "равен" и "лежит между", определен порядок следования точек и имели бы место аксиомы А1, А2, А9 — А12, А14 (при этом еще требуется, чтобы выполнялось свойство транзитивности отношения равенства отрезков и У31, являющиеся при выбранной нами системе аксиом наложения, а не "конгруэнтности", являются теоремами).

Аксиома 21′ носит название "аксиомы линейной полноты".

Замечание. В §74 книги [17] говорится, о том, что при наличии всех аксиом А1 — А20, А22 параллельности прямых (см. ниже) и А21 (А21′) утверждение А21′ (А21) может быть доказано.

Введем следующие важные определения: длины отрезка и величины угла, с помощью которых всякому отрезку и углу ставится в соответствие действительное число. Это позволяет, как будет видно ниже, производить над отрезками и углами арифметические действия, по сути дела, также, как и над действительными числами.

Определение 24. **Длиной** *отрезка называется поставленное ему в соответствие положительное (если отрезок ненулевой) число, удовлетворяющее условиям:*

1) существует отрезок, длина которого равна 1 *(единица измерения отрезков) ;*

2) равные отрезки имеют равные длины ;

3) длина суммы двух отрезков равна сумме длин этих отрезков ;

4) длина всякого нулевого отрезка равна нулю .

Длина отрезка AB обозначается $|AB|$. Из условия 4) вытекает, что для любой точки A $|AA| = 0$.

Следствие О24. Из О21 Б разности отрезков, аналогичного определения разности чисел и условия 3) О24 вытекает, что *если разность отрезков определена, то мера разности отрезков равна разности мер этих отрезков.*

Определение 24′. Расстоянием между двумя точками A и B или на прямой, или на плоскости, или в пространстве называется длина отрезка AB , то есть $|AB|$. Обозначается расстояние между точками A и B $\rho(A;B)$.

Стало быть, $\rho(A;B) \stackrel{df}{=} |AB|$ и оно положительно во всех случаях кроме случая совпадения точек, когда оно равно нулю.

В гл. II, §20 книги [17] доказана корректность определения длины отрезка, то есть что условия 1) — 3) О24 единственным образом определяют длину каждого ненулевого отрезка (разумеется, при выборе фиксированного отрезка в качестве единицы измерения длины, длина этого отрезка и равна 1). Аксиома Кантора при этом не используется. Важно отметить, что при доказательстве этой теоремы используется возможность деления отрезка, выбранного за единицу измерения длины, на 2 , 4 , 8 , ... , 2^n , ... частей. Для этого введем определение и сформулируем соответствующее утверждение.

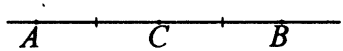


рис. 17

Определение 25. **Серединой** *ненулевого отрезка AB называется точка, лежащая на прямой (AB) и такая, что $AC = CB$* (см. рис. 17). Для нулевого отрезка AA серединой формально можно считать точку A .

*Утверждение 37. Для каждого ненулевого отрезка существует единственная середина; середина отрезка является его внутренней точкой * (то есть эта точка делит отрезок пополам).*

Доказательство см. [17], гл. II, §17, теорема 23 и [18], гл. I, §6, теорема 26.

При доказательстве У37 используются А12, А14, А15 и теоремы, выражающие первый и второй признаки равенства ("конгруэнтности") треугольников, выводимые и с использованием аксиом "конгруэнтности". Поэтому ниже, при применении в доказательстве признаков равенства треугольников метода наложения мы *не имеем права* использовать понятие длины отрезка.

Замечание. Всвязи с этим необходимо отметить, что указанное обстоятельство *не соблюдается* при доказательстве признаков равенства треугольников в учебнике [5] и книге [10], где, в частности, аксиоматически утверждается наличие у каждого ненулевого отрезка длины, большей нуля, и равные отрезки определяются как имеющие равные длины. Такого рода упрощения изложения материала, когда за аксиому или определение выдается то, что на самом деле при "полноценном" подходе к введению системы аксиом (об этом см. в конце п. 2.3.0) может быть доказано как теорема (доказательство может быть и не очень простым), вызвано, на наш взгляд, ориентацией того или иного школьного учебника на массового школьника, далеко не всегда собирающегося сдавать вступительные экзамены в вузы с повышенными требованиями к знанию математики.

Исходя из О20 и О21 и условий 2) и 3) О24, нетрудно показать, что из $AB > CD \Rightarrow |AB| > |CD|$, а из $AB < CD \Rightarrow |AB| < |CD|$, поэтому от противного (на основании наличия между числами, а также отрезками (см. У33) одного и только одного из трех соотношений: или $a = b$, или $a > b$, или $a < b$, здесь $a, b \in R$), легко получить, что из $|AB| = |CD| \Rightarrow AB = CD$ а также $|AB| > (<)|CD| \Rightarrow AB > (<)CD$. Получили важный вывод.

Утверждение 38. Любые два отрезка равны тогда и только тогда, когда равны их длины, из двух отрезков больший отрезок и только больший имеет большую длину и меньший отрезок и только меньший имеет меньшую длину, то есть $AB = CD \Leftrightarrow |AB| = |CD|$,

$$AB > CD \Leftrightarrow |AB| > |CD| \text{ , } AB < CD \Leftrightarrow |AB| < |CD| \text{ .}$$

Из определения 21 А суммы n отрезков и условия 3) в определении дли-

* В школьных курсах геометрии этот факт устанавливается возможностью проведения к любому ненулевому отрезку серединного перпендикуляра.

ны отрезка, а также, если прозвольные n отрезков можно совместить с равными им так, как указано в О21 А, по индукции можно получить справедливость следующего утверждения:

Утверждение 39. Для любого конечного количества отрезков длина суммы этих отрезков равна сумме их длин.

Замечание. Исходя из У38 и У39, можно прийти к выводу о том, что все действия над отрезками можно проводить так же, как и над их длинами (числами). При этом будут иметь место все свойства суммы отрезков (коммутативный и ассоциативный законы, свойства равенств и неравенств над отрезками, например, возможность почленного прибавления к неравенству относительно отрезков одного и того же отрезка с сохранением при этом того же неравенства и т.п.).

Применяя аксиому Кантора, можно доказать следующее важное утверждение:

Утверждение 40. Для любого действительного числа $a > 0$ от данной точки на данной полупрямой (то есть на полупрямой с началом в данной точке) можно отложить единственный отрезок, длина которого равна a .

Доказательство см. [17], гл. II, §21, теорема 35.

Замечание. Следует отметить, что в учебниках [6] и [7] это утверждение приводится в качестве аксиомы, а также, как аксиома, утверждается о существовании при данной единице измерения отрезков положительной длины каждого ненулевого отрезка. Подобное обстоятельство вызвано, по всей видимости, тем же обстоятельством, о чем говорилось в предыдущем замечании к учебнику [5] и книге [10].

С помощью аксиомы Кантора или аксиомы линейной полноты можно обосновать и метод координат на прямой (см. формулировку теоремы 5 в п. 2.0.3).

Можно чисто арифметическими методами на основе У39 и А14 доказать такое утверждение.

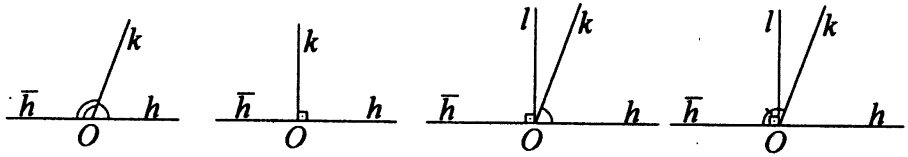
Утверждение 41. Для любого натурального числа n ($n \geqslant 2$) внутри любого ненулевого отрезка существует $n-1$ точек, делящих его на n равных отрезков. *

При этом каждый из этих равных отрезков можно формально по определению считать результатом деления отрезка на натуральное число n .

Прежде, чем ввести меру угла, введем некоторые геометрические определения, которые в этом понятии будут использоваться.

---

* В школьном курсе геометрии с помощью теоремы Фалеса геометрическим путем решается задача о делении любого отрезка на любое количество равных отрезков.



$\angle(h;k)$–*прямой* $\angle(h;k)$–*острый* $\angle(\bar{h};k)$–*тупой*

рис. 18 а) рис. 18 б) рис. 18 в) рис. 18 г)

Определение 26. Два угла первого типа (то есть два неразвернутых угла) называются **смежными**, *если они имеют общую вершину и одну общую сторону, а другие их стороны являются взаимно дополнительными лучами (то есть вместе с вершиной угла они образуют прямую). Нулевой и развернутый углы, имеющие общую вершину и сторону, мы также будем считать* **смежными**.

Из этого определения следует, что если один из смежных углов обозначить за $\angle(h;k)$, то другой из них будет иметь вид $\angle(k;\bar{h})$
(см. рис. 18 а).

Определение 27. Угол, равный своему смежному углу, называется **прямым углом** (см. рис. 18 б).

Определение 27 А. Лучи h и k такие, что $\angle(h;k)$ — прямой, называются **перпендикулярными**. Обозначаются $h \perp k$ или $k \perp h$
(см. рис. 18 б).

Определение 27 Б. Луч h называется перпендикулярным к прямой a, образованной лучами k и $\bar{k}$, если $\angle(h;k)$ (а, стало быть, $\angle(h;\bar{k})$) — прямой. Обозначается $h \perp a$. *Точку пересечения перпендикулярных прямой и луча называют* **основанием перпендикуляра** (см. рис. 18 б).

Определение 27 В. Угол первого типа, который меньше прямого угла называется **острым** *углом* (см. рис. 18 в).

Определение 27 Г. Угол первого типа, который больше прямого угла называется **тупым** *углом* (см. рис. 18 г).

Из О15 А, О22, О27, О27 В и О27 Г вытекает, что острый, прямой (который также является углом первого типа) и тупой углы являются неразвернутыми углами и меньше развернутого угла.

Утверждение 42. Если два угла равны, то и соответственно смежные им углы равны.

Доказательство см. [17], гл. II, § 17, теорема 20 и [18], гл. I, § 6, теорема 14, а также п. 2.3.1, вопрос 2, теорема 2, стало быть, доказательство этой теоремы на устном экзамене надо знать.

Утверждение 43. Прямой угол существует и все прямые углы равны.

Доказательство см. [17], гл. II, §17, теоремы 21, 22 и [18], гл. I, §6, вывод из теоремы 14 и теорема 21.

Следствие. Из данной точки O на данной прямой a в данную полуплоскость плоскости α относительно прямой a можно провести единственный луч, перпендикулярный прямой a (то есть единственный луч, образующий с любой из полупрямых прямой a с началом в точке O прямой угол).

Справедливость этого следствия легко устанавливается, например, от противного, что сразу приводит к противоречию с У43 и А15.

Введем в начале меру угла, не превосходящего развернутый угол.

Определение 28. **Мерой (величиной)** *угла называется поставленное ему в соответствие положительное (если угол ненулевой) число, удовлетворяющее условиям:*

1) существует угол, мера которого равна 1 *(единица измерения углов) ;*

2) равные углы имеют равные меры ;

3) мера суммы двух углов равна сумме мер этих углов ;

4) мера всякого нулевого угла равна нулю .

Мера угла $\angle(h;k)$ обозначается $\widehat{(h;k)}$ или $\measuredangle(h;k)$. Из условия 4) вытекает, что для любого луча h $\widehat{(h;h)} = 0$.

Следствие О28. Из О23 Б разности углов, аналогичного определения разности чисел и условия 3) О28 вытекает, что *если разность углов определена, то мера разности углов равна разности мер этих углов.*

В гл. II, §20 книги [17] говорится об аналогии доказательства корректности этого определения, то есть что условия 1) — 3) О28 единственным образом определяют меру каждого ненулевого угла (разумеется, при выборе фиксированного угла в качестве единицы измерения меры углов, мера этого угла и равна 1). При этом нет необходимости формулировать еще одну аксиому, аналогичную аксиоме Архимеда для отрезков, поскольку аналогичное утверждение доказывается в книге [18], гл. II §10, теорема 34. В частности, используется аналогичный факт возможности деления любого ненулевого угла первого типа на два равных угла, а затем каждого из полученных углов еще на два равных угла и т.д. Для этого введем определение.

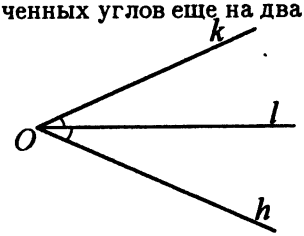


рис. 19 а)

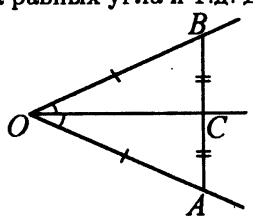


рис. 19 б)

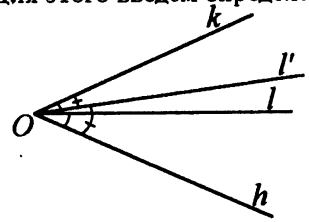


рис. 19 в)

Определение 29. **Биссектрисой** *ненулевого угла $\angle(h;k)$ первого типа называется луч l с началом в вершине угла, проходящий между его сторонами, и такой, что $\angle(h;l) = \angle(l;k)$ (то есть этот луч делит угол на два равных угла).* Формально биссектрисой нулевого угла $\angle(h;h)$ можно считать луч h (см. рис. 19 а).

Замечание. В отличии от О25 середины отрезка, в котором не требовалась, чтобы эта точка находилась внутри этого отрезка, этот факт доказывался, то в О28 биссектрисы угла требование прохождения луча l внутри угла существенно, поскольку в силу У42 дополнительный лучу l луч $\bar{l}$ также будет удовлетворять условию $\angle(h;\bar{l}) = \angle(\bar{l};k)$, однако находиться во внутренней области угла $\angle(h;k)$ он не будет.

Утверждение 44. Для каждого угла первого типа существует единственная биссектриса; биссектриса угла проходит внутри угла. *

Доказательство этого факта можно провести следующим образом (см. [18], гл. I, теоремы 11 и 26). На сторонах угла от вершины O откладываются произвольные равные отрезки $OA = OB$, концы которых соединяются, при этом получается равнобедренный треугольник ΔOAB. Далее доказывается равенство углов, противолежащих равным сторонам в этом треугольнике. Затем вследствие наличия середины C у третьей стороны (основания) AB этого треугольника и возможности провести луч с началом в вершине угла через эту середину, на основе первого признака равенства треугольников мы и получим, что указанный луч разделит угол на два равных угла. Поскольку середина указанного основания треугольника — его внутренняя точка, то и указанный луч пройдет между сторонами угла, то есть окажется во внутренней области угла (см. рис. 19 б).

Для доказательства единственности биссектрисы предположим, что существуют внутри угла $\angle(h;k)$ два луча l и l' такие, что $\angle(h;l) = \angle(l;k)$ и $\angle(h;l') = \angle(l';k)$ (см. рис. 19 в). В силу У29 для $n = 2$, беря в качестве луча a , например, луч h , в качестве луча h_1 — луч l , а в качестве луча h_2 — луч l' , мы получим, что один из лучей l или l' будет проходить между лучами h и другим из них. Пусть для определенности луч l проходит между лучами h и l' , тогда, с одной стороны, в силу У20 и У26 любой отрезок с одним концом на луче h , а с другим концом на луче l' пересечет луч l , поэтому лучи h и l' находятся в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей луч l . Аналогично этим рассуждениям так как луч l проходит между лучами h и k , то и эти лучи будут в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей луч l , а следовательно, лучи l'

* В школьных курсах геометрии факт существования биссектрисы устанавливается, например, возможностью геометрического построения биссектрисы любого неразвернутого угла.

и k уже будут в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей луч l . С другой стороны, $\angle(h;l') > \angle(h;l) \Rightarrow \angle(h;l') > \angle(l;k)$ (другие два соотношения между последними углами в силу транзитивности отношения "меньше" и "равен" для углов приведут нас к противоречию или с $\angle(h;l) = \angle(l;k)$, или согласно А15 с $l' \not\equiv l$. Аналогичным образом из $\angle(h;l') = \angle(l';k) \Rightarrow \angle(k;l') > \angle(k;l)$, а потому луч l проходит между лучами k и l' . Стало быть, такими же рассуждениями, как и выше получаем, что лучи k и l лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей луч l . Получили противоречие, которое и доказывает единственность биссектрисы.

Отметим, что поскольку в этом доказательстве использовалось существование середины отрезка, то (см. доказательство У37) неявно фигурируют: использования А12, А14, А15 и теорем, выражающих первый и второй признаки равенства ("конгруэнтности") треугольников, помимо этого применяется теорема о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника, доказываемая на основе первого признака равенства треугольников. Поэтому ниже, при применении в доказательстве признаков равенства треугольников и метода наложения мы *не имеем права* использовать понятие величины угла.

Замечание. Так же, как и выше, в соответствующем замечании о длине отрезка необходимо отметить, что указанное обстоятельство *не соблюдается* при доказательстве признаков равенства треугольников в учебнике [5] и книге [10], где, в частности, аксиоматически утверждается о наличии у каждого неразвернутого угла градусной меры, большей нуля, и равные углы определяются как имеющие равные градусные меры. Такого рода упрощения изложения материала вызваны, видимо, теми же обстоятельствами, о которых говорилось в предыдущих замечаниях.

Исходя из О22 и О23 и условий 2) и 3) О28, нетрудно показать, что из $\angle(h;k) > \angle(p;q) \Rightarrow \widehat{(h;k)} > \widehat{(p;q)}$, а из $\angle(h;k) < \angle(p;q) \Rightarrow \widehat{(h;k)} < \widehat{(p;q)}$, поэтому от противного (на основании наличия между числами, а также углами (см. У34) одного и только одного из трех соотношений: или $\alpha = \beta$, или $\alpha > \beta$, или $\alpha < \beta$, здесь $\alpha, \beta \in R$), легко получить, что из $\widehat{(h;k)} = \widehat{(p;q)} \Rightarrow \angle(h;k) = \angle(p;q)$, а также $\widehat{(h;k)} > (<) \widehat{(p;q)} \Rightarrow \angle(h;k) > (<) > (<) \angle(p;q)$. Получили важный вывод.

Утверждение 45. Любые два неразвернутых угла равны тогда и только тогда, когда равны их меры, из двух углов больший угол и только больший имеет большую меру и меньший угол и только меньший имеет меньшую меру, то есть $\angle(h;k) = \angle(p;q) \Leftrightarrow \widehat{(h;k)} = \widehat{(p;q)}$, $\angle(h;k) > \angle(p;q) \Leftrightarrow \widehat{(h;k)} > \widehat{(p;q)}$, $\angle(h;k) < \angle(p;q) \Leftrightarrow \widehat{(h;k)} < \widehat{(p;q)}$.

Из определения 23 А суммы n углов и условия 3) в определении меры угла, а также, если прозвольные n углов можно совместить с равными им так, как указано в О23 А, то по индукции можно получить справедливость следующего утверждения:

Утверждение 46. Для любого количества n углов мера суммы n углов равна сумме их мер.

Замечание. Исходя из У45 и У46, можно прийти к выводу, что все действия над углами можно проводить так же, как и над их мерами (числами). При этом будут иметь место все свойства суммы углов (коммутативный и ассоциативный законы, свойства равенств и неравенств над углами, например, возможность почленного сложения неравенств одного смысла относительно углов и т.п.).

Применяя аксиому Кантора, можно доказать и такое важное утверждение.

Утверждение 47. Для любого действительного числа α : $0 < \alpha < 2\omega$ *($\omega > 0$ — мера прямого угла) от данной полупрямой с вершиной в данной точке в данную полуплоскость относительно прямой, содержащей эту полупрямую, можно отложить единственный угол, мера которого равна α .*

Доказательство см. [17], гл. II, §21, теорема 36 (это может быть сделано по аналогии с доказательством теоремы 35).

Можно чисто арифметическими методами на основе У43 и А16 доказать такое утверждение.

Утверждение 48. Для любого натурального числа n ($n \geqslant 2$) внутри любого ненулевого угла первого типа существует $n-1$ лучей, делящих его на n равных углов.

При этом каждый из этих равных углов можно формально по определению считать результатом деления угла на натуральное число n .

Распространим теперь понятие меры угла и на развернутый угол, углы третьего типа и полный угол. Меру развернутого угла естественно определить как число 2ω , поскольку развернутый угол равен сумме двух прямых углов. Меру полного угла естественно определить как число 4ω , поскольку полный угол равен сумме двух развернутых углов. $\widehat{(\overline{h};k)} \stackrel{df}{=} 2\omega + \widehat{(h;k)}$, поскольку $\angle(\overline{h};\overline{k}) = \angle(h;\overline{h}) + \angle(h;k)$. На основе У47 о существовании $\forall \alpha' \in (0, 2\omega)$ единственного угла, $\angle(\overline{h};k)$ (уже в другой полуплоскости нежели в У47) такого, что $\widehat{(\overline{h};k)} = \alpha'$, мы получим справедливость и такого утверждения.

Утверждение 49. Для любого действительного числа α : $0 \leqslant \alpha \leqslant 4\omega$ *($\omega > 0$ — мера прямого угла) от данной полупрямой с вер-*

шиной в данной точке в сторону данной полуплоскости относительно прямой, содержащей эту полупрямую, можно отложить единственный угол, мера которого равна α , *при этом* $\alpha = 0 \Leftrightarrow \angle(h;h)$ — *нулевой,* $0 < \alpha < 2\omega \Leftrightarrow \angle(h;k)$ — *угол первого типа,* $\alpha = 2\omega \Leftrightarrow \angle(h;\overline{h})$ — *развернутый,* $2\omega < \alpha < 4\omega \Leftrightarrow \angle(h;k)$ — *угол третьего типа,* $\alpha = 4\omega \Leftrightarrow \angle(h;h)$ — *полный.*

Теперь на углы всех четырех типов распространяется справедливость У45, У46, замечаний к ним и — У48.

Отметим, что на углы всех четырех типов можно распространить и О29 биссектрисы угла: при этом биссектрисой развернутого угла $\angle(h;\overline{h})$ будет такой луч l , что $\angle(h;l)$ — прямой; биссектрисой полного угла $\angle(h;h)$ будет луч $l \equiv \overline{h}$, то есть $\angle(h;l)$ — развернутый. Для построения биссектрисы угла $\angle(h;k)$ — третьего типа достаточно построить биссектрису $\overline{l}$ угла, дополняющего его до полного угла (который будет углом первого типа), угла $\angle(h;k) = \overline{\angle(h;h)} - \angle(h;k)$ и провести луч l , дополнительный лучу $\overline{l}$. В силу У42 равенство $\angle(h;\overline{l}) = \angle(\overline{l};k) \Leftrightarrow \angle(h;l) = \angle(l;k)$. Из проведенных рассуждений и доказанного выше У44 вытекает, что у любого угла каждого из четырех типов существует единственная биссектриса.

Замечание 1. Отметим, что в полной аналогии как и над числами, над отрезками и углами вводятся отношения "больше или равен" и "меньше или равен", первое из них означает, что между углами имеет место одно из двух соотношений: или "больше", или "равен", а второе из них означает, что между углами имеет место одно из двух соотношений: или "меньше", или "равен", которые соответственно обозначаются $AB \geqslant CD$ и $AB \leqslant CD$; $\angle(h;k) \geqslant \angle(p;q)$ и $\angle(h;k) \leqslant \angle(p;q)$. Из полученных выше результатов для длин отрезков и мер углов вытекает, что соответствующие отношения "больше или равен" и "меньше или равен" будут иметь место и между длинами отрезков и мерами углов, например, $\angle(h;k) \leqslant \angle(p;q) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \widehat{(h;k)} \leqslant \widehat{(p;q)}$ и $AB \geqslant CD \Leftrightarrow |AB| \geqslant |CD|$. На эти отношения между отрезками и углами распространяются соответствующие свойства неравенств между числами.

Замечание 2. Теперь следует еще раз отметить, что до сих пор в п. 2.3.0 речь шла только о так называемых "геометрических" углах — углах четырех типов, введенных нами в О15, О15 А) — О15 Г), которые не превосходят полного угла. Однако, если бы мы попытались сложить, например, два угла третьего типа согласно введенному определению сложения углов, то получили бы в определенном смысле угол, превосходящий полный угол, который можно было бы описать как угол, полученный вращением вокруг его вершины одной из его сторон относительно другой более, чем на полный оборот, причем, вообще говоря, таких оборотов может быть более одного.

Эти обороты могут происходить в сторону каждой из двух полуплоскостей плоскости угла относительно прямой, содержащей одну из его сторон. Поэтому условно говорят: "вращение происходит против часовой стрелки" или "вращение происходит по часовой стрелке".

В тригонометрии и рассматриваются такого рода углы, о чем уже говорилось в начале п. 2.2 Здесь мы отметим, что углы, рассматриваемые в тригонометрии, как правило, имеют фиксированную вершину — начало координат, они являются *ориентированными*, то есть у углов $\angle(OM;ON)$ *существенен* порядок образующих их лучей (это означает, что $\angle(OM;ON)$ и $\angle(ON;OM)$ — разные углы). Вместо описания углов, о котором говорилось в п. 2.2, можно было бы и формально *определить* их как сумму определенного количества n полных углов (любой из двух ориентаций как против часовой стрелки, так и по часовой стрелке) и угла больше или равного нулевого угла и меньше полного угла (соответствующей ориентации). На эти углы распространяются: введенные выше определения суммы углов с учетом того, что каждый второй (конечный) луч предыдущего слагаемого угла совпадает с первым (начальным) лучом последующего слагаемого угла, поэтому у суммарного угла начальный луч — первый луч первого слагаемого угла, а конечный луч — второй луч последнего слагаемого угла, при этом ориентации слагаемых углов могут быть любыми (см. выше рис. 1 б) п. 2.2); все введенные выше, в О28 свойства меры угла и все другие, указанные выше ее свойства. Напомним, что ориентация нулевого угла считается не определенной.

В п. 2.2 говорилось о градусной и радианной мерах угла. Не повторяя здесь этих понятий, мы отметим, что существование угла, берущегося в качестве единицы измерения углов в градусной мере (это 1/90 часть прямого угла), мы можем получить на основании У48, существование же единицы измерения углов в радианной мере можно получить, исследуя вопрос об измерении длины окружности и длины дуги окружности (об этом см. ниже, в п. 2.3.2).

Обращаем внимание и на то, что в силу У40 (о возможности откладывания единственного отрезка заданной длины $a > 0$ на заданном луче, один из концов которого в начале этого луча) существует единственная общая точка у *луча* с началом в центре окружности и указанной окружности радиуса $R > 0$; далее после проведенных рассуждений на предыдущей стр., У47 и У49 нетрудно обосновать приведенные в п. 2.2 утверждения: о взаимно однозначном соответствии между действительными числами из полуинтервала $[0, 4\omega)$ и точками окружности с центром в начале координат радиуса $R > 0$ (число $\omega > 0$ — мера прямого угла, ориентированного против часовой стрелки); и о соответствии произвольной фиксированной

точке M на окружности бесконечного количества углов $\angle AOM$, меры которых имеют вид $4\omega k + \alpha_0$, $k = 0$; ± 1 ; ± 2 ; ...
(α_0 — однозначно определенное по точке M число $\in [0, 4\omega)$), и только таких углов.

V. Аксиома параллельности прямых

Определение 30. Две прямые a и b , **лежащие в одной плоскости** *, называются* **параллельными**, *если они не имеют общих точек.*

Обозначение параллельности прямых: $a \parallel b$ (см. рис. 20).

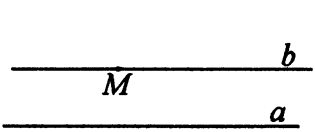


рис. 20

Аксиома 22. Через всякую точку M , не лежащую на прямой a , в плоскости α , определенной этими точкой и прямой, проходит не более одной прямой b , параллельной прямой a (см. рис. 20).

VI. О движении в геометрии и его видах

Выше, в п. III, где говорилось о понятии наложения и вводились аксиомы, выражающие свойства наложения, см. О19 и У30, из которых вытекает, что наложение одной фигуры на равную ей другую фигуру означает наличие между точками этих фигур взаимно однозначного соответствия.

С понятием наложения тесно связано и понятие движения. Сразу следует отметить, что согласно логике изложения материала, например, в гл. II книги [17], где вместо понятия наложения равных фигур вводится понятие "конгруэнтности" (равенства) фигур и вместо аксиом наложения формулируются аксиомы "конгруэнтности", понятия движения и наложения по определению отождествляются (см. определение в [17], гл. II, §19).

Следуя логике изложения материала в данной книге, мы введем следующее определение движения.

Определение 31. Отображение плоскости или пространства на себя, при котором для любых двух точек A и B фигуры F отрезок AB равен отрезку $A'B'$, где точки A' и B' — точки фигуры F' , соответствующие точкам A и B при отображении F на F' называется **движением** *или* **перемещением**.

Считая, что на плоскости или в пространстве согласно О24 при наличии А20 введена длина отрезка (то есть введено измерение), на основании У38 об одновременном равенстве или неравенстве отрезков и их длин и О24′ мы получим следующий вывод из О31.

Движение на плоскости или в пространстве есть отображение одной фигуры на другую фигуру, при котором сохраняются расстояния между любой парой точек первой фигуры и соответствующими им точками второй фигуры.

Именно в таком виде, как сформулирован этот вывод, приводится определение движения в учебниках [5] (§9), [6] (гл. XIII, §1), [7] (гл. V, §3) и книге [10], §10.

В учебниках [5], [6] и книге [10] доказывается следующее утверждение.

Утверждение 50. Если при движении три точки A , B , C , лежащие на прямой a , соответственно переходят в точки A' , B' , C' , то эти точки также лежат на некоторой прямой a' (при этом возможно, что прямые a и a' совпадают) и если точка B лежит между точками A и C, то и точка B' лежит между точками A' и C' .

При доказательстве этого утверждения было, в частности, применено неравенство треугольника (см. ниже, в вопросе 3 п. 2.3.1 теорему 8).

Из У50 вытекает, что при движении отрезки переходят в отрезки, полупрямые — в полупрямые, а также каждый треугольник переходит в равный ему треугольник и угол между полупрямыми равен углу между соответствующими полупрямыми, в которые они переходят при движении.

При доказательстве последних двух фактов применяется третий признак равенства треугольников (по трем сторонам, см. ниже, в вопросе 1 п. 2.3.1 теорему 3). Подробнее см. указанный выше материал учебников [5], [6] и книги [10].

Пространственным аналогом У50 является следующее утверждение.

Утверждение 51. Если при движении три точки A , B , C , лежащие на плоскости α , соответственно переходят в точки A' , B' , C' , то эти точки также лежат на некоторой прямой α' (при этом возможно, что плоскости α и α' совпадают).

Доказательство см. в учебнике [5], §18, п. 157.

На основе У51 также доказывается, что при движении в пространстве плоскость переходит в плоскость, а также полуплоскость переходит в полуплоскость, полупространство переходит в полупространство.

По этому поводу см. [5], §18, п. 157 и [10], §23, упражнение 1.

В учебнике [6], гл. XIII, §1, п. 115 доказано такое утверждение.

Утверждение 52. Всякое наложение является движением, а также всякое движение является наложением.

В первом из этих утверждений используется У30 и А13, а во втором из них используется третий признак равенства треугольников и теорема о серединном перпендикуляре к отрезку (см. ниже, в вопросе 4 п. 2.3.1 теоремы

1 и 3). Это означает, что вводить определение движения мы можем только после доказательства теорем, приведенных в первых четырех вопросах п. 2.3.1.

Среди видов движений в школьном курсе геометрии рассматривают: симметрию относительно точки (центральную симметрию), симметрию относительно прямой, симметрию относительно плоскости, поворот плоскости относительно некоторой ее точки на угол величины φ , поворот пространства относительно прямой на угол величины φ , параллельный перенос вдоль прямой, на плоскости, в пространстве. Мы не будем давать определения этих видов движений и исследовать их свойства, отсылая читателей к указанным учебникам и книгам.

Ниже, в п. 2.3.2 говорится и о таких преобразованиях фигур, как гомотетия и преобразование подобия.

VII. О требованиях, предъявляемых к системе аксиом

Для построения строгой логически непротиворечивой математической теории (в частности, курса евклидовой геометрии) необходимо, чтобы система аксиом, лежащая в ее основе, удовлетворяла бы следующим трем требованиям:

1) **непротиворечивости** (то есть существования хотя бы одной конкретной реализации совокупности объектов, удовлетворяющих всем аксиомам);

2) **независимости** или **минимальности** (то есть никакая из аксиом данной системы не является следствием остальных аксиом) ;

3) **полноты** (то есть между элементами любых двух ее реализаций можно *установить взаимно однозначное соответствие,* * сохраняющее отношения, установленное между элементами).

Подробнее см. [4] , §18 ; [19] , "Приложение", §2 , 4 ; [17] и [18] ; а также "Дополнение" к учебнику [9].

Мы только отметим, что первое и третье требование в полной мере обоснованы (применительно к системе аксиом Д. Гильберта, включающей в себя аксиомы "конгруэнтности", вместо аксиом "наложения") в книгах [17] — [19]. О втором требовании там говорится, что это трудоемкая задача. Поэтому в указанных книгах она решена частично. Мы же можем утверждать, что система аксиом, принятая в учебниках [5], [6] и [7], этому требованию не удовлетворяет.

* Это понятие введено выше, в сноске на стр. 10 данной книги.

2.3.1. Основная часть. Ответы на вопросы по геометрии

В этом пункте в каждом вопросе теоретической части устного экзамена по математике, посвященной геометрии, приводятся как формулировки всех определений, так и все теоремы *с доказательствами*, которые необходимо знать на вступительных экзаменах. При этом в ряде вопросов могут быть свои вводная, основная и дополнительная части. Главным является материал основной части. Что касается материала вводной и дополнительной частей того или иного вопроса, то при подготовке как к письменному, * так и к устному экзаменам по математике с ним тоже целесообразно познакомиться, тем более, что на устном экзамене этот материал может быть спрошен в качестве уточняющего или дополнительного вопроса. В некоторых случаях, которые будут специально оговорены, материал этих частей может быть использован на экзаменах без доказательств.

Напомним, что при ссылке на аксиому с тем или иным номером, на определение с тем или иным номером, на утверждение с тем или иным номером предыдущего пункта 2.3.0. мы будем соответственно говорить "в силу А13", "в силу О5", "в силу У9", что будет соответственно означать: идет ссылка на аксиому 13, на определение 5, на утверждение 9 и т.п.

Вопрос 1. Признаки равенства треугольников

Вводная часть

Определение 1. **Треугольником** *называется фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, концами которых являются эти точки.*

Указанные точки называются **вершинами** *треугольника, а указанные отрезки называются* **сторонами** *треугольника* (см. рис. 21 а).

Если, например, обозначить буквами A , B , C вершины треугольника, то сам треугольник обозначается символом $\triangle ABC$.

Говорят, что вершина A (сторона BC) *противолежит* стороне BC (вершине A), аналогично противолежащими друг другу являются вершина B и сторона AC , вершина C и сторона AB .

Отметим, что во многих случаях порядок вершин в треугольнике не является существенным, поэтому обозначения $\triangle ABC$, $\triangle BCA$, $\triangle CBA$ и т.п. представляют собой один и тот же треугольник. Однако в тех случаях, когда будет существенен порядок вершин или сторон треугольника, это будет специально оговариваться.

---

* Разумеется, что при подготовке к письменному экзамену важно хотя бы на уровне определений и формулировок теорем познакомиться с материалом основной части вопросов геометрии.

Если при рассмотрении двух треугольников мы будем считать соответствующими друг другу какую-либо пару вершин одного и другого треугольника или какую-либо пару сторон одного и другого треугольника, то будем, как правило, обозначать их одинаковыми буквами, но или с разными индексами, или без индексов, или со штрихами и т.п. Например, обозначив первый треугольник за $\triangle ABC$, а второй треугольник за $\triangle A'B'C'$, считаем, что соответствующими вершинами у них будут A и A' ; B и B' ; C и C' , а соответствующими сторонами у них будут стороны AB и $A'B'$; BC и $B'C'$; AC и $A'C'$ (см. рис. 21 г).

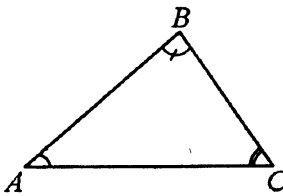


рис. 21 а)

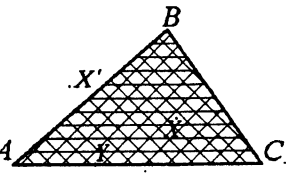


рис. 21 б)

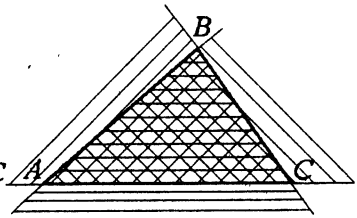


рис. 21 в)

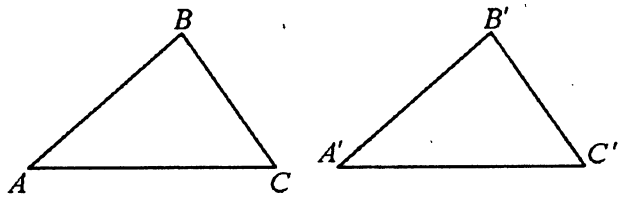


рис. 21 г)

Определение 2. **Внутренней** *точкой $\triangle ABC$ (точкой, лежащей внутри $\triangle ABC$) называется всякая точка X , которая*

1) лежит в одной полуплоскости (по одну сторону) относительно прямой (AB) , что и точка C ;

2) лежит в одной полуплоскости (по одну сторону) относительно прямой (BC) , что и точка A ;

3) лежит в одной полуплоскости (по одну сторону) относительно прямой (AC) , что и точка B .

Определение 2'. **Внутренней** *областью треугольника называется множество всех его внутренних точек.* При этом сам треугольник: его стороны (все внутренние точки его сторон) и вершины называют *границей* внутренней области этого треугольника.

См. рис. 21 б), на котором внутренняя область треугольника заштрихована тройной штриховкой.

Определение 3. Точкой, **лежащей** *на стороне треугольника, называется всякая точка Y , являющаяся внутренней точкой этой стороны.*

Определение 4. Всякая точка X' плоскости (ABC) называется **внешней** *точкой $\triangle ABC$ (точкой, лежащей вне $\triangle ABC$), если она не является его внутренней точкой, не лежит ни на одной из его сторон и не совпадает ни с одной из его вершин.*

Определение 5. Всякий треугольник, объединенный со своей внутренней областью (множеством всех его внутренних точек), называется **плоским** *треугольником.*

Определение 6. **Внутренним** *углом треугольника называется угол, внутренняя область которого содержит в себе внутреннюю область этого треугольника.*

На рис. 21 б) иллюстрируются опрелеления 2 — 5, а на рис. 21 в) иллюстрируется опрелеление 6, внутренними углами $\triangle ABC$ будут углы: $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle ACB$.

Замечание. Отметим, что всякая точка X , являющаяся внутренней точкой треугольника ABC в смысле определения 2 принадлежит пересечению внутренних областей всех внутренних углов этого треугольника.

В самом деле, точка X , находясь в одной полуплоскости с точкой B относительно прямой (AC) будет и в одной полуплоскости с лучом AB относительно прямой (AC) и она же, находясь в одной полуплоскости с точкой C относительно прямой (AB) будет и в одной полуплоскости с лучом AC (см. У20 п. 2.3.0) относительно прямой (AB) , что и означает (см. О15 п. 2.3.0 и следующее за ним определение внутренней области угла), что X принадлежит внутренней области угла BAC , аналогично устанавливается, что точка X принадлежит как внутренней области угла BCA, так и внутренней области угла ABC .

Обратно, пусть точка X принадлежит пересечению внутренних областей внутренних углов треугольника ABC , тогда она, в частности, лежит в одной полуплоскости плоскости (ABC) относительно прямой (AC) , что и луч AB и в одной полуплоскости плоскости (ABC) относительно прямой (AB) , что и луч AC , следовательно, точка X лежит в одной полуплоскости плоскости (ABC) относительно прямой (AC) , что и точка B и она лежит в одной полуплоскости плоскости (ABC) относительно прямой (AB) , что и точка C и она лежит, аналогично, рассматривая точку X как точку внутренней области $\angle ACB$, мы получим, что, в частности, эта точка будет лежать и в одной полуплоскости плоскости (ABC) относительно прямой (BC) , что и точка A . Тем самым мы доказали эквивалентность определения 2 внутренней точки треугольника и определения внутренней точки треугольника как точки, принадлежащей пересечению внутренних облас-

тей углов, вершины которых — вершины треугольника, а каждая из их внутренних областей содержит соответственно противолежащую ей сторону этого треугольника (см. рис. 21 в).

Определение 7. А) *Треугольник, у которого все внутренние углы острые, называется* **остроугольным.**

Б) *Треугольник, у которого есть прямой внутренний угол, называется* **прямоугольным.**

В) *Треугольник, у которого есть тупой внутренний угол, называется* **тупоугольным.**

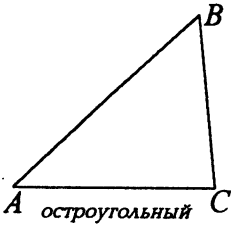


рис. 21 д)

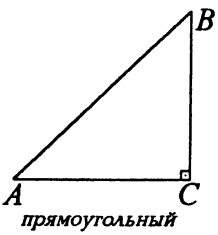


рис. 21 е)

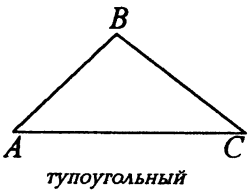


рис. 21 ж)

Основная часть

Определение 8. Треугольники называются **равными**, *если их можно совместить наложением.*

Это определение означает, что если $\triangle ABC \stackrel{df}{=} \triangle A'B'C'$, то можно совместить его соответствующие вершины A и A', B и B', C и C', откуда в силу А13 вытекает, что совмещаются стороны AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, AC и $A'C'$, следовательно, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$. Далее в силу следствия из У31А можно совместить лучи AC и $A'C'$, лучи AB и $A'B'$; лучи BA и $B'A'$, лучи BC и $B'C'$; лучи CA и $C'A'$, лучи CB и $C'B'$ (что согласуется с А3), откуда в силу А16 следуют равенства его внутренних углов $\angle BAC = \angle B'A'C'$, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$. Таким образом, *в равных треугольниках против соответственно равных сторон (углов) лежат соответственно равные углы (стороны).*

Теорема 1. (I признак)

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то эти треугольники равны.

Эта теорема означает, что если у $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle A = \angle A'$, то $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (равенство треугольников по двум сторонам и углу между ними).

Доказательство

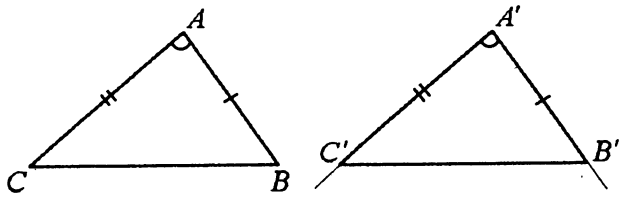


рис. 22 а)

Рассмотрим наложение $\triangle ABC$ на $\triangle A'B'C'$ так, что вершина A совместится с вершиной A', сторона AB наложится на луч $A'B'$, а сторона AC наложится на луч $A'C'$. Такое наложение существует в силу равенства углов BAC и $B'A'C'$ и А16. Так как $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, то в силу А14 совместятся точки B и B' , а также совместятся точки C и C' . В силу А13 совместятся отрезки BC и $B'C'$. Следовательно, $\triangle ABC$ совместился с $\triangle A'B'C'$, а потому по определению они равны.

Теорема 2. (II признак)

Если сторона и два прилежащие ей угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим ей углам другого треугольника, то эти треугольники равны.

Эта теорема означает, что если у $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ $AC = A'C'$, $\angle A = \angle A'$, $\angle C = \angle C'$, то $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$

(равенство треугольников по стороне и двум прилежащим углам).

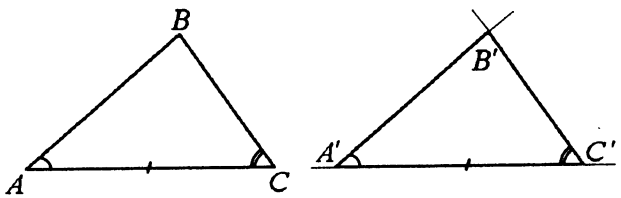


рис. 22 б)

Доказательство

Рассмотрим наложение $\triangle ABC$ на $\triangle A'B'C'$ так, что вершина A совместится с вершиной A', сторона AB наложится на луч $A'B'$, а сторона AC наложится на луч $A'C'$. Такое наложение существует в силу равенства углов BAC и $B'A'C'$ и А16. Так как $AC = A'C'$, то в силу А14 совместятся точки C и C' , поэтому в силу А13 совместятся отрезки AC и $A'C'$. В силу равенства углов ACB и $A'C'B'$ и А16 сторона CB наложится на луч $C'B'$. Поскольку точки B и B' оказались на одном луче с началом в точке A' , то в силу У20 точка B окажется в одной полуплоскости плоскости

$(A'B'C')$ относительно прямой $A'C'$, что и точка B', а потому точки B и B' окажутся на одном луче с началом в точке C'. В силу единственности общей точки прямых $(A'B')$ и $(C'B')$ (точки B') поскольку и точка B оказалась на обеих этих прямых, то $B \equiv B'$. Таким образом, в силу $A13$ совместятся отрезки AB и $A'B'$, а также совместятся отрезки CB и $C'B'$. Следовательно, $\triangle ABC$ совместился с $\triangle A'B'C'$, а потому по определению они равны.

Замечание. Доказательства первых двух признаков равенства треугольников проведено методом наложения. Такой способ доказательства излагается в учебниках [6] и [8]. В приведенном здась методе доказательства мы использовали аксиомы наложения, которые в учебнике [8] не используется совсем, а в учебнике [6] использование этих аксиом проиллюстрировано в конце книги на примере доказательства только первого признака равенства треугольников.

Теорема 3. (III признак)

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Эта теорема означает, что если у $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, то $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (равенство треугольников по трем сторонам).

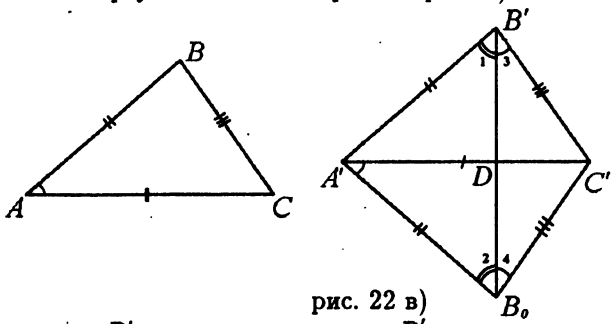


рис. 22 в)

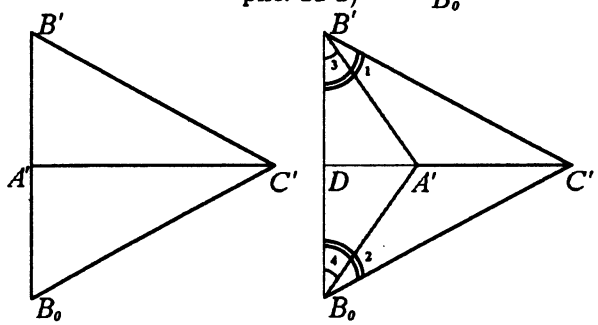


рис. 22 г)

Доказательство

Предлагается два способа доказательства третьего признака равенства треугольников, на устном экзамене по математике достаточно привести один из этих способов.

1 способ. Отложим от точки A' и луча $A'C'$ в полуплоскость плоскости $(A'B'C')$, которая не содержит точку B', угол $\angle B_0A'C' = \angle BAC$ (это возможно на основании А15), и на луче $A'B_0$ точку B_0 выберем так, чтобы $A'B_0 = AB$ (это возможно на основании А14), соединим отрезком точки B_0 и C'. В силу равенств $AC = A'C'$, $AB = A'B_0$, $AB = A'B'$, А18 и А19 п. 2.3.0 следует $A'B_0 = A'B'$ и $\angle BAC = \angle B_0A'C'$, а потому по первому признаку $\triangle B_0A'C' = \triangle BAC$. Из равенства этих треугольников вытекает, что $B_0C' = BC$, а так как $BC = B'C'$, то в силу А19 $B_0C' = B'C'$, из $\triangle B_0A'C' = \triangle BAC$ вытекают также равенства углов: $\angle B_0C'A' = \angle BCA$ и $\angle A'B_0C' = \angle ABC$. Соединим отрезком точки B' и B_0 , поскольку эти точки расположены в разных полуплоскостях плоскости $(A'B'C')$ относительно прямой $A'C'$, то отрезок B_0B' пересечет прямую $(A'C')$ в некоторой точке D_0 . Возможны пять вариантов расположения точки D_0 :

1. Точка D_0 лежит между точками A' и C' (то есть $D_0 \in A'C'$), тогда в силу У26 луч $B'B_0$ проходит между лучами $B'A'$ и $B'C'$. В силу равенств $B'A' = B_0A'$ и $B'C' = B_0C'$ соответственно вытекает, что $\triangle B'A'B_0$ и $\triangle B'C'B_0$ — равнобедренные. В силу свойств равнобедренного треугольника, рассматриваемых ниже, в вопросе 3 (их обоснование опирается *только* на уже доказанный первый признак равенства треугольников) получаем, что $\angle A'B'B_0 = \angle A'B_0B'$ и $\angle C'B'B_0 = \angle C'B_0B'$. Следовательно, в силу У32 $\angle A'B_0C' = \angle A'B'C'$, а так как по доказанному $\angle A'B_0C' = \angle ABC$, то в силу А18 и А19 $\angle A'B'C' = \angle ABC$. Из равенств $AB = A'B'$ и $BC = B'C'$ вытекает равенство треугольников ABC и $A'B'C'$ по первому признаку.

2. Точка D_0 совпадает с точкой A'. В силу равнобедренности $\triangle C'B'B_0$ вытекает равенство углов $C'B'A'$ и $C'B_0A'$. Далее точно такими же рассуждениями, что и в конце 1) получаем равенство треугольников ABC и $A'B'C'$.

3. Точка A' лежит между точками D_0 и C' (то есть $A' \in D_0C'$), тогда в силу У26 луч $B'A'$ проходит между лучами $B'D_0$ и $B'C'$, а потому в силу У27 луч $B'B_0$ не проходит между лучами $B'A'$ и $B'C'$. Далее, рассуждая точно также, как и в случае 1), в частности, применяя У32, справедливое и для этого случая, получим равенство треугольников ABC и $A'B'C'$.

4. Точка D_0 совпадает с точкой C'. Этот случай рассматривается в полной аналогии со случаем 2).

5. Точка C' лежит между точками A' и D_0 (то есть $C' \in A'D_0$), этот случай рассматривается в полной аналогии со случаем 3). Таким образом,

теорема 3, выражающая собой третий признак равенства треугольников, полностью доказана.

Замечание. В этом способе доказательства использован так называемый метод приложения одного треугольника к другому. Такой способ доказательства излагается в учебниках [6] и [8]. В приведенном здась методе доказательства мы использовали аксиомы наложения, которые в этих учебниках не используется.



рис. 22 д)

2 способ. (см. [5] и [10]). Если у треугольников ABC и $A'B'C'$ также или $\angle BAC = \angle B'A'C'$, или $\angle BCA = \angle B'C'A'$, или $\angle ABC = \angle A'B'C'$, то эти треугольники равны по первому признаку. Предположим теперь, что $\angle BAC \neq \angle B'A'C'$, $\angle BCA \neq \angle B'C'A'$, $\angle ABC \neq \angle A'B'C'$. Отложим от луча AC в полуплоскость относительно луча (AC) , в которой лежит точка B угол, равный $\angle B'A'C'$ (это возможно на основании А15), пусть это будет $\angle B_0AC$. Отложим на луче AB_0 отрезок $AB_0 = A'B'$ (в силу $\angle BAC \neq \angle B'A'C'$ вытекает, что лучи AB_0 и AB — различные, а потому точки B и B_0 также различные) и соединим отрезком точки B_0 и C. У $\triangle AB_0C$ и $\triangle A'B'C'$ $AC = A'C'$, $AB_0 = A'B'$, $\angle B_0AC = \angle B'A'C'$, следовательно, эти треугольники равны по первому признаку, а из их равенства, в частности, следует $CB_0 = C'B'$. Точки B_0 и B лежат в одной полуплоскости плоскости (ABC) относительно прямой (A) , поэтому отрезок B_0B не пересекает прямой (AC). Треугольники AB_0B и CB_0B — равнобедренные с общим отнованием B_0B , соединяя середину D отрезка B_0B (в силу У37 точка D — внутренняя точка отрезка B_0B , а потому она не лежит на прямой (AC)), мы получим (исходя из свойств равнобедренного треугольника, выводимых на основе уже доказанных первых двух признаков равенства треугольников), что $DA \perp (B_0B)$ и $DC \perp (B_0B)$, а поскольку $D \notin (AC)$ лучи DA и DC — различные, то мы пришли к противоречию с единственностью луча с началом в точке D, перпендикулярного прямой (B_0B) и проходящего в полуплоскости относительно прямой (B_0B), в которой расположен отрезок AC (см. следсивие из У43). Полученное противоречие доказывает невозможность того, что $\angle BAC \neq \angle B'A'C'$, следовательно, $\angle BAC = \angle B'A'C'$, а потому равенство $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ следует по первому признаку равенства треугольников. Теорема 3, выражающая собой третий признак равенства треугольников, полностью доказана.

Дополнительная часть

Отметим, что так как в силу следствия из У31А при совмещении равных треугольников совмещаются внутренние области соответственно равных их внутренних углов, то согласно замечанию после определения 6 вводной части данного вопроса совмещаются и внутренние области равных треугольников.

Вопрос 2. Свойства вертикальных и смежных углов. Теорема о внешнем угле треугольника

Вводная часть

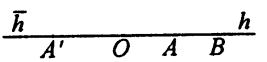


рис. 23 а)

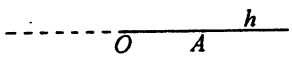


рис. 23 б)

Определение 1. Говорят, что две точки прямой лежат **по одну сторону (по разные стороны)** *от данной точки этой прямой, если данная точка* **не лежит (лежит)** *между этими двумя точками.*

"Лежать между" — первичное понятие.

На рис. 23 а) точка O лежит между точками A и A' , точка O не лежит между точками A и B .

Аксиома. Среди трех различных точек на одной прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими (см. А11 п. 2.3.0).

Существование одной и только одной из трех точек, лежащей между двумя другими, можно доказать как теорему (см. У5 п. 2.3.0 и его следствие).

Определение 2. Совокупность всех точек прямой, лежащих по одну сторону от данной точки этой прямой, называется **лучом** *или* **полупрямой**, *указанная точка называется* **начальной** *точкой или* **началом** *луча.*

Луч обозначается или OA, где O — его начало (оно в обозначении луча стоит на первом месте), A некоторая точка этого луча, или одной буквой, например, h.

На рис. 23 б) изображен луч h (луч OA) с началом в точке O.

В п. 2.3.0 формулируется теорема о том, что каждую прямую любая ее фиксированная точка разбивает на две полупрямые (два луча) с вершиной в указанной точке (см. У15 п. 2.3.0) и каждый из этих лучей по отношению к другому называется *дополнительным* (см. О10).

На рис. 23 а) дополнительные друг другу лучи OA и OA' обозначены соответственно h и $\overline{h}$.

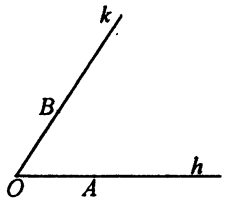


рис. 23 в)

Определение 3. **Углом** *называется фигура, которая состоит из точки* — **вершины угла** *и двух различных полупрямых, исходящих из этой точки* — **сторон угла.**

Если обозначить вершину угла за O , стороны угла за h и k , при этом если луч h обозначен еще как луч OA , а луч k обозначен еще как луч OB, то будем использовать следующие обозначения угла: или $\angle(h;k)$, или $\angle(k;h)$, или $\angle(OA;OB)$, или $\angle(OB;OA)$, а также или $\angle AOB$, или $\angle BOA$. В этих обозначениях не существенен порядок крайних точек A и B , но существенно то, что *вершина угла всегда в середине.* Применяются обозначения угла одной буквой, которой обозначена его вершина, например, $\angle A$; $\angle B$ и т.п., а также и одной цифрой $\angle 1$, $\angle 2$ и т.п.

На рис. 23 в) изображен угол $\angle(h;k)$, $\angle(OA;OB)$, $\angle AOB$.

Определение 4. **Развернутым углом** *называется угол, стороны которого являются дополнительными по отношению друг к другу полупрямыми.*

На рис. 23 а) $\angle BOA'$ — развернутый.

Замечание. В геометрии также рассматриваются *нулевой* и *полный* углы, у которых образующие их полупрямые совпадают, а их различие демонстрируется на приводимых ниже чертежах.

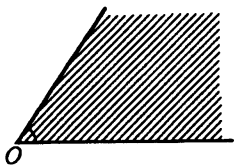
Если через стороны угла проведена плоскость, то они разбивают эту плоскость на 2 части. Одну из них называют внутренней областью угла, а другую — внешней областью угла, при этом стороны угла считаются не принадлежащими ни одной из этих областей. У нулевого (полного) угла внутренняя (внешняя) область отсутствует (см. О15 п. 2.3.0).

Определение 5. Внутреннюю область угла, объединенную с его сторонами, называют **плоским углом.**

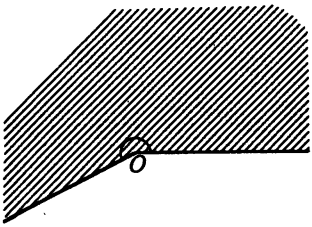
Если в дальнейшем будут использоваться плоские углы, то это будет специально оговариваться.

Подробнее о материале вводной части этого вопроса см. в п. 2.3.0, в частности, см. определения различных типов углов и их внутренних и внешних областей (О15, О15 А — Г).

См. рис. 24 а) — д), на которых внутренние области углов заштрихованы, у нулевого (полного) угла внутренняя (внешняя) область отсутствует.



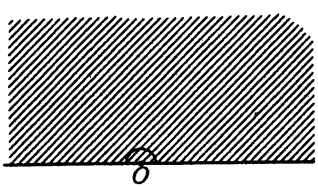
угол первого типа
рис. 24 а)



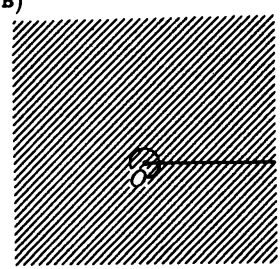
угол третьего типа (больше развернутого)
рис. 24 б)



нулевой угол
рис. 24 в)



развернутый угол
рис. 24 г)



полный угол
рис. 24 д)

Основная часть

Углы, о которых идет речь в этом вопросе, удовлетворяют определению 15А (см. О15А п. 2.3.0) или развернутые углы.

Определение 6. Два угла называются **смежными**, *если у них одна сторона общая, а две другие стороны являются дополнительными полупрямыми.*

Замечание. Нулевой угол $\angle(h;h)$ и развернутый угол $\angle(h;\overline{h})$ будем также *по определению* считать смежными.

Определение 7. Два угла называются **вертикальными**, *если стороны одного из них являются дополнительными полупрямыми другого.*

На рис. 25 а) и б) $\angle AOB$ и $\angle COB$ — смежные, причем на первом из этих рис. 25 а) смежные углы не равны, а на втором из них, 25 б) они равны, на рис. 25 в) $\angle(h;k)$ и $\angle(\overline{h};\overline{k})$ — вертикальные, $\angle(k;\overline{h})$ и $\angle(\overline{k};h)$ — вертикальные.

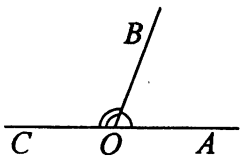


рис. 25 а)

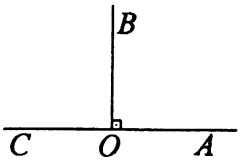


рис. 25 б)

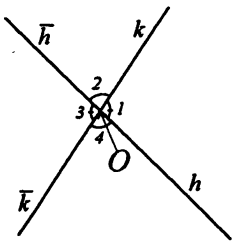


рис. 25 в)

Теорема 1. Сумма смежных углов равна развернутому углу (сумма градусных мер смежных углов равна 180° *, сумма радианных мер смежных углов равна* π*).*

Доказательство

Справедливость утверждения теоремы непосредственно вытекает из определения суммы углов (см. О23 п. 2.3.0). Что касается суммы градусных или радианных мер, то касающаяся их часть утверждения теоремы вытекает из того факта, что мера суммы углов равна сумме мер слагаемых углов (см. О28 п. 2.3.0), и того, что градусная (радианная) мера развернутого угла равна 180° (π) .

Теорема 2. Если два угла равны, то и смежные им углы равны.

Доказательство

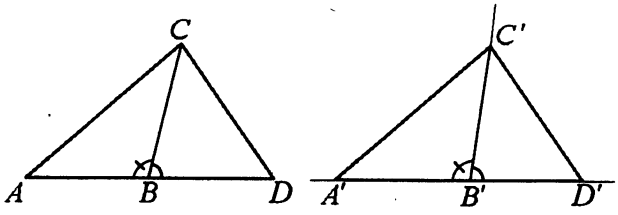


рис. 25 г)

Рассмотрим смежные углы $\angle ABC$ и $\angle DBC$, а также смежные углы $\angle A'B'C'$ и $\angle D'B'C'$. Пусть $\angle ABC = \angle A'B'C'$, докажем, что $\angle DBC = \angle D'B'C'$. Точки A , B , C , A' , B' , C' мы выберем на соответствующих лучах так, чтобы $BA = B'A'$, $BC = B'C'$, $BD = B'D'$ (это возможно в силу А14 п. 2.3.0). $\triangle BAC = \triangle B'A'C'$ по первому признаку, следовательно, $AC = A'C'$ и $\angle CAB = \angle C'A'B'$. Так как точка B лежит между точками A и D и точка B' лежит между точками A' и D' , то в силу У31 п. 2.3.0 (его доказательство несложное и там приведено) из $AB = A'B'$, $BD = B'D'$ следует $AD = A'D'$, теперь можно по первому признаку получить, что $\triangle BAC = \triangle B'A'C'$, откуда следует равенство $DC = D'C'$, следовательно

$\triangle CBD = \triangle C'B'D'$, откуда уже вытекает равенство $\angle DBC = \angle D'B'C'$. Теорема доказана.

Теорема 3. Вертикальные углы равны.

Доказательство

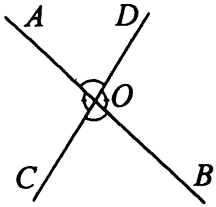


рис. 25 е)

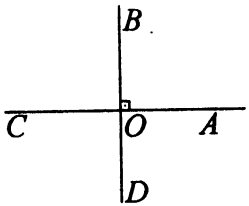


рис. 25 ж)

Равенство вертикальных углов сразу вытекает из теоремы 2, поскольку эти углы имеют общий смежный угол (стало быть, в силу А17 соответственно равные смежные углы). Например, на рис. 25 е) $\angle AOD$ и $\angle COB$ имеют один и тот же смежный угол $\angle AOC$.

Замечание. Мы провели нетрадиционное для школьных учебников доказательство теоремы о равенстве вертикальных углов, никак не используя меру угла. Те свойства меры угла, которые используются в учебниках для доказательства теоремы 3, в частности, что из равенства мер углов следует равенство самих углов, требуют отдельного доказательства (об этом см. в п. 2.3.0 замечание перед У45 и само У45).

Определение 8. **Внешним углом** *треугольника при данной вершине называется угол, смежный с внутренним углом треугольника при этой вершине.*

Сразу же отметим, что внутренняя область внешнего угла треугольника расположена во внешней области треугольника.

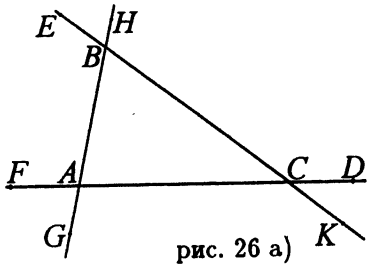


рис. 26 а)

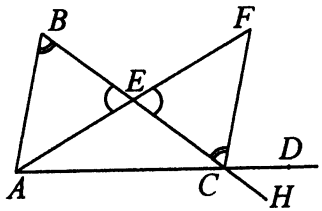


рис. 26 б)

На рис. 26 а) внешними углами $\triangle ABC$ являются $\angle FAB$, $\angle EBA$, $\angle BCD$, $\angle GAC$, $\angle HBC$ и $\angle KCA$.

Теорема 4. Внешний угол треугольника больше всякого внутреннего угла треугольника, не смежного с этим внешним углом.

Доказательство

См. рис. 26 б) Пусть дан $\triangle ABC$, через середину E стороны BC проведем луч AE и на луче прямой (AE) с началом в точке E , расположенном в той полуплоскости плоскости (ABC) относительно прямой (BC), которая не содержит точку A , отложим отрезок $EF = EA$ (согласно А14), соединим отрезком точки C и F . Рассмотрим $\triangle ABE$ и $\triangle EFC$, у них $BE = EC$ (так как E — середина отрезка BC), $AE = EF$ (по построению) и $\angle AEB = \angle CEF$ (как вертикальные). Следовательно, по первому признаку $\triangle ABE = \triangle EFC$, откуда $\angle ABC = \angle BCF$. Теперь на луче AC выберем точку D так, чтобы точка C лежала между точками A и D (существование такой точки D вытекает из А10), откуда, в частности, следует, что точки A и D лежат в разных полуплоскостях плоскости (ABC) относительно прямой (BC) , следовательно, точки F и D будут уже в одной полуплоскости плоскости (ABC) относительно прямой (BC) , в этой же плоскости будет (согласно У20) находиться луч CF . Далее поскольку по построению точка E лежит между точками A и F (точка E является точкой пересечения отрезка AF и прямой (BC)), то точка A не лежит между точками E и F , а потому отрезок EF не пересекает прямую (AD) , следовательно, точки E и F лежат в одной полуплоскости плоскости (ABC) относительно прямой (AD) , а потому и луч CF будет находиться в этой же полуплоскости. Таким образом, луч CF будет находиться во внутренней области угла BCD , откуда (см. О22 п. 2.3.0) $\angle BCF < \angle BCD$, а потому в силу равенства $\angle ABC = \angle BCF$ следует, что $\angle ABC < \angle BCD$ (предположение, что $\angle ABC = \angle BCD$ или $\angle ABC > \angle BCD$ привело бы нас на основании У35 и У36 к выполнению соответственно или равенства $\angle BCF = \angle BCD$, или неравенства $\angle BCD > \angle BCF$, что противоречит неравенству $\angle BCF < \angle BCD$). Неравенство $\angle BAC < \angle BCD$ доказывается аналогично, для этого все построения надо будет провести относительно середины отрезка AC .

Замечание. Ниже в вопросе о сумме внутренних углов треугольника будет доказано, что внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов этого треугольника, которые не смежны с данным внешним углом. Из этого факта утверждение теоремы 4 выводится как простое следствие.

Дополнительная часть

Отметим, что при пересечении двух прямых a и b образуются четыре угла, имеющие общую вершину в точке пересечения этих прямых. Если эти углы обозначить $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$, то $\angle 1$ и $\angle 3$ — одна пара вертикальных углов, а $\angle 2$ и $\angle 4$ — другая пара вертикальных углов, $\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 2$ и $\angle 3$, $\angle 3$ и $\angle 4$, $\angle 4$ и $\angle 1$ — пары смежных углов (см. выше рис. 25 в).

Определение 9. **Прямым углом** *называется угол, который равен своему смежному углу.*

На рис. 25 б) проиллюстрирован прямой угол.

Определение 10. Если при пересечении прямых a и b образуются прямые углы, то эти прямые называются **взаимно перпендикулярными**. Обозначается $a \perp b$ или $b \perp a$.

На рис. 25 ж) проиллюстрированы взаимно перпендикулярные прямые $(AC) \perp (BD)$.

О перпендикулярности лучей и прямой и луча см. п. 2.3.0, О27, О27А, О27Б, У43 и следствие из него. Там же см. понятие основания перпендикуляра.

Определение 11. Если из точки O на прямой a проведен луч, перпендикулярный к этой прямой, то говорят, что из этой точки **восставлен перпендикуляр** *к прямой a .*

Теорема 5. Если два смежных угла, каждый из которых ненулевой, не равны друг другу, то один из них острый, а другой из них тупой.

См. выше рис. 25 а), где $\angle AOB$ — острый, а смежный с ним $\angle AOB$ — тупой.

Доказательство

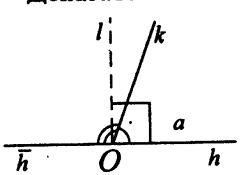


рис. 26 в)

(См. рис. 26 в). Пусть $\angle(h;k)$ и $\angle(k;\overline{h})$ — смежные и $\angle(h;k) \neq \angle(k;\overline{h})$, тогда $k \not\perp a$, где a — прямая, содержащая лучи h и $\overline{h}$. Из вершины O углов $\angle(h;k)$ и $\angle(k;\overline{h})$ в полуплоскость относительно прямой a , в которой лежит луч k , проведем луч $l \perp h$, в силу единственности такого луча (см. следствие из У43 п. 2.3.0) $l \not\equiv k$. В силу У29 (для $n = 2$) , или внутри угла $(h;l)$ расположен луч k (тогда $\angle(h;k) < \angle(h;l)$, тогда по О27 В) $\angle(h;k)$ — острый) , или внутри угла $(h;k)$ расположен луч l (тогда $\angle(h;k) > \angle(h;l)$, тогда по определению $\angle(h;k)$ — тупой) . Пусть $\angle(h;k)$ — острый (тупой), тогда луч l не лежит (лежит) во внутренней области $\angle(h;k)$, а потому он лежит в той полуплоскости относительно прямой, содержащей луч k , в которой лежит луч $\overline{h}$ (h) , а так как он лежит в полуплоскости относительно прямой a , содержащей луч k , то по определению внутренней области угла первого типа (см. после О15 п. 2.3.0) луч l лежит во внутренней области $\angle(\overline{h};k)$ $(\angle(h;k))$, следовательно, $\angle(\overline{h};k) > (<)\angle(\overline{h};l)$, тогда по О27 Г) $\angle(\overline{h};k)$ — тупой (острый). Теорема доказана.

Теорема 6. Если в треугольнике есть прямой или тупой внутренний угол, то остальные два внутренних его угла — острые.

Выше, на рис. 21 д) у $\triangle ABC$ $\angle A$ и $\angle B$ — острые, $\angle C$ — прямой, на рис. 21 е) у $\triangle ABC$ $\angle A$ и $\angle C$ — острые, $\angle B$ — тупой.

Доказательство

В силу теоремы 5 и определения прямого угла вытекает, что внешний угол треугольника, который смежен с прямым или тупым углом, будет соответственно прямым или острым, а так как в силу теоремы 4 каждый из двух других внутренних углов в треугольнике меньше указанного внешнего угла, то они могут быть только острыми.

Вопрос 3. Свойства равнобедренного треугольника

Вводная часть

Определение 1. Восставим из точки O на прямой a луч h с началом в точке O, перпендикулярный этой прямой. Если на этом луче отложить произвольный отрезок OA, то он называется **перпендикуляром**, * *проведенным (опущенным) из точки A на прямую a, луч h называется перпендикуляром, восставленным из точки O к прямой a. Точка O называется* **основанием** *этого перпендикуляра.* Обозначение: $OA \perp a$.

Расстоянием *от точки A до прямой a называется длина отрезка OA.* Обозначение $\rho(A;a)$, таким образом, $\rho(A;a) \stackrel{df}{=} |OA|$.

Определение 2. Два отрезка AB и CD называются **перпендикулярными**, *если они расположены на перпендикулярных прямых.*

Обозначаются $OA \perp CD$ или $CD \perp AB$.

Определение 3. **Медианой** *треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противолежащей ей стороны треугольника.*

Так как каждый отрезок имеет единственную середину (см. У37 п. 2.3.0), то у каждого треугольника существуют три медианы.

Определение 4. **Биссектрисой** *треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок биссектрисы внутреннего угла треугольника, соединяющий эту вершину с точкой на противолежащей стороне.* Стало быть, этот отрезок делит угол при этой вершине на два равных угла.

Так как каждый угол имеет единственную биссектрису (см. У44 и рассуждения перед замечанием после У49 в п. 2.3.0), то у каждого треугольника существуют три биссектрисы его внутренних углов.

---

* Точнее *отрезком перпендикуляра.*

Определение 5. **Высотой** *треугольника, опущенной из данной вершины, называется* **перпендикуляр**, *проведенный из этой вершины к прямой, которая содержит противолежащую сторону треугольника.*

Так как из каждой вершины треугольника на противолежащую ей сторону можно опустить единственный перпендикуляр (см. ниже теорему 2 вопроса 4), то у каждого треугольника существуют три высоты.

Основная часть

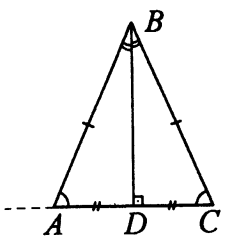


рис. 27 а)

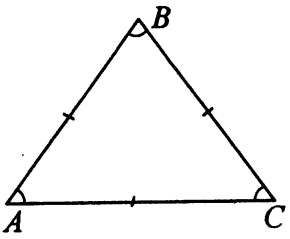


рис. 27 б)

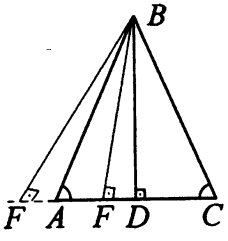


рис. 27 в)

Определение 6. Треугольник называется **равнобедренным**, *если у него две стороны равны. Эти равные стороны называются* **боковыми сторонами**, *а третья сторона называется* **основанием** *треугольника.*

Определение 7. Треугольник, у которого все стороны равны, называется **равносторонним** *или* **правильным**.

Замечание. У равностороннего треугольника любую из сторон можно принять за основание, тогда две другие будут боковыми сторонами.

На рис. 27 а) изображен равнобедренный треугольник ($AB = BC$), на рис. 27 б) изображен равносторонний треугольник ($AB = BC = AC$).

Теорема 1. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Доказательство

Пусть в $\triangle ABC$ $AB = BC$, докажем, что $\angle A = \angle C$. Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle CBA$, у которых соответствующими сторонами являются стороны AB и CB , AC и CA , BC и BA , а соответствующими углами будут $\angle A$ и $\angle C$, $\angle B$ и $\angle B$, $\angle C$ и $\angle A$. По условию у $\triangle ABC$ и $\triangle CBA$ $AB = CB$, $\angle B$ — общий, поэтому в силу А17 $\angle B = \angle B$, $CB = BA$, следовательно, $\triangle ABC = \triangle CBA$ по первому признаку, а потому $\angle A = \angle C$.

Следствие. В равностороннем треугольнике все внутренние углы равны.

Замечание. Доказанная теорема 1 означает, что во всяком треугольнике против равных сторон лежат равные углы.

Теорема 2. В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.

Доказательство

(См. рис. 27 а). Пусть в $\triangle ABC$ $AB = BC$, D — середина стороны AC

(о существовании и единственности середины любого отрезка см. У37 п. 2.3.0), тогда $D \in AC$ и $AD = DC$. Рассмотрим теперь $\triangle ABD$ и $\triangle CDB$, у них $AB = CB$ по условию, $AD = DC$ поскольку BD — медиана, $\angle A = \angle C$ по доказанному в теореме 1. Следовательно, $\triangle ABD = \triangle CBD$, а потому $\angle ABD = \angle CBD$ и $\angle ADB = \angle CDB$, первое их этих равенств углов означает, что BD — биссектриса $\triangle ABC$, второе из этих равенств вследствие того, что $\angle ADB$ и $\angle CDB$ — смежные, означает, что они прямые, следовательно $BD \perp AC$, то есть BD — высота $\triangle ABC$.

Замечание. По сути дела тем, что медиана равнобедренного треугольника, проведенная к его основанию, является биссектрисой его внутреннего угла, противолежащего основанию, доказано существование биссектрисы любого угла первого типа (см. У44 п. 2.3.0).

Теорема 3. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная из вершины, противолежащей основанию, является его медианой и высотой.

Доказательство

См. рис. 27 а). Пусть в $\triangle ABC$ $AB = BC$, прежде всего отметим, что биссектриса угла ABC проходит во внутренней области этого угла (то есть проходит между сторонами AB и BC треугольника ABC), а потому (см. У26 п. 2.3.0) она пересекает основание AC в некоторой точке E. Рассматривая $\triangle ABE$ и $\triangle CBE$, мы получим, что у них $AB = BC$, $\angle ABE = \angle CBE$ по условию, $\angle BAC = \angle BCA$ по теореме 1, поэтому $\triangle ABE = \triangle CBE$ по второму признаку. Откуда $AE = EB$, а потому AE — медиана $\triangle ABC$, и $\angle AEB = \angle CEB$, откуда так же, как в конце доказательства теоремы 2 получаем, что BE — высота $\triangle ABC$.

Теорема 4. Углы при основании равнобедренного треугольника всегда острые.

Доказательство

Пусть в $\triangle ABC$ $AB = BC$, по доказанному $\angle BAC = \angle ACB$. Внешний угол треугольника, который, например, является смежным углу BAC (по теореме 4 вопроса 2), будет больше $\angle BCA$, а потому он будет больше и смежного ему угла BAC. В силу теоремы 6 предыдущего вопроса этот внешний угол может быть только тупым, а потому $\angle BAC$ и $\angle ACB$ — острые.

Дополнительная часть

Теорема 5. (Признак равнобедренного треугольника).

Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

Доказательство

См. рис. 27 а). Пусть в $\triangle ABC$ $\angle A = \angle C$, докажем, что $AB = BC$. Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle CBA$, у которых соответствующими сторонами являются стороны AB и CB, AC и CA, BC и BA, а соответствующими

углами будут $\angle A$ и $\angle C$, $\angle B$ и $\angle B$, $\angle C$ и $\angle A$. По условию у $\triangle ABC$ и $\triangle CBA$ $\angle A = \angle C$, $\angle C = \angle A$ (см. А18 п. 2.3.0, в силу которой $\angle A = \angle C \Leftrightarrow \angle C = \angle A$), AC — общая сторона, поэтому в силу А17 $AC = CA$, следовательно, $\triangle ABC = \triangle CBA$ по второму признаку, а потому $AB = BC$.

Следствие. Если в треугольнике все внутренние углы равны, то он равносторонний.

Замечание. Доказанная теорема 5 означает, что во всяком треугольнике против равных углов лежат равные стороны.

Теорема 6. Высота, проведенная в равнобедренном треугольнике к основанию, является медианой и биссектрисой.

Доказательство

См. рис. 27 в). Пусть в $\triangle ABC$ $AB = BC$, тогда в силу теоремы 1 $\angle A = \angle C$, опустим из вершины B на прямую (AC) перпендикуляр BF. Докажем, что основание этого перпендикуляра, точка F будет внутренней точкой стороны AC треугольника ABC . Предположим, что это не так, тогда возможны четыре варианта расположения точки F на прямой (AC):

1. Точка A лежит между точками F и C , тогда $\angle CAB$ — внешний угол $\triangle ABF$, следовательно, в силу теоремы о внешнем угле треугольника он больше прямого угла AFB , а потому он тупой, что противоречит теореме 4, следовательно случай 1) не возможен .

2. Точка F совпадает с точкой A , тогда $\angle BAC$ — прямой, а потому $\angle ACB = \angle BAC$ также прямой, но, с другой стороны смежный углу BAC угол, являющийся прямым и внешним углом $\triangle ABC$ больше прямого угла ACB , опять получили противоречие, следовательно, случай 2) также не возможен .

Аналогично случаю 1) доказывается невозможность того, что точка B лежит между точками A и F , и невозможность того, что точка F совпадает с точкой B . Итак, доказано, что точка F лежит между точками A и B .

Рассматривая прямоугольные $\triangle ABF$ и $\triangle CBF$, получим их равенство по общему катету и гипотенузе (см. ниже вопрос 9 о признаках равенства прямоугольных треугольников). Из равенства этих треугольников получаем $AF = FB$ и $\angle ABF = \angle CBF$ (то есть на самом деле на рис. 27 в) точка F совпадает с точкой D).

Следующий материал (теоремы 7 — 10 и следствия) не имеет прямого отношения к данному вопросу, но он вытекает из того, что доказано в этом вопросе выше, и в дальнейшем этот материал будет использоваться.

Теорема 7. В любом треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

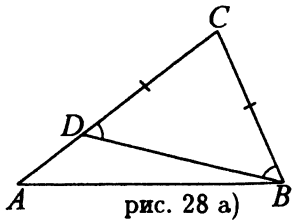


рис. 28 а)

Доказательство

См. рис. 28 а). Пусть в $\triangle ABC$ $AC > BC$, докажем, что $\angle ABC > \angle CAB$. Для этого отложим на луче CA от его начала C отрезок $CD = CB$, откуда $CD < CA$, следовательно, точка D является внутренней точкой отрезка CA. Соединим отрезком точки B и D, так как $CD = CB$, то треугольник BCD — равнобедренный, следовательно в силу теоремы 1 $\angle BDC = \angle DBC$. Поскольку луч BD с началом в точке B пересекает отрезок AC, то в силу У26 п. 2.3.0 луч BD проходит между лучами BA и BC, а потому (см. О22 п. 2.3.0) $\angle ABC > \angle DBC = \angle BDC$. $\angle BDC$ — внешний угол треугольника ABD, поэтому в силу теоремы 4 вопроса 2 $\angle CDB > \angle CAB$. В силу транзитивности отношения $>$ между углами (см. У36 п. 2.3.0) $\angle ABC > \angle CAB$.

Следствие 1. В любом треугольнике против меньшей стороны лежит меньший угол.

Доказательство

Если в $\triangle ABC$ $BC < AC$, то по определению отношения $<$ между отрезками и углами $BC < AC \Leftrightarrow AC > BC \Rightarrow \angle ABC > \angle CAB \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \angle CAB < \angle ABC$.

Следствие 2. В любом треугольнике против большего (меньшего) угла лежит большая (меньшая) сторона.

Доказательство

Пусть в $\triangle ABC$ $\angle ABC > (<) \angle CAB$, докажем, что $AC > (<) BC$. Предположим, что $AC \leqslant (\geqslant) BC$, тогда в силу замечания к теореме 1, теоремы 7 и следствия 1 из нее $\angle ABC \leqslant (\geqslant) \angle CAB$, пришли к противоречию с У35 п. 2.3.0 о наличии одного и только одного из трех соотношений $>$, $<$, $=$ между углами, которое и доказывает это следствие.

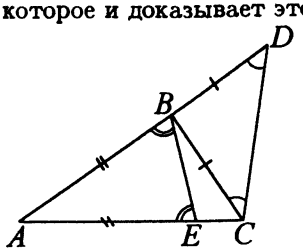


рис. 28 б)

Теорема 8. (Неравенство треугольника).

В любом треугольнике каждая его сторона меньше суммы двух других его сторон.

Доказательство

Поскольку не самая большая сторона в треугольнике не превосходит наибольшую из его сторон, которая в свою очередь меньше суммы самой себя и третьей стороны этого треугольника, то для не самой большей стороны треугольника утверждение теоремы справедливо. Пусть в треугольнике ABC AC — наибольшая сторона. На луче BD прямой (AB) , не содержащем точку A , от начала B отложим отрезок BD , равный BC , и соединим отрезком точки D и C (см. рис. 28 б). Треугольник BCD — равнобедренный, следовательно, по теореме 1 $\angle BCD = \angle ADC$. Поскольку точка B лежит между точками A и C , то луч CB пересекает отрезок AD в точке B , следовательно, луч CB проходит между сторонами CA и CD треугольника ACD , а потому $\angle ACD > \angle BCD = \angle ADC$, следовательно, в силу следствия 2 теоремы 7 и равенства $BD = BC$
$AD > AC \Leftrightarrow AB + BD > AC \Leftrightarrow AB + BC > AC$. Теорема доказана.

Замечание. В дополнение к утверждению теоремы 8 отметим, что если три точки A , B , C лежат на одной прямой и точка B не лежит между точками A и C , то или точка A лежит между точками B и C , или точка C лежит между точками A и B , тогда согласно О20 и О21 п. 2.3.0 соответственно или $AC < BC \Rightarrow AC < AB + BC$ или $AC < AB \Rightarrow AC < AB + BC$. Если точки A , B , C не лежат на одной прямой, то по доказанному в теореме 8 $AC < AB + BC$. Если точки A , B , C лежат на одной прямой, причем или точка B лежит между точками A и C , или $B \equiv A$, или $B \equiv C$, то согласно О20 и О21 п. 2.3.0 соответственно или $AC = AB + BC$, или $AC = BC = AA + BC = AB + BC$, или $AC = AB = AB + CC = AB + BC$. Следовательно, мы доказали теорему.

Теорема 9. Равенство $AC = AB + BC$ выполняется тогда и только тогда, когда точки A , B , C лежат на одной прямой, причем или точка B лежит между точками A и C , или $B \equiv A$, или $B \equiv C$, во всех остальных случаях $AC < AB + BC$.

Теорема 10. Имеют место неравенства $AC - AB < BC$,
$AC - BC < AB$, где AC — наибольшая сторона треугольника, причем каждое из этих неравенств имеет место, если соответствующая разность определена, то есть или $AC \geqslant AB$, или $AC \geqslant BC$.

Доказательство

Если AC — наибольшая сторона $\triangle ABC$, то разности $AC - AB$ и $AC - BC$ определены, если AC не является наибольшей стороной $\triangle ABC$, то разность $AC - AB$ $(AC - BC)$ определена только при $AC \geqslant AB$ $(AC \geqslant BC)$, это и предполагается в теореме.

Допустим, например, что разность $AC - AB$ определена, на луче AC от вершины A отложим отрезок $AE = AB$, если $AE = AC$, то отрезок $C \equiv E$, то есть отрезок CE — нулевой, который по определению считается меньше любого отрезка, в частности меньше отрезка BC, если $AE < AC$, то точка $E \in AC$ (см. рис. 28 б). Соединим отрезком точки B и E, $\triangle ABE$ — равнобедренный ($AE = AB$), следовательно, $\angle AEB = \angle ABE$.
$\angle CEB$ — внешний угол равнобедренного $\triangle ABE$, который по теореме 4 тупой, а потому он больше $\angle EBC$ в $\triangle CEB$, следовательно, $BC > CE = AC - AE = AC - AB$, то есть $AC - AB < BC$, теорема доказана.

Вопрос 4. Свойство серединного перпендикуляра к отрезку. Свойство биссектрисы угла

Вводная часть

Докажаем некоторые теоремы, результаты которых будут применяться в дальнейшем.

Теорема 1. Пусть $\angle(h;k)$ — произвольный угол первого типа (см. О15, О15А п. 2.3.0), O — его вершина, l — его биссектриса. Тогда каждый из углов $\angle(h;l)$ и $\angle(l;k)$ — острый.

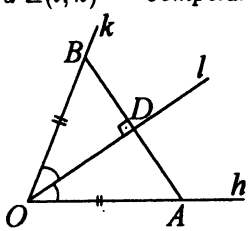


рис. 29 а)

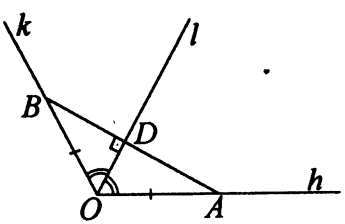


рис. 29 б)

Доказательство

См. рис. 29 а) и б). На рис. 29 а) $\angle(h;k)$ — острый, а на рис. 29 б) $\angle(h;k)$ — тупой. Для прямого $\angle(h;k)$ рассуждения точно такие же. Отложим на лучах h и k равные отрезки OA и OB ($A \in h$, $B \in k$). Это возможно провести следующим образом: на отрезке луче h откладывается произвольный отрезок OA, а затем на луче k (согласно А14) можно отложить единственный отрезок $OB = OA$. Соединим отрезком точки A и B, при этом получится равнобедренный треугольник AOB. В силу определения биссектрисы угла луч l проходит внутри угла AOB, а потому (см. У26 п. 2.3.0) он пересекает отрезок AB в точке D. По доказанному в теореме 2 вопроса 3 $l \perp AB$, тогда в прямоугольных треугольниках OAD и OBD с прямыми углами ODA и ODB в силу теоремы 6 вопроса 2 углы AOD и BOD могут быть только острыми. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть a — произвольная прямая, M — произвольная, не лежащая на ней точка, тогда в плоскости α этой точки и прямой из точки M на прямую a можно провести единственный перпендикуляр.

Доказательство

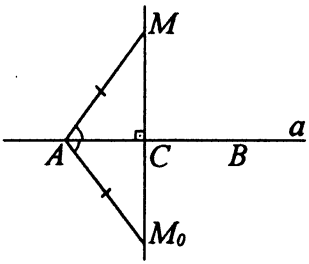


рис. 30 а)

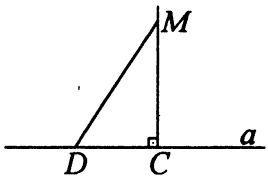


рис. 30 б)

См. рис. 30 а). Выберем на прямой a две различные точки A и B. Если окажется, что, например, прямые (MA) и (AB) перпендикулярны, то MA — перпендикуляр, проведенный из точки M на прямую a, точка A — основание этого перпендикуляра. Аналогичная ситуация, если $(MB) \perp (AB)$. Если оказалось, что $(MA) \not\perp (AB)$ и $(MB) \not\perp (AB)$, то поскольку прямая a разбивает плоскость α на две полуплоскости, в одной их которых находится точка M, мы в другой полуплоскости от точки A и луча AB отложим $\angle M_0AB = \angle MAB$ (см. А15 п. 2.3.0, кстати, соответственно смежные с каждым из этих углов углы в силу теоремы 2 вопроса 2 будут тоже равны) и выберем на луче AM_0 точку M_0 так, чтобы $AM_0 = AM$ (см. А14 п. 2.3.0). Так как точки M и M_0 лежат в разных полуплоскостях плоскости α относительно прямой a, то, соединяя отрезком точки M и M_0, мы получим, что он пересечет прямую a в некоторой точке C. Точки C и A различные, так как в противном случае (то есть если $C \equiv A$) мы бы получили, что углы BAM и BAM_0 с одной стороны, смежные, с другой стороны, равные, а потому — прямые, что противоречит рассматриваемому случаю. Так как в треугольниках MCA и M_0CA $AM = AM_0$, $\angle CAM = \angle CAM_0$ и сторона AC общая, поэтому по первому признаку $\triangle ACM = \triangle ACM_0$, а потому $\angle MCA = \angle M_0CA$, так как эти углы смежные, то, следовательно, они прямые. Итак доказано существование перпендикуляра, проведенного из точки M на прямую a.

Докажем единственность этого перпендикуляра. Предположим, что из точки M на прямую a можно провести два перпендикуляра. Пусть это будут перпендикуляры MC и MD $(C, D \in (AB))$, см. рис. 30 б), так как эти перпендикуляры по предположению различные, то и точки C и D также различные, мы получили, что в $\triangle CMD$ два угла прямые, что

невозможно согласно теореме 6 вопроса 2. Теорема 2 полностью доказана.

Теорема 3. Если $\angle(h;k)$ — острый (тупой), то основание перпендикуляра, проведенного из произвольной точки одной из его сторон на другую сторону лежит на последней стороне (лежит на луче, дополнительном последней стороне).

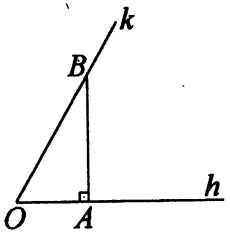


рис. 31 а)

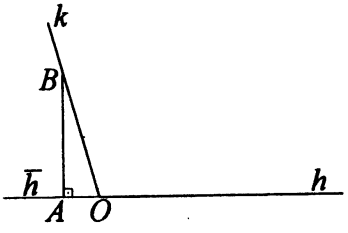


рис. 31 б)

Доказательство

Пусть $\angle(h;k)$ — острый, B — произвольная точка на стороне k , согласно теореме 2 существует единственный перпендикуляр, проведенный из точки B , на прямую, содержащую луч h , пусть A — основание этого перпендикуляра, O — вершина угла $(h;k)$. Если предположить, что или $A \equiv O$, или $A \in \overline{h}$, то в первом случае $k \perp h$, стало быть, $\angle(h;k)$ — прямой, что неверно, во втором случае в прямоугольном $\triangle OAB$ в силу теоремы 6 вопроса 2 $\angle AOB$ — острый, а потому смежный ему $\angle(h;k)$ — тупой, что также неверно. Следовательно, $A \in h$.

Пусть $\angle(h;k)$ — тупой, тогда в силу теоремы 5 вопроса 2 $\angle(k;\overline{h})$ — острый и уже по доказанному $A \in \overline{h}$. Теорема доказана.

Основная часть

Определение 1. **Серединным перпендикуляром к отрезку** *называется прямая, проходящая через середину отрезка и перпендикулярная ему.*

Определение 2. Луч, исходящий из вершины угла, лежащий в его внутренней области и делящий его на два равных угла, называется **биссектрисой угла.**

Теорема 4. Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку (ненулевому) равноудалена от концов этого отрезка. Доказательство см. ниже.

Теорема 5. Каждая точка биссектрисы неразвернутого угла (угла первого типа, см. О15, О15А п. 2.3.0) *равноудалена от его сторон (то есть от прямых, содержащих стороны угла).* Доказательство см. ниже.

Равноудаленость точки, о которой говорится в теоремах 4 и 5 соответственно означает, что расстояния от точки на серединном перпендикуляре

к отрезку до его концов равны (то есть равны длины отрезков, соединяющих точку серединного перпендикуляра с концами отрезка), и расстояния от точки на биссектрисе угла до его сторон равны (то есть равны длины перпендикуляров, проведенных из этой точки на стороны).

Доказательства теорем 4 и 5

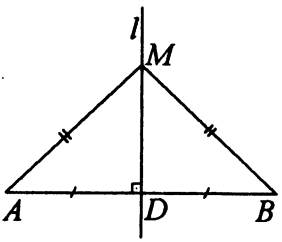


рис. 32 а)

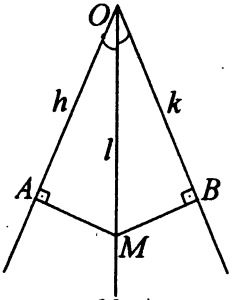


рис. 33 а)

Теорема 4. См. рис. 32 а). Соединим отрезками произвольную точку M серединного перпендикуляра l к отрезку AB с точками A и B (точка M отлична от точки D — середины отрезка AB), тогда в треугольниках AMD и BMD $\angle ADM = \angle BDM$ как прямые углы, $AD = DB$, DM — общая сторона, следовательно, $\triangle ADM = \triangle BDM$ по первому признаку, а потому $AM = MB$. Из определения длины отрезка (см. О24 п. 2.3.0) вытекает, что из $AM = MB \Rightarrow |AM| = |MB|$. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. См. рис. 33 а). Опустим из произвольной точки M биссектрисы l угла $\angle(h;k)$ перпендикуляры на стороны h и k , пусть A и B — основания этих перпендикуляров, O — вершина $\angle(h;k)$, поскольку в силу теоремы 1 $\angle(h;l)$ и $\angle(l;k)$ — острые, точки A и B будут лежать именно на сторонах угла h и k соответственно. У прямоугольных треугольников OAM и OBM сторона OM (гипотенуза) общая, $\angle MOA = \angle MOB$, следовательно по гипотенузе и острому углу $\triangle MOA = \triangle MOB$, а потому $MA = MB \Rightarrow |MA| = |MB|$. Теорема 5 доказана.

Замечание. В доказательстве теоремы 5 использован один из признаков равенства прямоугольных треугольников, доказываемых ниже, в вопросе 9, при доказательстве указанного признака используется только *предшествующий* доказательству теоремы 5 вопроса 4 материал п. 2.3.1.

Обращаем внимание на умение решать следующие задачи на построение циркулем и линейкой: построить серединный перпендикуляр к данному отрезку, попутно решается задача и о делении данного отрезка на две равные части; провести биссектрису угла, которые разбираются в учебниках [5], [6], [8], книге [10].

Дополнительная часть

Справедливы и теоремы, обратные теоремам 4 и 5, выражающие признаки серединного перпендикуляра и биссектрисы угла.

Теорема 6. Каждая точка, равноудаленная от концов отрезка (на плоскости), лежит на серединном перпендикуляре к нему.

Доказательство см. ниже.

Теорема 7. Каждая точка, лежащая внутри угла и равноудаленная от его сторон, лежит на биссектрисе этого угла. Доказательство см. ниже.

Доказательства теорем 6 и 7

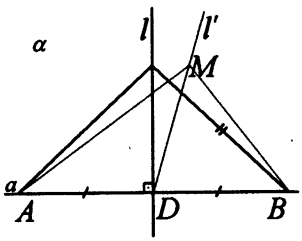


рис. 32 б)

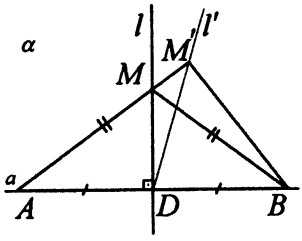


рис. 32 в)

Теорема 6. 1 способ. См. рис. 32 б). Пусть на плоскости α на некоторой прямой a выбран ненулевой отрезок AB и M — произвольная точка этой плоскости, для которой $MA = MB$, если $M \in (AB)$, то M — середина отрезка AB, если $M \notin (AB)$, то треугольник AMB — равнобедренный. Восставим перпендикуляр l из середины D отрезка AB в плоскости α и соединим середину этого отрезка с точкой M. Обозначим луч DM за l'. В силу теоремы 2 вопроса 3 медиана $DM \perp AB$, поэтому в силу единственности перпендикуляра, проходящего через середину отрезка AB в плоскости α, $l' \equiv l$, следовательно, точка $M \in l$. Теорема 6 доказана.

2 способ. См. рис. 32 в). Докажем, что всякая точка M' в плоскости α, не лежащая на серединном перпендикуляре к отрезку AB не будет равноудалена от точки концов отрезка AB. Рассмотрим произвольную такую точку M'. Если она не на l (см. рис. 32 в), то она в одной из полуплоскостей плоскости α относительно прямой, содержащей луч l. Для определенности пусть она будет в той же полуплоскости, что и точка B (так как прямая, содержащая луч l, проходит через середину отрезка AB, то есть его внутреннюю точку, то она пересекает этот отрезок, а потому его концы — точки A и B находятся в разных полуплоскостях относительно этой прямой). Если точка M' лежит на прямой (AB), то в силу единственности середины отрезка AB она может только совпадать с этой серединой, что противоречит ее местоположению. Следовательно, точка M' не лежит на прямой (AB), тогда отрезок AM пересечет серединный перпендикуляр к

отрезку AB в некоторой точке M, соединим отрезком точки M и B. В силу теоремы 4 $AM = MB$, а в силу неравенства треугольника для $\triangle BMM'$ $BM + MM' > BM' \Rightarrow AM' = AM + MM' > BM'$. Теорема 6 доказана.

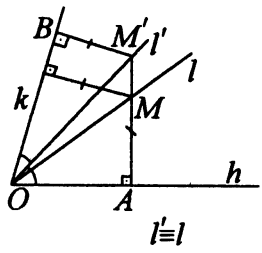


рис. 33 б)

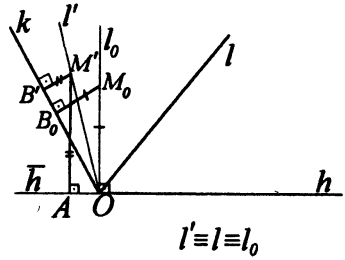


рис. 33 в)

Теорема 7. Пусть $\angle(h;k)$ — угол первого типа, O — его вершина, l — его биссектриса, M' — произвольная точка, принадлежащая его внутренней области и равноудаленная от его сторон. Проведем через точку M' луч $l' \equiv OM'$, в силу У20 п. 2.3.0 он целиком будет расположен во внутренней области угла $(h;k)$.

В случае, когда $\angle(h;k)$ — острый или прямой (см. рис. 33 б), ввиду того, что по О22 п. 2.3.0 $\angle(h;l') < \angle(h;k)$ и $\angle(l';k) < \angle(h;k)$, а потому в силу О27В п. 2.3.0 $\angle(h;l)$ и $\angle(l;k)$ — острые. Следовательно, в силу теоремы 3 основания перпендикуляров, проведенных из точки $M' \in l'$, на прямые, содержащие стороны $\angle(h;k)$, будут лежать на соответствующих сторонах этого угла, пусть $M'A \perp h$, $A \in h$, $M'B \perp k$, $B \in k$. Поскольку $|M'A| = |M'B|$, то $M'A = M'B$. В прямоугольных треугольниках $\triangle OM'A$ и $\triangle OM'B$ OM' — общая гипотенуза и соответственно равные катеты $M'A = M'B$, следовательно, по катету и гипотенузе $\triangle OM'A = \triangle OM'B$, а потому $\angle M'OA = \angle M'OB$. В силу единственности биссектрисы угла (см. У44 п. 2.3.0) это означает, что $M' \in l$, а потому $l' \equiv l$, следовательно (см. рис. 33 б), $M' \equiv M$.

В случае, когда $\angle(h;k)$ — тупой (см. рис. 33 в), рассуждая также, как и для острого или прямого угла, мы должны рассмотреть случаи, когда, например, $\angle(h;l')$ прямой или тупой. Проведем луч $l_0 \perp h$ с началом в точке O в ту же полуплоскость относительно прямой, содержащей лучи h и $\overline{h}$, в которой находятся лучи l и l'. Если $\angle(h;l')$ — прямой, то $l' \equiv l_0$, поскольку при этом $\angle(h;k) > \angle(h;l_0)$ луч l_0 проходит между лучами h и k, а потому в силу У27 п. 3.2.0. луч k не проходит между лучами h и l_0. Следовательно, луч k лежит в той же полуплоскости относительно прямой, содержащей луч l_0, что и луч $\overline{h}$, а так как луч k находится в той же полуплоскости относительно прямой, содержащей луч $\overline{h}$, что и луч l_0, то он проходит

между лучами l_0 и $\overline{h}$. Это означает, что $\angle(l_0;k)$ меньше прямого угла $\angle(l_0;\overline{h})$, а потому он острый.

Если $\angle(h;l')$ — тупой, то луч l_0 проходит между лучами h и l' , а также луч l_0 проходит между лучами h и k . Аналогично только что проведенным рассуждениям $\angle(l_0;l')$ — острый, $\angle(l_0;k)$ — острый, а потому так как луч l' лежит в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей луч k, что и луч l_0 , и он лежит в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей луч l_0 , что и луч k , он проходит между лучами l_0 и k . Следовательно, $\angle(l';k) \prec \angle(l_0;k)$, а потому $\angle(l;k)$ — острый.

Пусть $\angle(h;l)$ — прямой, тогда $l \equiv l_0$ и основание перпендикуляра, проведенного из точки $M' \equiv M_0 \in l$ на луч h совпадет с вершиной угла O , а поскольку $\angle(l_0;k)$ — острый, то основание перпендикуляра, проведенного из точки $M_0 \in l_0$ на прямую, содержащую луч k (точка B_0), попадет на луч k . Итак, $\triangle OM_0B_0$ — прямоугольный, его гипотенуза OM_0 как сторона, лежащая против его наибольшего — прямого угла, больше любого из его катетов, поэтому $OM_0 > MB_0$, что противоречит равенству $OM_0 = MB_0$.

Если $\angle(h;l')$ — тупой, то основание перпендикуляра, проведенного из точки $M' \in l$ на прямую, содержащую луч h (точка A), окажется на луче $\overline{h}$. Поскольку $\angle(l';k)$ — острый, то основание перпендикуляра, проведенного из точки $M' \in l'$ на прямую, содержащую луч k (точка B'), попадет на луч k. У прямоугольных $\triangle OM'B'$ и $\triangle OM'A$ гипотенуза OM' — общая, а катеты $M'A$ и $M'B'$ равны. Следовательно, по катету и гипотенузе $\triangle OM'B' = \triangle OM'A$, потому $\angle AOM' = \angle B'OM'$, что невозможно, так как луч k проходит между лучами $\overline{h}$ и l' и потому $\angle AOM' > \angle B'OM'$, пришли к противоречию. Таким образом, $\angle(h;l')$ может быть только острым, а для этого случая совпадение луча l' с биссектрисой угла выше доказано. Теорема 7 полностью доказана.

Замечание. В доказательстве теоремы 7 использован один из признаков равенства прямоугольных треугольников, доказываемых ниже, в вопросе 9, при доказательстве этого признака используется только *предшествующий* доказательству теоремы 5 вопроса 4 материал п. 2.3.1.

Важно еще отметить, что в учебной литературе (см. учебники [6], [8], книги [11] и [12]) при доказательстве теоремы 7 *не доказывается местоположение оснований перпендикуляров, проведенных из точки внутри угла на его стороны*, поэтому доказательство теоремы 7 в этих книгах представляется более простым, по сравнению с только что приведенным. Еще одной особенностью приведенного доказательства теоремы 4 является *не использование* меры угла.

Вопрос 5. Теоремы о параллельных прямых на плоскости

Основная часть

Начиная с этого вопроса, мы будем использовать меру (измерение) угла.

См. выше У1 А) п. 2.3.0., согласно которому две различные прямые на плоскости или в пространстве имеют не более одной общей точки, и У2 п. 2.3.0., согласно которому через прямую и не лежащую на ней точку, так же как и через две пересекающиеся прямые проходит одна и только одна (единственная) плоскость. Эти утверждения доказываются на основе аксиом принадлежности (А1 — А8).

Определение 1. Две прямые, имеющие единственную общую точку, называются **пересекающимися**, *указанная точка называется их* **точкой пересечения**. Обозначаются $a \cap b$ или $a \cap b \equiv M$ (M — точка пересечения прямых a и b).

Определение 2. Две различные прямые на плоскости называются **параллельными**, *если они не имеют общих точек (не пересекаются).* Обозначаются $a \parallel b$.

Из этого определения непосредственно вытекает, что $a \parallel b \Leftrightarrow b \parallel a$.

Из определения 2, У18 и У20 п. 2.3.0. вытекает, что каждая из двух параллельных прямых целиком располагается в одной полуплоскости относительно другой прямой, поскольку в противном случае эти прямые пересекались бы.

Замечание. Поскольку выше, в п. 2.3.0. мы договорились две совпадающие прямые по сути дела считать одной прямой, мы не будем (в отличии, например, от п. 46 книги [12]) считать совпадающие прямые параллельными.

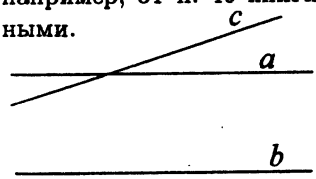


рис. 34 а)

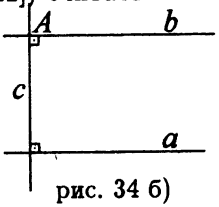


рис. 34 б)

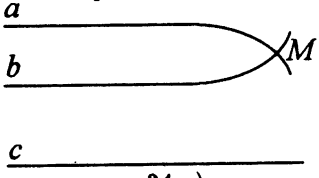


рис. 34 в)

Аксиома. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости (проходящей через указанные точку и прямую) не более одной прямой, параллельной данной.

Следствие. Если некоторая прямая, проходящая в плоскости некоторых двух параллельных прямых, пересекает одну из них, то она пересекает и другую.

Доказательство. См. рис. 34 а). Пусть прямые a и b параллельны, прямая c (лежащая в плоскости прямых a и b) пересекает прямую a , предположим, что $c \parallel b$, тогда мы получим, что через точку пересечения прямых

a и c проходят две различные прямые, параллельные прямой b, что противоречит аксиоме параллельности прямых.

Теорема 1. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости (проходящей через указанные точку и прямую) по крайней мере одну прямую, параллельную данной.

Доказательство

См. рис. 34 б). Пусть на плоскости α, которая содержит прямую a и не принадлежащую ей точку A, через точку A проведена прямая $c \perp a$ (существование и единственность такой прямой доказаны в теореме 2 вопроса 4). Через точку A в плоскости α проведем прямую $b \perp c$ (о существовании и единственности такой прямой говорится в следствии из У43 п. 2.3.0). Прямые a и b параллельны. Предположим противное, то есть то, что прямые a и b пересекаются в некоторой точке M ($M \in \alpha$). Поскольку $b \perp c$ и $a \perp c$ мы получим, что в плоскости α из точки M к прямой c проведены две перпендикулярные прямые, а это противоречит теореме 2 вопроса 4. Следовательно, $a \parallel b$. Теорема 1 доказана.

Замечание. Возможность проведения через точку A, не лежащую на данной прямой a, на плоскости α (проходящей через указанные точку и прямую) прямой $b \parallel a$ устанавливается путем решения соответствующей задачи на построение циркулем и линейкой с использованием доказываемой ниже теоремы 3 (см., например, п. 74 [8]).

Следствие. Из аксиомы параллельности прямых и теоремы 1 вытекает, что через точку, не лежащую на прямой (в плоскости, содержащей эту точку и прямую), можно провести в указанной плоскости единственную прямую, параллельную данной. Стало быть, уже двух таких параллельных прямых провести нельзя (см. п. 75 [8]).

Замечание. В учебнике [6] и книге [12] аксиома параллельности прямых формулируется в виде *существования только одной прямой* b, проходящей через точку A, не лежащую на прямой a, которая параллельна прямой a. На самом деле существование по крайней мере одной такой прямой можно доказать как теорему (см. выше теорему 1).

Теорема 2. Две различные прямые на плоскости, параллельные третьей прямой на этой плоскости, параллельны.

Доказательство

См. рис. 34 в). Пусть на плоскости α имеются три различные прямые a, b, c, $a \parallel c$ и $b \parallel c$, докажем, что $a \parallel b$. Предположим противное, что $a \cap b \equiv M$, откуда сразу получаем существование на плоскости α двух различных прямых, проходящих через точку M, не лежащую на прямой c, которые параллельны прямой c. Пришли к противоречию со следствием теоремы 1. Следовательно, $a \parallel b$. Теорема 2 доказана.

Определения 3. Пусть даны две прямые a и b, лежащие в одной плоскости.

А) Прямая c, пересекающая каждую из них и не проходящая через их общую точку (если такая есть), называется **секущей**.

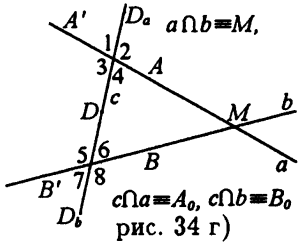


рис. 34 г)

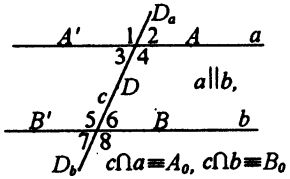


рис. 34 д)

Б) Пары углов $\angle 3$ и $\angle 5$; $\angle 4$ и $\angle 6$ ($\angle 1$ и $\angle 7$; $\angle 2$ и $\angle 8$) называются *внутренними (внешними) односторонними.*

В) Пары углов $\angle 3$ и $\angle 6$; $\angle 4$ и $\angle 5$ ($\angle 1$ и $\angle 8$; $\angle 2$ и $\angle 7$) называются *внутренними (внешними) накрест лежащими.*

Г) Пары углов $\angle 1$ и $\angle 5$; $\angle 2$ и $\angle 6$; $\angle 3$ и $\angle 7$; $\angle 4$ и $\angle 8$ называются *соответственными.*

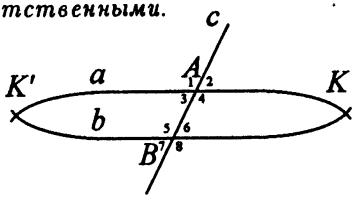


рис. 34 е)

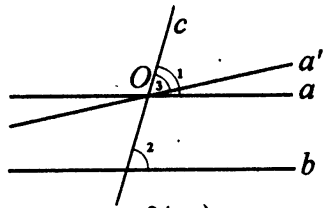


рис. 34 ж)

Отметим характерные особенности накрест лежащих и односторонних углов (см. рис. 34 г), д), на которых не обозначены точки $A_0 \equiv c \cap a$ и $B_0 \equiv c \cap b$).

У накрест лежащих углов (как внутренних, так и внешних) образующие их лучи на прямых a и b (A_0A и B_0B' или A_0A' и B_0B) расположены в *разных полуплоскостях* относительно прямой c.

У односторонних углов (как внутренних, так и внешних) образующие их лучи на прямых a и b (A_0A и B_0B или A_0A' и B_0B') расположены в *одной полуплоскости* относительно прямой c.

У внутренних углов (как накрест лежащих, так и односторонних) образующие их лучи на прямой c (A_0D и B_0D) таковы, что точка D *лежит между* точками A_0 и B_0.

У внешних углов (как накрест лежащих, так и односторонних) образующие их лучи на прямой c (A_0D_a и B_0D_b) таковы, что точка D_a и точка D_b *не лежат между* точками A_0 и B_0.

Теорема 3. (Признаки параллельности прямых). *Если какие-нибудь два внутренних или два внешних накрест лежащих угла равны, или сумма каких-нибудь внутренних или внешних односторонних углов равна развернутому углу (сумма градусных (радианных) мер этих углов равна* $180°$ (π)*), или какие-нибудь два соответственных угла равны, то прямые параллельны.*

Доказательство

В силу свойств смежных и вертикальных углов достаточно доказать эту теорему лишь для одной из указанных в условии восьми пар углов. Пусть, например, углы 3 и 6 равны. Предположим, что прямые a и b пересекутся в некоторой точке K в правой полуплоскости относительно секущей c (см. рис. 34 е). Тогда $\angle 3$ — внешний угол $\triangle AKB$, в силу теоремы 4 вопроса 2 о том, что внешний угол треугольника больше всякого внутреннего угла треугольника, не смежного с ним, $\angle 3 > \angle 6$, что противоречит $\angle 3 = \angle 6$. Предположим теперь, что прямые a и b пересекутся в некоторой точке K' в левой полуплоскости относительно секущей c (см. рис. 34 е). Тогда в силу теоремы 2 вопроса 2 так как $\angle 4$ и $\angle 5$ — углы смежные соответственно $\angle 3$ и $\angle 6$ $\angle 3 = \angle 6 \Leftrightarrow \angle 4 = \angle 5$. $\angle 5$ — внешний угол $\triangle AK'B$, аналогичным образом получаем, что $\angle 4 > \angle 5$, что противоречит $\angle 4 = \angle 5$. Следовательно, прямые a и b не могут пересечься, стало быть, $a \parallel b$. Теорема 3 доказана.

Следствие. Две различные прямые на плоскости, перпендикулярные третьей прямой, параллельны.

Теорема 4. (свойство параллельных прямых), обратная теореме 3.

Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой (секущей), то внутренние накрест лежащие и соответственные углы равны, а сумма внутренних односторонних углов равна развернутому углу (то есть сумма их градусных (радианных) мер равна $180°(\pi)$*).*

Доказательство

См. рис. 34 ж). Пусть прямые a и b параллельны, прямая c — их секущая, докажем, например, что соответственные углы $\angle 1 = \angle 2$. Для определенности предположим, что $\angle 1 > \angle 2$, построим (согласно А15 п. 2.3.0) как указано на рис. 34 ж) $\angle 3 = \angle 2 < \angle 1$, получим прямую a' , отличную от прямой a , так как $\angle 1 > \angle 3$. В силу теоремы 3 $a' \parallel b$, а по условию $a \parallel b$, получили, что через точку O проходят две различные прямые a и a' , параллельные прямой b , что противоречит аксиоме параллельности прямых. Следовательно, соотношение $\angle 1 > \angle 2$ невозможно. Аналогичным образом доказывается невозможность соотношения $\angle 1 < \angle 2$, а потому в силу У35 п. 2.3.0. $\angle 1 = \angle 2$. В силу свойств вертикальных и смежных углов из равенства этой пары соответственых углов вытекает равенство соответству-

ющих пар внутренних накрест лежащих углов и равенство развернутому углу суммы соответствующих пар односторонних углов.

Следствие. Если прямая, лежащая в плоскости двух параллельных прямых, перпендикулярна одной из них, то она перпендикулярна и другой из них.

Дополнительная часть

Отметим, что так как теоремы 3 и 4, будучи взаимно обратными верны, то верны и противоположные им теоремы, выражающие признаки и свойства не параллельности двух прямых на плоскости. Читателям предлагается сформулировать и доказать их самостоятельно. Об этом см. п. 78 учебника [8] и конец п. 46 книги [12].

Вопрос 6. Теорема о сумме внутренних углов треугольника. Теорема о внешнем угле треугольника. Теорема о сумме внутренних углов выпуклого многоугольника

Вводная часть

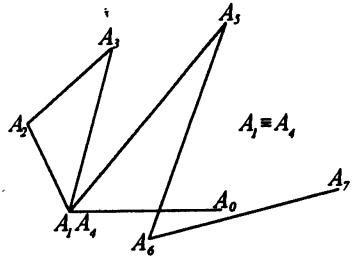


рис. 35 а)

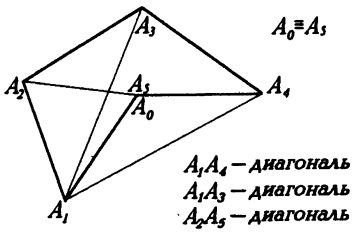


рис. 35 б)

Определение 1. Геометрическая фигура (линия) на плоскости, образуемая отрезками A_0A_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$, расположенными так, что конец i-го отрезка (точка A_i) является началом $i+1$-го отрезка ($i = 1, 2, ..., n-1$, $n \geqslant 2$) и при всех этих $i \geqslant 1$ отрезки $A_{i-1}A_i$ и A_iA_{i+1} не лежат на одной прямой, называется **ломаной** *(ломаной линией)* и обозначается $A_0A_1A_2...A_{n-1}A_n$.

Указанные отрезки называются *сторонами* (или *звеньями*) ломаной, а точки A_0, A_1, ... , A_n — *вершинами* ломаной. Внутренние точки сторон ломаной и вершины ломаной называют *точками* ломаной.

Определение 1 А. Ломаная называется **замкнутой**, *если ее концы A_0 и A_n совпадают (являются одной точкой), при этом отрезки A_0A_1 и $A_{n-1}A_n$ не лежат на одной прямой.*

Определение 1 Б. Ломаная называется **простой**, *если она не имеет самопересечений (то есть никие из ее вершин не совпадают, никакая из ее вершин не является внутренней точкой какой-либо из ее сторон и*

никакая пара ее сторон не имеет общей внутренней точки (то есть не пересекается)).

Определение 2. Многоугольником (простым многоугольником) называется замкнутая ломаная (простая замкнутая ломаная).
Вершины ломаной называются **вершинами** *многоугольника, а звенья ломаной —* **сторонами многоугольника**. Обозначается $A_1A_2...A_n$. *Отрезки, соединяющие не соседние вершины (то есть вершины, не являющиеся концами одного звена) многоугольника, называются* **диагоналями** (см. рис. 35 б).

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем рассматривать только простые многоугольники и под термином "многоугольник" будет пониматься простой многоугольник.

Определение 3. Многоугольник с n вершинами и n сторонами называется n-угольником ($n \geqslant 3$).

Выше на рис. 35 а) изображена ломаная, не являющаяся замкнутой и не являющаяся простой, на рис. 35 б) изображена простая замкнутая ломаная — многоугольник, не являющийся выпуклым.

Основная часть

Определение 4. Многоугольник называется **выпуклым**, *если он лежит целиком в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону. При этом сама прямая считается принадлежащей полуплоскости.*

Определение 5. Общая часть полуплоскостей, фигурирующих в предыдущем определении, без сторон выпуклого многоугольника называется его **внутренней** *областью, а остальная часть плоскости также без его сторон — его* **внешней** *областью.*

Определение 6. Внутренняя область выпуклого многоугольника вместе с его сторонами называется **плоским** *выпуклым многоугольником.*



рис. 35 в)

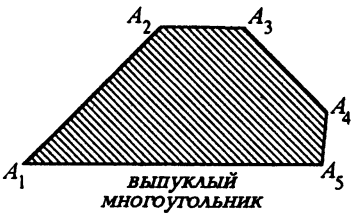


рис. 35 г)

На приведенных рис. 35 в) и г) внутренние области многоугольников заштрихованы. О внутренней области невыпуклого треугольника см. ниже, в дополнительной части этого вопроса.

Определение 7. **Внутренним углом** *при вершине* A_i $(i = 1, 2, ...n)$ *многоугольника* $A_1A_2...A_n$ *называется угол, образованный полупрямыми* A_iA_{i-1} *и* A_iA_{i+1} $(i = 2, 3, ..., n-1)$, *полупрямыми* A_1A_2 *и* A_1A_n *(при* $i = 1$*) и полупрямыми* A_nA_{n-1} *и* A_nA_1 *(при* $i = n$*). При этом внутренней областью этого угла считается та часть плоскости, которая содержит внутреннюю область многоугольника.* *

Внутренний угол плоского многоугольника определяется таким же образом вместе с присоединенной к нему его внутренней областью (то есть как плоский угол).

Внутренней точкой многоугольника считается всякая точка, лежащая в его внутренней области.

Аналогично определениям 2′, 3, 4 определяются граница многоугольника, точка, лежащая на стороне многоугольника, внешняя точка многоугольника.

По поводу внутренней и внешних областей угла см. выше, в вопросе 2 и в О15 п. 2.3.0. С учетом этих определений и определений 4, 5 и 7 мы получаем, что внутренняя область каждого из внутренних углов *выпуклого* многоугольника является пересечением полуплоскостей относительно прямых, на которых расположены соседние (то есть имеющие общую вершину) стороны этого многоугольника. Следовательно, каждый из внутренних углов *выпуклого* многоугольника является неразвернутым углом первого типа (см. О15А п. 2.3.0).

Замечание. Отметим, что таким же образом, как и для внутренней области треугольника (см. выше вопрос 1) можно доказать эквивалентность определения внутренней области *выпуклого* многоугольника, определенной выше, и определения внутренней области *выпуклого* многоугольника, как пересечения внутренних областей всех его внутренних углов.

Определение 8. **Внешним углом** *выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, смежный с внутренним углом многоугольника при этой вершине.*

Из этого определения вытекает, что внутренняя область внешнего угла многоугольника расположена во внешней части многоугольника.

Замечание. Мы привели традиционное определение внешнего угла выпуклого многоугольника как угла — одного из смежных с внутренним его углом.

Однако согласно логике введения внутреннего угла многоугольника (как выпуклого, так и невыпуклого) и его внутренней области можно было внешний угол простого многоугольника определить как угол, имеющий ту

* При этом предполагается, что внутренняя область внутреннего угла многоугольника удовлетворяет соответствующему из определений О15А или О15В п. 2.3.0.

же вершину, что и соответствующий внутренний угол, и составляющий в сумме с этим внутренним углом полный угол (то есть как дополняющий соответствующий внутренний угол до полного угла).

Можно утверждать, что объединение всех внутренних областей так определенных внешних углов *выпуклого* многоугольника будет совпадать с внешней областью этого многоугольника.

Важно отметить, что при таком определении внешнего угла многоугольника (в том числе и треугольника) уже очевидным становится факт, что всякий внешний угол треугольника больше *любого* его внутреннего угла и перестают быть верными доказываемые ниже теорема 2 о внешнем угле треугольника, равном сумме внутренних углов этого треугольника, не смежных с указанным внешним углом, и теорема 4 о равенстве полному углу суммы всех внешних углов выпуклого многоугольника вне зависимости от количества его сторон.

Определение 9. **Треугольником** *называется $n-$угольник с тремя* $(n = 3)$ *вершинами и сторонами.*

Замечание. Нетрудно видеть, что это определение треугольника имеет тот же смысл, что и определение, приведенное выше, в вопросе 1, а также то, что всякий треугольник является выпуклым многоугольником.

Теорема 1. Сумма внутренних углов треугольника равна развернутому углу (или двум прямым углам) ; сумма градусных (радианных) мер внутренних углов треугольника равна 180° *(числу* π*).*

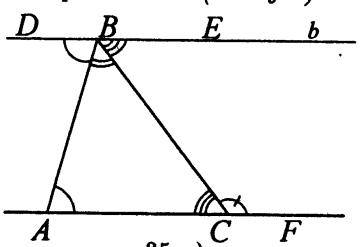


рис. 35 д)

Доказательство

См. рис. 35 д). Через вершину B треугольника ABC проведем прямую, b параллельную прямой (AC) . В силу свойств параллельных прямых (см. теорему 4 вопроса 5) $\angle BAC = \angle ABD$ как внутренние накрест лежащие при $(AC) \parallel b$ и секущей (AB) , $\angle BCA = \angle CBE$ как внутренние накрест лежащие при $(AC) \parallel b$ и секущей (BC) . Так как по определению суммы углов $\angle ABD + \angle ABC + \angle CBE = \angle DBE$, который является развернутым углом, то применяя замечание к У46 п. 2.3.0. об аналогах свойств числовых равенств для сложения углов, мы получим, что и $\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA$ развернутому углу. Из полученного результата и

свойств меры угла (см. У46 п. 2.3.0) вытекают соответствующие утверждения для сумм градусных и радианных мер внутренних углов треугольника.

Теорема 2. Внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов (мера внешнего угла треугольника равна сумме мер внутренних углов) треугольника, не смежных с ним.

В частности, внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла треугольника, не смежного с ним.

Доказательство

См. рис. 35 д). $\angle FCB = \angle DBC$ как внутренние накрест лежащие при $(AC) \parallel b$ и секущей BC , так как $\angle BAC = \angle DBA$ как внутренние накрест лежащие при $(AC) \parallel b$ и секущей BA и $\angle DBC = \angle DBA + \angle ABC$, то (см. У46 п. 2.3.0) $\angle FCB = \angle DBA + \angle ABC = \angle BAC + \angle ABC$. Поскольку из О22, О22А и О23 п. 2.3.0. вытекает, что сумма ненулевых углов больше каждого из слагаемых углов, внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла треугольника, не смежного с ним. Теорема 2 доказана.

Определение 10. **Четырехугольником** *называется $n-$угольник с четырьмя $(n = 4)$ вершинами и сторонами.*

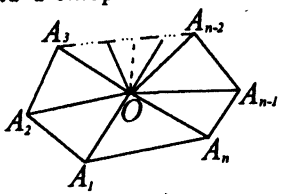


рис. 35 е)

Теорема 3. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника равна сумме $(n-2)$-х развернутых углов.

Сумма градусных (радианных) мер внутренних углов выпуклого $n-$угольника равна $(n-2) \cdot 180^\circ$ (числу $(n-2) \cdot \pi$).

Доказательство

Выберем некоторую точку O во внутренней области выпуклого многоугольника $A_1A_2A_3...A_{n-2}A_{n-1}A_n$ и соединим отрезками ее со всеми вершинами этого многоугольника. Из определений 4 и 5 выпуклого многоугольника и его внутренней области вытекает, что точка O не совпадает ни с одной из вершин многоугольника, не является внутренней точкой никакой из его сторон и она находится в той же полуплоскости относительно прямой (A_1A_n) , что и луч A_1A_2 (см. У20 п. 2.3.0), и — в той же полуплоскости относительно прямой (A_1A_2) , что и луч A_1A_n . Это означает, что точка O находится во внутренней области угла $A_nA_1A_2$, а потому луч (стало быть, и отрезок) A_1O также находится во внутренней области $\angle A_nA_1A_2$, следовательно, $\angle A_nA_1A_2 = \angle OA_1A_n + \angle OA_1A_2$. Рассуждая

аналогично относительно любой из вершин многоугольника (как это было проделано для вершины A_1), просуммировав все внутренние углы построенных n треугольников: $\triangle OA_nA_1$, $\triangle OA_1A_2$, $\triangle OA_2A_3$, ... $\triangle OA_{n-1}A_n$ мы получим, что эта сумма с одной стороны, равна (в силу теоремы 1) сумме n развернутых углов, с другой стороны (в силу замечания к У46 п. 2.3.0), эта сумма равна сумме всех внутренних углов многоугольника $A_1A_2A_3...A_{n-2}A_{n-1}A_n$ плюс сумма всех углов с вершиной в точке O, последняя сумма равна полному углу (стало быть, равна сумме двух развернутых углов). Следовательно, сумма всех внутренних углов выпуклого многоугольника $A_1A_2A_3...A_{n-2}A_{n-1}A_n$ как раз и равна сумме $n-2$ - х развернутых углов. Утверждение относительно суммы градусных и радианных мер этих углов вытекает из У46 и того, что градусная (радианная) меры развернутого угла равны $180°$ (π) . Теорема 3 доказана.

Замечание. В §15 книги [10] доказательство теоремы 3 проведено методом математической индукции.

Дополнительная часть

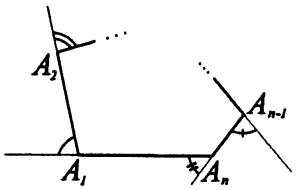


рис. 35 ж)

Теорема 4. Сумма внешних углов выпуклого n−угольника, взятых по одному при каждой его вершине, равна полному углу;
сумма градусных (радианных) мер внешних углов выпуклого n−угольника, взятых по одному при каждой его вершине, равна $360°$ *(числу* 2π*)*
(то есть эти суммы **не зависят** *от n).*

Доказательство

См. рис. 35 ж). В силу определения внешнего угла треугольника, равенства суммы двух смежных углов развернутому углу, сумма всех внутренних углов выпуклого многоугольника $A_1A_2A_3...A_{n-2}A_{n-1}A_n$ вместе с суммой указанных в условии теоремы углов равна сумме n развернутых углов, а потому в силу теоремы 4 сумма указанных в условии теоремы углов равна сумме двух развернутых углов, то есть полному углу. Утверждение относительно суммы градусных и радианных мер указанных в условии теоремы углов вытекает из У46 и того, что градусная (радианная) меры полного угла равны $360°$ (2π) . Теорема 4 доказана.

Замечание. Точно таким же образом, как и в определениях 1, 1А, 1Б, 2 и 3 можно ввести определения пространственной ломаной, замкнутой и простой пространственных ломаных, пространственного много-

угольника, простого пространственного многоугольника, пространственного $n-$угольника. Для этого в определении 1 достаточно заменить слова "на плоскости" на слова "в пространстве".

Точно также, как и в определении 6, определяется плоский невыпуклый многоугольник.

Будем теперь здесь и в дальнейшем использовать понятие длины отрезка и ее свойства.

Определение 11. **Длиной** *ломаной* $A_0A_1A_2...A_{n-1}A_n$ *будем называть сумму длин всех ее сторон*, то есть, если длину ломаной обозначить за l , то $$l = |A_0A_1| + |A_1A_2| + |A_2A_3| + ... + |A_{n-1}A_n| .$$

Определение 12. **Периметром** *многоугольника называется сумма длин всех его сторон.*

Теорема 5. Всякий отрезок A_0A_n *меньше суммы сторон любой ломаной* $A_0A_1A_2...A_{n-1}A_n$.

Доказательство

В силу теоремы 8 вопроса 3 (неравенства треугольника) и определения ломаной $A_0A_2 < A_0A_1 + A_1A_2$, $A_0A_3 \leqslant A_0A_2 + A_2A_3 < A_0A_1 + A_1A_2 + A_2A_3$, ... , $A_0A_n \leqslant A_0A_{n-1} + A_{n-1}A_n < A_0A_1 + A_1A_2 + ... + A_{n-2}A_{n-1} + A_{n-1}A_n$. Теорема 5 доказана.

Замечание. В приведенном доказательстве по сути дела применен метод математической индукции, когда мы на основе неравенства треугольника доказали эту теорему для случая $n = 2$, затем, предполагая справедливость этой теоремы для $n - 1$ звена ломаной, мы доказали ее для случая n звеньев ломаной. Отметим, что использование знака неравенства $\leqslant$ вызвано тем обстоятельством, что точки A_0 , A_2 и A_3 уже вполне могут оказаться на одной прямой, причем точка A_2 может лежать между точками A_0 и A_3 , аналогичная ситуация может возникнуть и для точек A_0 , A_{n-1} и A_n .

Следствие 1. Используя У38 и У39 п. 2.3.0., мы получим аналогичное утверждение относительно длин отрезка A_0A_n и ломаной $A_0A_1...A_{n-1}A_n$: $$|A_0A_n| < |A_0A_1| + |A_1A_2| + ... + |A_{n-1}A_n| .$$

В случае $\triangle ABC$, обозначая $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$, имеем : $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$, откуда, в частности, следует $a - b < c$, $b - a < c \Rightarrow |a - b| < c$, аналогично $|b - c| < a$ и $|a - c| < b$, то есть *в любом треугольнике длина любой его стороны меньше суммы длин двух других сторон и больше модуля разности длин двух других сторон.*

Следствие 2. Используя У38 и У39 п. 2.3.0. и теорему 9 вопроса 3, получаем, что для трех точек A , B и C $|AB| = |AC| + |CB|$ только в слуаях или совпадения точки C с одной из точек A или B , или когда точка C

лежит между точками A и B на прямой (AB) . Во всех остальных случаях $|AB| < |AC| + |CB|$. Стало быть, для любых трех точек A , B и C $|AB| \leqslant |AC| + |CB|$.

Аналогично этому следствию, используя О21А, У38 и У39 п. 2.3.0., получаем.

Следствие 3. Для $n+1$ точки A_0 , A_1 , ... , A_{n-1} , A_n (любые две из которых различны) $|A_0A_n| = |A_0A_1| + |A_1A_2| + ... + |A_{n-1}A_n|$ только в случае их расположения так, как указано в У9 п. 2.3.0., поэтому с учетом теоремы 5 и следствия 1 для любой $n+1$ точки A_0 , A_1 , ... , A_{n-1} , A_n

$$A_0A_n \leqslant A_0A_1 + A_1A_2 + ... + A_{n-1}A_n ,$$

$$|A_0A_n| \leqslant |A_0A_1| + |A_1A_2| + ... + |A_{n-1}A_n| .$$

Замечание. Подробнее материал о ломаных и многоугольниках см. в гл. IV, п. 212, 232, 233 и др. в учебнике [8]; §15 книги [10].

О внутренней и внешней областях простого многоугольника *

Теорема 6. Всякий простой многоугольник (выпуклый и невыпуклый), расположенный в плоскости α разбивает точки этой плоскости на две части, (одну из них называют **внутренней областью**, другую из них — **внешней областью**), ** обладающие следующими свойствами: *если A — точка внутренней области (внутренняя точка), а B — точка внешней области (внешняя точка), то всякая ломаная, лежащая в плоскости α и соединяющая точки A и B , имеет по крайней мере одну общую точку с многоугольником ; если же A и A' — две внутренние точки многоугольника, а B и B' — две внешние точки многоугольника, то в плоскости α существуют две ломаные, одна из которых соединяет точки A и A' , а другая из которых соединяет точки B и B' , не имеющие общих точек с многоугольником.* При надлежащем выборе названий "внутренняя область" и "внешняя область" многоугольника (для выпуклого многоугольника это также, как указано выше) в плоскости α существуют прямые, целиком лежащие во внешней области многоугольника, и не существует прямых, целиком лежащих во внутренней области многоугольника.

См. [18], гл. I, §4, теорема 9 и примечание 15.

Ниже, на рис. 35 з) точки A и A' находятся во внутренней области многоугольника — четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$, точки B и B' находятся во внешней области этого многоугольника, прямая (CC') целиком находится во внешней области этого многоугольника.

---

* Этот материал, включающий формулировку теоремы 6, не является обязательным на экзаменах.

** Точки самого многоугольника при этом не относят ни к его внутренней, ни к его внешней областям.

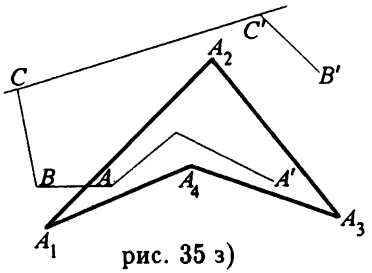


рис. 35 з)

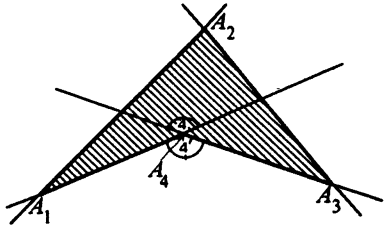


рис. 35 и)

Замечание. Отметим, что для четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ было бы естественным считать одним из его внешних углов $\angle 4'$, который дополняет его внутренний угол $\angle 4$ до полного угла (см. выше замечание после определения 8). Однако из рис. 35 и) видно, что внутренняя область изображенного на нем четырехугольника не является пересечением внутренних областей всех его внутренних углов, а также его внешняя область не является объединением внешних областей всех его внешних углов, определяемых в соответствии с замечанием после определения 8. Поэтому выпуклость многоугольника, фигурирующая в этом замечании, а также в замечании перед определением 8 является существенной.

Вопрос 7. Признаки параллелограмма. Свойства параллелограмма

Вводная часть

Пусть $ABCD$ — четырехугольник (см. определение 10 вопроса 6).

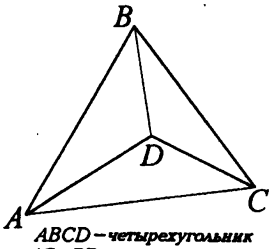
Определение 1. Стороны четырехугольника называются **противолежащими** *или* **противоположными**, *если они не имеют общих вершин.*

Определение 2. Стороны четырехугольника называются **смежными**, *если они имеют общую вершину.*

Определение 3. Вершины четырехугольника называются **противолежащими** *или* **противоположными**, *если они не являются концами одной из его сторон.*

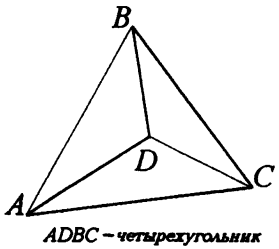
Определение 4. Углы четырехугольника называются **противолежащими** *или* **противоположными**, *если их вершины являются* **противолежащими** *или* **противоположными** *вершинами четырехугольника.*

Определение 5. В соответствии с определением диагонали многоугольника, сформулированном в вопросе 6, **диагональю** *четырехугольника называется отрезок с концами в его противолежащих вершинах.*



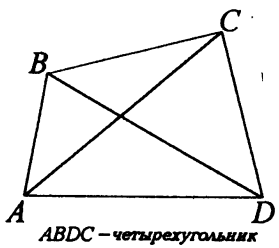
ABCD – четырехугольник
AC , BD — его диагонали

рис. 36 а)



ADBC – четырехугольник
AB , CD — его диагонали

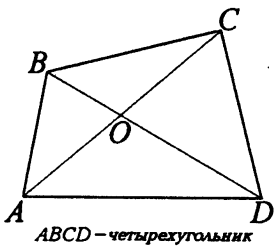
рис. 36 б)



ABDC – четырехугольник
AD , CB — его диагонали

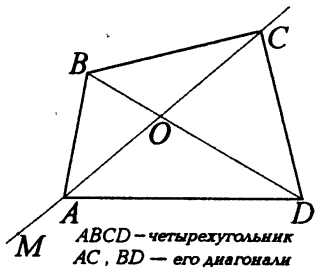
рис. 36 в)

Обычно при выписывании обозначающих четырехугольник вершин их порядок таков, что противолежащие вершины *не стоят рядом*. Так, например, один и тот же четырехугольник $ABCD$ может быть обозначен как $BCDA$, $CDAB$, $DABC$, $DCBA$, $CBAD$, $BADC$, $ADCB$, его противолежащими вершинами будут: пара вершин A и C , а также пара вершин B и D , его противолежащими сторонами будут пара сторон AB и CD и пара сторон AD и BC , его смежными сторонами будут стороны AB и BC , BC и CD , CD и AD , его диагоналями будут отрезки AC и BD . Однако в четырехугольнике $ACBD$ отрезки AC и BD уже будут сторонами, противолежащими сторонами будут пара сторон AC и BD и пара сторон BC и AD , а отрезки AB и CD — диагоналями. Поэтому четырехугольник $ACBD$ уже другой, нежели четырехугольник $ABCD$. См. рис. 36 а), б). На рис. 36 в) изображен четырехугольник $ABDC$, у которого противоположные стороны AC и BD оказались даже пересекающимися.



ABCD – четырехугольник
AC , BD — его диагонали

рис. 36 г)



ABCD – четырехугольник
AC , BD — его диагонали

рис. 36 д)

Теорема 1. У выпуклого четырехугольника диагонали пересекаются (то есть являются пересекающимися отрезками), причем точка их пересечения находится во внутренней области этого четырехугольника.

Доказательство

См. рис. 36 г). Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. В силу определения 4 вопроса 6 выпуклого многоугольника точки B и C лежат в

одной полуплоскости относительно прямой (AD) , а потому в силу У20 п. 2.3.0. лучи AB и AC целиком будут находиться в этой же полуплоскости. В силу У29 п 2.3.0. для $n = 2$ или луч AB будет проходить внутри угла CAD, или луч AC будет проходить внутри угла BAD . Однако в первом случае в силу выпуклости $ABCD$ $\angle CAD$ — угол первого типа и потому в силу У26 п. 2.3.0. мы бы получили, что отрезок CD пересекает луч AB, что означало бы принадлежность точек C и D разным полуплоскостям плоскости четырехугольника относительно прямой (AB) , а это противоречит выпуклости четырехугольника $ABCD$. Таким образом, именно луч AC проходит между лучами AD и AB , а это в силу того, что $\angle CAD$ — угол первого типа, и в силу У26 п. 2.3.0. означает, что отрезок BD пересекает прямую (AC) . Совершенно аналогично, доказав, что луч DB проходит между лучами DA и DC , мы получим, что отрезок AC пересекает прямую DB . В силу единственности точки пересечения прямых (AC) и (BD) получаем, что пересеклись *отрезки* AC и BD в некоторой точке O . Поскольку точка O является также точкой пересечения лучей AC и DB она (в силу У20 п. 2.3.0) будет находиться в той же полуплоскости плоскости четырехугольника, что и точки B и C , а, стало быть, в той же полуплоскости относительно прямой (AD), что четырехугольник $ABCD$. Аналогичным образом доказывается, что точка O будет находиться в одной полуплоскости относительно как прямой (AB) , как прямой (BC) , так и прямой (DC) , что и четырехугольник $ABCD$, это означает, что она находится во внутренней области четырехугольника $ABCD$. Теорема 1 полностью доказана.

Замечание 1. Отметим, что всякая внутренняя точка диагонали выпуклого четырехугольника (и вообще выпуклого многоугольника) принадлежат внутренней области этого четырехугольника (многоугольника), а всякая внешняя точка указанной диагонали находится во внешней области этого четырехугольника (многоугольника).

Справедливость этого замечания следует из того, что, например, для диагонали AC (см. рис. 36 д) выпуклого четырехугольника $ABCD$ в силу У20 п. 2.3.0. луч AC целиком расположен в той же полуплоскости относительно прямой (AD) , что и четырехугольник $ABCD$, и он же расположен в той же полуплоскости относительно прямой (AB) , что и четырехугольник $ABCD$, а луч CA расположен в той же полуплоскости относительно прямой (BC) , что и четырехугольник $ABCD$, и он же расположен в той же полуплоскости относительно прямой (CD), что и весь четырехугольник $ABCD$, множество всех внутренних точек диагонали AC есть пересечение множеств точек лучей AC и CA , поэтому каждая из этих точек как раз и будет расположена во внутренней области выпуклого четырех-

угольника $ABCD$. Если M — произвольная внешняя точка диагонали AC (см. рис. 36 д), тогда, для определенности предполагая, что точка A лежит между точками M и C , мы получим, что в силу У20 п. 2.3.0. луч AM расположен в другой полуплоскости относительно прямой (AD) нежели четырехугольник $ABCD$, следовательно, точка M будет расположена во внешней области четырехугольника $ABCD$. Аналогичным образом проводится доказательство для диагонали BD . Для выпуклого $n-$угольника $(n \geqslant 5)$ доказательство проводится по такой же схеме, что и для выпуклого четырехугольника с той разницей, что если концы какой-либо диагонали расположены в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей какую-либо из его сторон, то все внутренние точки этой диагонали (в силу определения принадлежности двух точек одной полуплоскости) будут в этой же полурлоскости.

Замечание 2. Утверждение теоремы 1 и замечание 1 не верны для невыпуклых четырехугольников (см. рис. 36 а), б), в).

Теорема 2. (обратная теореме 1). ***Если в четырехугольнике диагонали пересекаются (как отрезки), то этот четырехугольник выпуклый.***

Доказательство

См. рис. 36 г). Пусть в четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в некоторой точке O , которая по условию является внутренней точкой каждого из отрезков AC и BD , тогда точки B и D находятся в разных полуплоскостях плоскости четырехугольника относительно прямой (AC) , а потому в силу У20 п. 2.3.0. $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ также будут располагаться в разных полуплоскостях относительно (AC) . Следовательно, отрезки AD и BC не могут пересечься, так как в противном случае у них должна была бы существовать общая внутренняя точка, которая ***одновременно*** оказалась бы расположенной в обеих полуплоскостях относительно прямой (AC) , что невозможно. А потому точки B и C расположены в одной полуплоскости плоскости четырехугольника относительно прямой (AD) , а потому в этой же полуплоскости будет расположен весь отрезок BC , и в силу У20 п. 2.3.0. в этой же полуплоскости будут расположены и все внутренние точки отрезков AB и DC , следовательно, четырехугольник $ABCD$ оказался в одной полуплоскости относительно прямой (AD) . Аналогичными рассуждениями мы получаем, что точки A и D расположены в одной полуплоскости плоскости четырехугольника относительно прямой (BC) , а потому в этой же полуплоскости будет расположен отрезок AD и все внутренние точки отрезков BA и CD , следовательно, четырехугольник $ABCD$ оказался в одной полуплоскости относительно прямой (BC) . Аналогичными рассуждениями, исходя из того, что точки A и C расположены в разных полуплоскостях плоскости четырехугольника относительно пря-

мой (BD) , мы придем к тому, что в четырехугольник $ABCD$ окажется в одной полуплоскости относительно прямой (AB) и в одной полуплоскости относительно прямой (CD) , следовательно $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Теорема 2 полностью доказана.

Основная часть

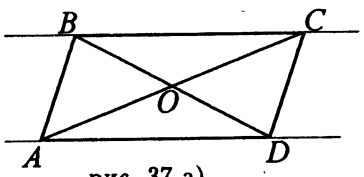


рис. 37 а)

Определение 6. Параллелограмм — это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны (то есть лежат на параллельных прямых). Обозначается параллелограмм знаком $\#$.

Свойства параллелограмма.

Теорема 3. Параллелограмм — выпуклый четырехугольник.

Доказательство

См. рис. 37 а). Пусть $ABCD$ — $\#$, $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$, тогда как отмечалось выше, после определения 2 вопроса 5 вся прямая (BC) будет располагаться в одной полуплоскости плоскости параллелограмма, относительно прямой (AD) , стало быть, в частности в этой же полуплоскости будут лежать точки B и C , а потому в силу У20 п. 2.3.0. — и луч AB , а потому и отрезок AB , и луч DC , а потому и отрезок DC , то есть $\#ABCD$ оказался в одной полуплоскости относительно прямой (AD), содержащей его сторону AD . Совершенно аналогично мы докажем расположение $\#ABCD$ в одной полуплоскости относительно прямой (BC) , в одной полуплоскости относительно прямой (AB) и в одной полуплоскости относительно прямой (DC) , в соответствии с определением 4 вопроса 6 это означает, что $\#ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Теорема 3 доказана.

Следствие. Диагонали параллелограмма пересекаются (как отрезки) в некоторой точке его внутренней области (см. рис. 37 а).

Доказательство

Это утверждение сразу вытекает из теорем 1 и 3 этого вопроса.

Теорема 4. В параллелограмме:

1) *диагональ делит его на два равных треугольника*;

2) *противоположные стороны равны*;

3) *противоположные углы равны*;

4) *сумма углов, прилежащих одной стороне, равна развернутому углу (сумма их градусных (радианных) мер равна* 180° (π)*)*;

5) *диагонали пересекаются и в точке пересечения делятся пополам*;

6) *сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин всех его сторон.*

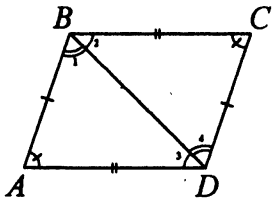


рис. 38 а)

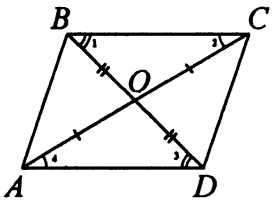


рис. 38 б)

Доказательства

См. рис. 38 а). Пусть $ABCD$ — # , $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$, BD — диагональ, рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle ABC$, у них сторона BD — общая $\angle 1 = \angle 4$ как внутренние накрест лежащие при $(AB) \parallel (CD)$ и секущей (BD), $\angle 2 = \angle 3$ как внутренние накрест лежащие при $(BC) \parallel (AD)$ и секущей (BD) , следовательно, $\triangle ABC = \triangle ADC$ (по второму признаку, то есть по стороне и двум прилежащим ей углам). Так как в равных треугольниках против соответственно равных углов (сторон) лежат соответственно равные стороны (углы), то $AB = CD$, $BC = AD$ и $\angle A = \angle C$. Проводя другую диагональ AC , мы аналогичным образом докажем, что $\angle B = \angle D$. Отметим, что так как $\angle B = \angle 1 + \angle 2$, $\angle D = \angle 3 + \angle 4$, то равенство углов B и D можно получить в силу У32 п. 2.3.0. Таким образом, доказаны первые три свойства параллелограмма. Четвертое свойство вытекает из свойств параллельных прямых (см. выше вопрос 5).

См. рис. 38 б). Пересечение диагоналей у $\#ABCD$ доказано выше (см. выше следствие теоремы 3), пусть $O \equiv AC \cap BD$. Рассмотрим $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$, у них $\angle 1 = \angle 3$ как внутренние накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей BD , $\angle 2 = \angle 4$ как внутренние накрест лежащие при $AD \parallel BC$ и секущей AC , $AD = BC$ по доказанному, следовательно $\triangle AOD = \triangle BOC$ (по второму признаку), а потому соответственно $OC = OA$ и $OB = OD$. Итак, первые пять свойств параллелограмма доказаны. Шестое свойство о соотношении квадратов длин диагоналей и сторон параллелограмма будет доказано ниже, в вопросе 15 как следствие теоремы косинусов для треугольника.

Признаки параллелограмма.

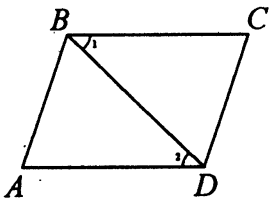


рис. 38 в)

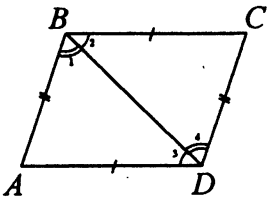


рис. 38 г)

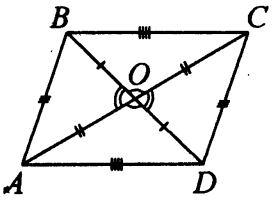


рис. 38 д)

Теорема 5. Если у выпуклого четырехугольника две стороны параллельны и равны, то он — параллелограмм.

Доказательство

См. рис. 38 в). Пусть у четырехугольника $ABCD$ $AD \parallel BC$ и $AD = BC$, проведем в $ABCD$ диагональ BD, в силу выпуклости $ABCD$ эта диагональ будет находиться во его внутренней области, $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ будут расположены в разных полуплоскостях плоскости этого четырехугольника относительно прямой (BD). Рассмотрим $\triangle ADB$ и $\triangle DBC$, у них $\angle 1 = \angle 2$ как внутренние накрест лежащие при $(BC) \parallel (AD)$ и секущей (BD), $AD = BC$ по условию, BD — общая сторона, следовательно, $\triangle DBC = \triangle ADB$ (по первому признаку — по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, так как в равных треугольниках против равных сторон (углов) лежат равные углы (стороны), $\angle ABD = \angle BDC$, а потому в силу признака параллельности прямых $(AB) \parallel (CD)$, поскольку $\angle ABD$ и $\angle BDC$ — внутренние накрест лежащие при прямых (AB) и (CD) и секущей (BD), следовательно у четырехугольника $ABCD$ $AD \parallel BC$ и $AB \parallel CD$, а потому по определению 6 он — параллелограмм. Теорема 5 доказана.

Теорема 6. Если у выпуклого четырехугольника противолежащие стороны попарно равны, то он — параллелограмм.

Доказательство

См. рис. 38 г). Пусть у четырехугольника $ABCD$ $AB = CD$ и $AD = BC$, проведем в $ABCD$ диагональ BD, в силу выпуклости $ABCD$ эта диагональ будет находиться во его внутренней области, $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ будут расположены в разных полуплоскостях плоскости этого четырехугольника относительно прямой (BD). Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle BDC$, у них сторона BD — общая, $AB = CD$ и $AD = BC$, следовательно, $\triangle ABD = \triangle BDC$ (по третьему признаку — по трем сторонам). Следовательно, так как в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 3$, а потому в силу признака параллельности прямых $(AB) \parallel (CD)$, поскольку $\angle 1$ и $\angle 4$ — внутренние накрест

лежащие при прямых (AB) и (CD) и секущей (BD), $(BC) \parallel (AD)$, поскольку $\angle 2$ и $\angle 3$ — внутренние накрест лежащие при прямых (BC) и (AD) и секущей (BD), следовательно у четырехугольника $ABCD$ $AD \parallel BC$ и $AB \parallel CD$, а потому по определению 6 он — параллелограмм. Теорема 6 доказана.

Теорема 7. Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам (на два равных отрезка), то он — параллелограмм.

Доказательство

См. рис. 38 д). Пусть у четырехугольника $ABCD$ AC и BD — диагонали, O — точка их пересечения, в силу теоремы 2 $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Рассмотрим пару треугольников AOD и BOC, у них $OA = OC$, $OB = OD$ по условию, $\angle BOC = \angle AOD$ как вертикальные, следовательно по первому признаку равенства треугольников $\Delta AOD = \Delta BOC$, а потому $AD = BC$, аналогично, рассматривая пару треугольников AOB и COD, у которых $OA = OC$, $OB = OD$ по условию, $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные, мы также получим, что (по первому признаку) эти треугольники равны, а потому $AB = CD$. Следовательно, у четырехугольника $ABCD$ противоположные стороны оказались попарно равны, а потому в силу теоремы 6 $ABCD$ — параллелограмм. Теорема 7 доказана.

Теорема 8. Если в выпуклом четырехугольнике противоположные углы попарно равны, то он — параллелограмм.

Доказательство

Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, в силу теоремы 3 вопроса 6 сумма всех внутренних углов выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна удвоенному развернутому углу, то есть — полному углу. Так как в силу У32 п. 2.3.0. из равенств $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$ следует, что $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$ и равны эти суммы развернутому углу, откуда вытекает, что $AB \parallel CD$, аналогично $\angle A + \angle D = \angle C + \angle B$ и равны эти суммы также развернутому углу, откуда следует, что $AD \parallel BC$, следовательно $ABCD$ — параллелограмм. Теорема 8 доказана.

Дополнительная часть

Отметим еще замечание к теореме 5, выражающей признак параллелограмма.

Замечание. В условии теоремы 5 можно не требовать выпуклости четырехугольника, достаточно потребовать, чтобы он был простым (см. выше определение 2 вопроса 6). Это будет следовать из того, что всякая трапеция, определяемая ниже, в вопросе 12 как четырехугольник, имеющий по крайней мере две параллельные стороны, является выпуклым, что там же будет доказано.

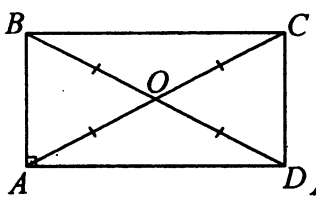


рис. 39 а)

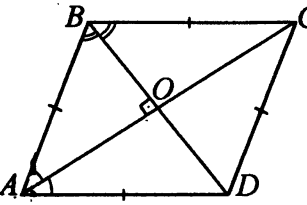


рис. 39 б)

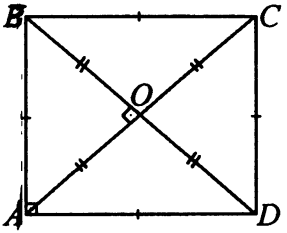


рис. 39 в)

Рассмотрим некоторые частные случаи параллелограммов с доказательством некоторых их свойств.

Определение 7. **Прямоугольником** *называется параллелограмм, у которого хотя бы один внутренний угол прямой.*

Из этого определения и свойств углов параллелограмма (см. выше теорему 4, свойства 3 и 4) вытекает, что если в параллелограмме имеется прямой угол, то противолежащий ему угол также прямой и остальные два угла, как прилежащие к одной стороне этого параллелограмма и составляющие в сумме с ним развернутый угол, тоже прямые. Следовательно, в параллелограмме все углы — прямые.

Замечание. Традиционно в учебной и справочной литературе прямоугольник *определяется* как параллелограмм, у которого все углы прямые. Однако, как видно из приведенного определения 7, такое "переопределенное" определение прямоугольника по сути дела является теоремой, доказываемой на основе определения 7 и свойств углов параллелограмма.

Отметим, что прямоугольник как частный случай параллелограмма обладает всеми его свойствами (см. выше теорему 4), однако его диагонали обладают свойством, которым диагонали произвольного параллелограмма, вообще говоря, не обладают. А именно, имеет место теорема.

Теорема 9. Диагонали прямоугольника равны.

Доказательство

См. рис. 39 а). Рассмотрим треугольники ABD и ADC, у которых сторона AD — общая, $AB = DC$ по свойству параллелограмма, $\angle BAD = \angle CDA$ как прямые углы, следовательно, $\triangle ABD = \triangle ADC$ по двум сторонам и углу между ними, а потому $AC = BD$. Теорема 9 доказана.

Имеет место и обратная теорема.

Теорема 9′. Если в параллелограмме диагонали равны, то он — прямоугольник.

Доказательство этой теоремы проводится на основе равенства треугольников DAB и ADC по трем сторонам, откуда вытекает равенство

углов DAB и ADC . Поскольку в силу параллельности сторон AB и DC $\angle DAB + \angle ADC$ — развернутый угол, то каждый из углов $\angle DAB$ и $\angle ADC$ — прямой, это по определению 7 означает, что $ABCD$ — прямоугольник.

Определение 8. **Ромбом** ***называется параллелограмм, у которого хотя бы две смежные стороны равны.***

Из этого определения и свойств сторон параллелограмма (см. выше теорему 4, свойство 2) вытекает, что если в параллелограмме хотя бы две смежные стороны равны, то им будут равны и другие две его стороны как соответственно противоположные им. Следовательно, в ромбе все стороны равны.

Замечание. Традиционно в учебной и справочной литературе ромб *определяется* как параллелограмм, у которого все стороны равны. Однако, как видно из только что приведенных рассуждений, такое "переопределенное" определение ромба по сути дела является теоремой, доказываемой на основе определения 8 и свойств сторон параллелограмма.

Отметим, что ромб как частный случай параллелограмма обладает всеми его свойствами (см. выше теорему 4), однако его диагонали обладают свойствами, которыми диагонали произвольного параллелограмма, вообще говоря, не обладают. А именно, имеет место теорема.

Теорема 10. Диагонали ромба являются биссектрисами его внутренних углов и взаимно перпендикулярны.

Доказательство

См. рис. 39 б). Рассмотрим треугольники ABD и BCD , каждый из них является равнобедренным с общим основанием BD . Так как в силу свойства диагоналей параллелограмма (см. теорему 4, свойство 5) $OB =$ $= OD$ OA и OC — медианы $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ соответственно. Следовательно, в силу свойств равнобедренного треугольника (см. выше вопрос 2) $\angle DAO = \angle BAO$, $\angle DCO = \angle BCO$ и $AC \perp BD$. Аналогичным образом, рассматривая $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$, докажем равенства углов: $\angle ABO = \angle CBO$, $\angle ADO = \angle CDO$. Теорема 10 доказана.

Имеет место и обратная теорема.

Теорема $10'$. ***Если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны или хотя бы одна из его диагоналей является биссектрисой хотя бы одного из его внутренних углов, то он — ромб.***

Доказательство

Если в параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, то, рассматривая, например, $\triangle ABC$, у которого высота BO (по условию) является медианой (по свойству диагоналей параллелограмма), получим, что он равнобедренный ($AB = BC$), в силу определения 8 это означает, что $ABCD$ — ромб.

Пусть в параллелограмме $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой угла A, тогда $\angle BAC = \angle DAC$, поскольку в силу параллельности сторон AD и BC, вытекают равенства углов $\angle BAC = \angle ACD$, откуда в силу транзитивности равенства углов $\angle DAC = \angle ACD$, а потому $\triangle ADC$ — равнобедренный, $AD = DC$, получили, что в параллелограмме $ABCD$ равны две смежные стороны AD и DC, следовательно в силу определения 8 $ABCD$ — ромб. Теорема 10′ полностью доказана.

Определение 9. **Квадратом** *называется параллелограмм, у которого хотя бы один внутренний угол прямой и хотя бы две смежные стороны равны* (см. рис. 39 в).

Из этого определения и определений 7 и 8 вытекает, что квадрат — это параллелограмм, который является и прямоугольником, и ромбом. Поэтому он обладает всеми свойствами параллелограмма, прямоугольника и ромба, в частности все его стороны равны, а все его внутренние (и внешние) углы — прямые; его диагонали обладают всеми свойствами диагоналей параллелограмма, прямоугольника и ромба, то есть, в частности, они равны, взаимно перпендикулярны, являются биссектрисами его внутренних углов.

Можно сформулировать и доказать аналогичные теоремам 9′ и 10′ признаки квадрата. Например, если у параллелограмма диагонали равны и взаимно перпендикулярны, то он квадрат.

Замечание. Квадрат можно определить и как прямоугольник, у которого хотя бы две смежные стороны равны, и как ромб, у которого хотя бы один внутренний угол прямой.

Выше, в определении 1 вопроса 3 вводилось определение расстояния от точки до прямой как длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Докажем следующую теорему.

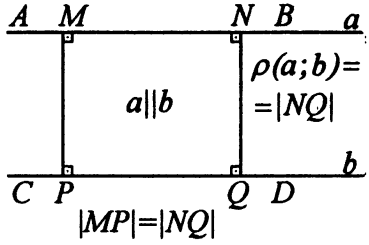


рис. 39 г)

Теорема 11. Если две прямые параллельны, то расстояния от любой точки одной из этих прямых до другой прямой равны. Другими словами, все точки одной из параллельных прямых одинаково удалены от другой из этих прямых, это означает, что параллельные прямые везде одинаково удалены одна от другой.

Доказательство

См. рис. 39 г). Пусть $(AB) \parallel (CD)$, опустим из точки $M \in (AB)$ перпендикуляр MP на прямую (CD) , точка $P \in (CD)$ — основание перпендикуляра MP , опустим также из точки $N \in (AB)$, $N \neq M$ перпендикуляр NQ на прямую (CD) , точка $Q \in (CD)$ — основание перпендикуляра NQ . Как отмечалось выше, в следствиях из теорем 3 и 4 вопроса 5, из того, что $(MP) \perp (CD)$ и $(NQ) \perp (CD)$ вытекает, что $(MP) \parallel (NQ)$, $(MP) \perp (AB)$ и $(NQ) \perp (AB)$ а так как $(AB) \parallel (CD)$, то четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, причем с прямыми внутренними углами, то есть — прямоугольник. Следовательно а силу второго свойства параллелограмма (см. выше теорему 4) $MP = NQ \Rightarrow |MP| = |NQ|$. Теорема 11 доказана.

На основе результата этой теоремы можно ввести определение расстояния между параллельными прямыми.

Определение 10. Пусть прямые a и b параллельны (см. рис. 39 г). *Расстоянием между параллельными прямыми a и b называется длина их общего перпендикуляра (то есть отрезка прямой, перпендикулярной им, концы которого лежат на этих прямых).* Обозначения $\rho(a;b)$ или $\rho((AB);(CD))$, $\rho(a;b) = \rho((AB);(CD)) = |MP| = |NQ|$.

Вопрос 8. Теорема Фалеса. Признаки подобия треугольников

Вводная часть

Определение 1. Пусть у треугольников ABC и $A'B'C'$ с соответствующими вершинами A и A' , B и B' , C и C' соответствующие внутренние углы равны, то есть $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$. Тогда их соответствующие стороны AB и $A'B'$; BC и $B'C'$; AC и $A'C'$ называются **сходственными**.

Определение 2. Говорят, что два отрезка AB и CD **пропорциональны** *двум отрезкам $A'B'$ и $C'D'$, если*

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|CD|}{|C'D'|} ,$$

три отрезка AB , CD и EF **пропорциональны** *трем отрезкам $A'B'$, $C'D'$ и $E'F'$, если*

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|CD|}{|C'D'|} = \frac{|EF|}{|E'F'|} .$$

Аналогично определяется пропорциональность четырех, пяти и т.д. отрезков соответственно четырем, пяти и т.д. отрезкам.

Определение 3. Треугольники ABC и $A'B'C'$ называются подобными, если у них

$$\angle A = \angle A' , \ \angle B = \angle B' , \ \angle C = \angle C' ,$$
$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} ,$$

то есть у них равны соответствующие внутренние углы и пропорциональны сходственные стороны. Число k, равное $|AB|/|A'B'|$, называется **коэффициентом подобия** *треугольника ABC по отношению к подобному ему треугольнику $A'B'C'$*. В соответствии с этим число $k' = 1/k$ будет *коэффициентом подобия* треугольника $A'B'C'$ по отношению к подобному ему треугольнику ABC. В частности, когда $k = k' = 1$, треугольники ABC и $A'B'C'$ равны.

Обозначение подобных треугольников: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Из определения подобных треугольников непосредственно вытекает, что отношение подобия треугольников обладает свойствами:
рефлексивности — $\triangle ABC \sim \triangle ABC$, то есть каждый треугольник подобен сам себе,
симметричности — $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ и
транзитивности — из $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C'' \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$.

Докажем две вспомогательне леммы, на основе которых ниже, в основной части этого вопроса будут доказаны теорема Фалеса и три признака подобия треугольников.

Лемма 1. Пусть две прямые (AO) и (BO) пересекаются в точке O, прямая (ME) пересекает каждый из лучей OA и OB. Тогда всякая прямая $(NF) \parallel (ME)$, пересекающая луч OB в точке F, не лежащей между точками O и E, пересечет луч OA в точке N, не лежащей между точками O и M; а также всякая прямая $(ME) \parallel (NF)$, пересекающая луч OB в точке E, лежащей между точками O и F, пересечет луч OA в точке M, лежащей между точками O и N.

Доказательство

См. ниже рис. 41 а). Через точку O проведем прямую $a \parallel ME$, тогда в силу транзитивности параллельности прямых $a \parallel NF$, а в силу следствия из аксиомы параллельности прямых (см. выше вопрос 5) так как прямая (ME) пересекает прямые (OA) и (OB), то и прямая a также пересекает эти прямые, причем в точке O.

Пусть прямая (ME) пересекает лучи OA и OB соответственно в точках M и E. Вследствие вывода из определения 2 вопроса 5 о расположении одной из параллельных прямых в одной полуплоскости относительно другой прямой прямая (ME) расположена в той же полуплоскости относительно прямой a, что и точки M и E, а потому в силу У20 п. 2.3.0. в этой же полуплоскости будут находиться лучи OM и OE. Поскольку точки E и F лежат на одном луче с началом в точке O, то они расположены в одной полуплоскости относительно прямой a, в которой (в силу параллельности $(EM) \parallel a$ и $(FN) \parallel a$) расположены прямые (EM) и (FN). В силу

$(EM) \parallel (FN)$ и $(EM) \cap (OA) \equiv M$ вытекает, что $(FN) \cap (OA) \equiv N$, причем точка N расположена в той же полуплоскости относительно прямой a, что и прямая (FN), а потому и луч OM, следовательно, точка N расположена на *луче* OM. Точки O и F расположены в разных полуплоскостях относительно прямой (EM) (так как по условию точка E лежит между точками O и F), а потому в силу $(EM) \parallel a$ и $(EM) \parallel (FN)$ прямые a и (FN) находятся в разных полуплоскостях относительно (EM), а потому и точки O и N также находятся в разных полуплоскостях относительно (EM). Так как $M \equiv (EM) \cap (OA)$, то точка M лежит между точками O и N, а следовательно, точка N не лежит между точками O и M.

Если теперь предположить, что прямая (NF) пересекает лучи OA и OB соответственно в точках N и F, то, проводя через точку E, лежащую между точками O и F, прямую $(EM) \parallel (FN)$, где $M \equiv (EM) \cap (OA)$, рассуждая аналогично, мы получим, что точка M лежит на луче OA, а потому точка O не лежит между точками M и N. Далее, так как точка F не лежит между точками O и E, эти точки лежат в одной полуплоскости относительно прямой (FN), в которой будут расположены прямые (ME) и a, стало быть, в этой полуплоскости расположена и точка M. Итак, точки O и M расположены в одной полуплоскости относительно прямой (NF), следовательно, точка N на прямой (OA) не лежит между точками O и M, таким образом, точка M на прямой (OA) лежит между точками O и N. Лемма 1 полностью доказана.

Замечание. Аналогичным образом, проводя через точку G на луче OB прямую, параллельную прямой (FN) (см. рис. 41 а), где точка F лежит между точками E и G, мы докажем, что эта прямая пересечет луч OA в точке P такой, что точка N лежит между точками M и P.

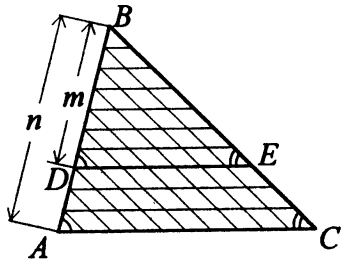


рис. 40 а)

Лемма 2. Если в плоскости треугольника (ABC) проведана прямая $(DE) \parallel (AC)$, где точка D лежит на стороне AB, то (DE) пересечет сторону BC в точке E, и $\triangle DBE \sim \triangle ABC$.

Доказательство

См. также п. 159 — 160 учебника [8]. Пересечение прямой (DE) именно стороны (отрезка) BC вытекает из леммы 1. Пусть в треугольнике ABC $DE \parallel AC$, тогда у $\triangle ABC$ и $\triangle DBC$ $\angle ABC$ — общий, $\angle BDC = \angle BAC$ так как являются соответственными при $(DE) \parallel (AC)$ и секущей (AB) , $\angle BED = \angle BCA$, так как являются соответственными при $(ED) \parallel (CA)$ и секущей (BC) , следовательно согласно определению 3 подобных треугольников надо доказать пропорциональность сторон $\triangle ABC$ и $\triangle DBE$, то есть доказать равенства

$$\frac{|BD|}{|BA|} = \frac{|BE|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|AC|} .$$

Отметим, что поскольку точка D лежит на отрезке BA (поскольку она лежит между точками B и A) , то отрезок BD меньше отрезка BA , а потому $|BD| : |BA| < 1$. Рассмотрим два случая.

1) Отношение длин сторон BD и BA — рациональное число, то есть $|BD| : |BA| = m : n$, где m и n — натуральные числа, причем Н.О.Д.$(m; n) = 1$ (в противном случае дробь m/n можно сократить до несократимой дроби на Н.О.Д.$(m; n) \neq 1$). Так как $m : n < 1$, то $m < n$. Согласно У41 п. 2.3.0. отрезок BA можно разделить на n равных отрезков, тогда, последовательно откладывая n-ую часть отрезка BA от точки B на луче BA (это возможно на основании А14 п. 2.3.0), мы отложим ровно m таких отрезков на стороне BD и m таких отрезков на стороне BA . Проведем через концы этих отрезков прямые, параллельные прямым (DE) (а, стало быть, в силу $(DE) \parallel (AC)$ параллельные и (AC)), и прямые, параллельные (BC) (см. рис. 40 а). В силу леммы 1 эти прямые пересекут соответственно *отрезки* BE и EC , а также *отрезки* AC и DE , при этом получатся также последовательно расположенные (в силу доказываемой ниже теоремы Фалеса) *равные* отрезки на отрезках BE и BC , а также на отрезках DE и AC , причем количество равных между собой (n-ой части отрезка BC) отрезков на сторонах BE и BC будет соответственно m и n и количество равных между собой (n-ой части отрезка AC) отрезков на сторонах DE и AC будет тоже соответственно m и n . В силу определений суммы n отрезков и того, что длина суммы n отрезков равна сумме длин этих отрезков (см. О21А и У39 п. 2.3.0) мы и получим, что

$$\frac{|BD|}{|BA|} = \frac{|BE|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|AC|} = \frac{m}{n} .$$

2) Отношение длин сторон BD и BA — иррациональное число, то есть (поскольку $|BD| : |BA| < 1$) $\dfrac{|BD|}{|BA|} = \alpha = 0, m_1 m_2 m_3 ... m_n \ ... \ ,$

где $0, m_1 m_2 m_3 ... m_n ...$ — бесконечная непериодическая десятичная дробь.

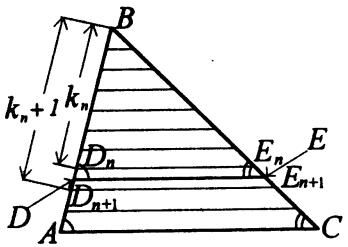


рис. 40 б)

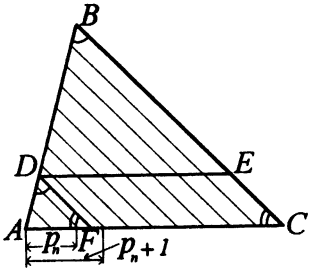


рис. 40 в)

Положим $\alpha'_n = 0, m_1 m_2 ... m_n$, α'_n — рациональное приближение числа α по недостатку с точностью $1/10^n$, $\alpha''_n = \alpha'_n + 1/10^n$ — рациональное приближение числа α по избытку с точностью $1/10^n$, $n = 1 ; 2 ; 3 ; \ldots$. Будем искать приближенные значения отношений $|BD| : |BA|$, $|BE| : |BC|$, $|DE| : |AC|$ с точностями $1/10$, $1/100$, $1/1000$, $\ldots 1/10^n$, $\ldots$.

Будем в определенном смысле действовать по аналогии со случаем 1) .

На первом этапе разделим отрезок BA на 10 равных отрезков (частей) и через концы полученных отрезков проведем прямые, параллельные сторонам AC и BC, при этом (поскольку число α не является рациональным) обязательно найдется такое целое число m_1 из множества $\{0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; 9\}$ такое, что в отрезке BD отложится m_1 десятых частей отрезка BA (может, в частности, оказаться, что $m_1 = 0$) и останется остаток — отрезок меньший $1/10$ отрезка BA .

На втором этапе разделим $1/10$ отрезка BA еще на 10 частей, тем самым, отрезок BA разделится на 100 равных частей, через концы полученных отрезков проведем прямые, параллельные сторонам AC и BC , при этом (поскольку число α не является рациональным) обязательно найдется такое целое число m_2 из множества $\{0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; 9\}$ такое, что в полученном на первом этапе остатке отложится m_2 сотых частей отрезка BA (может, в частности, оказаться, что $m_2 = 0$) и останется остаток — отрезок меньший $1/100$ отрезка BA .

На третьем этапе разделим $1/100$ отрезка BA еще на 10 частей, тем самым, отрезок BA разделится на 1000 равных частей, через концы полученных отрезков проведем прямые, параллельные сторонам AC и BC , при этом (поскольку число α не является рациональным) обязательно найдется такое целое число m_3 из множества $\{0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; 9\}$ такое, что в полученном на втором этапе остатке отложится m_3 сотых частей отрезка BA (может, в частности, оказаться, что $m_3 = 0$) и останется остаток — отрезок меньший $1/1000$ отрезка BA ; и так далее .

На n-ом этапе разделим $1/10^{n-1}$ часть отрезка BA еще на 10 частей,

тем самым, отрезок BA разделится на 10^n равных частей, через концы полученных отрезков проведем прямые, параллельные сторонам AC и BC, при этом (поскольку число α не является рациональным) обязательно найдется такое целое число m_n из множества $\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ \ldots\ ;\ 9\}$ такое, что в полученном на $(n-1)$-ом этапе остатке отложится m_n $1/10^n$-ых частей отрезка BA (может, в частности, оказаться, что $m_n = 0$) и останется остаток — отрезок меньший $1/10^n$ части отрезка BA ; и так далее .

Поскольку отрезок BD — ненулевой, обязательно найдется такое натуральное число n_0 , что соответствующее $m_{n_0} > 0$.

Обозначим за D_n — конец отрезка BD_n , равного сумме $1/10^n$ частей отрезка BA , который еще откладывается от точки B на луче BA внутри отрезка BD (то есть точка D_n лежит между точками B и D); а за D_{n+1} обозначим конец отрезка BD_{n+1} , равного сумме $1/10^n$ частей отрезка BA, который, будучи отложенным от точки B на луче BA , уже не откладывается внутри отрезка BD (то есть точка D_{n+1} не лежит между точками B и D , поэтому точка D лежит между точками B и D_{n+1}) (см. рис. 40 б). В силу У8 п. 2.3.0. точка D также лежит между точками D_n и D_{n+1} . Следовательно, исходя из свойств длины отрезка, получаем, что $|BD_n| < |BD| < |BD_{n+1}|$. Аналогично случаю 1) мы получим соответствующие точки E_n и E_{n+1} на луче BC , где (в силу леммы 1) точка E_n лежит между точками B и E , а точка E_{n+1} не лежит между точками B и E . Точка E лежит между точками B и E_{n+1} , поэтому в силу У8 п. 2.3.0. точка E также лежит между точками E_n и E_{n+1} . На основе свойств длины отрезка также получаем, что $|BE_n| < |BE| < |BE_{n+1}|$. Отметим, что E_n и E_{n+1} — соответственно концы отрезка BE_n и BE_{n+1} , которые равны суммам соответствующих количеств $1/10^n$ частей отрезка BC . Таким же образом, как и в случае 1 мы получим, что

$$\frac{|BD_n|}{|BA|} = \frac{|BE_n|}{|BC|} = \alpha'_n\ ;\ \frac{|BD_{n+1}|}{|BA|} = \frac{|BE_{n+1}|}{|BC|} = \alpha''_n \qquad (*)\ .$$

Поскольку из полученных выше неравенств для длин отрезков AD_n , AD , AD_{n+1} и AE_n , AE , AE_{n+1} вытекают неравенства:

$$\frac{|BD_n|}{|BA|} < \frac{|BD|}{|BA|} < \frac{|BD_{n+1}|}{|BA|}\ ;\ \frac{|BE_n|}{|BC|} < \frac{|BE|}{|BC|} < \frac{|BE_{n+1}|}{|BC|}\ ,$$

то из равенств $(*)$ мы получим, что

$$\left|\frac{|BD|}{|BA|} - \frac{|BE|}{|BC|}\right| = \alpha''_n - \alpha'_n = 1/10^n\ .$$

В силу свойств действительных чисел последнюю дробь засчет выбора n можно сделать меньше сколь угодно малого положительного числа,

поэтому:

$$\left|\frac{|BD|}{|BA|}-\frac{|BE|}{|BC|}\right|=0 \Leftrightarrow \frac{|BD|}{|BA|}=\frac{|BE|}{|BC|}.$$

Для доказательства того, что каждое из этих отношений равно еще и $|DE|:|AC|$, проведем через точку D прямую (DF), параллельную BC, F — точка ее пересечения с прямой (AC). Пересечение прямой (DF) именно стороны (отрезка) AC вытекает из леммы 1 (см. рис. 40 в). Так как у четырехугольника $FDEC$ $DE \parallel AC$ и $DF \parallel EC$, он — параллелограмм. В силу равенства противоположных сторон $\#\ FC=DE \Rightarrow |FC|=|DE|$.

$$\frac{|DA|}{|BA|}=\frac{|BA|-|BD|}{|BA|}=1-\frac{|BD|}{|BA|}=1-\alpha=\beta=1-0,m_1m_2...m_n... .$$

Число β иррационально, так как, предполагая, что оно рационально, мы бы получили, что $\alpha=1-\beta$ также рационально, что противоречит иррациональности числа α. Совершенно аналогичным образом доказывается, что

$$\frac{|AD|}{|AB|}=\frac{|AF|}{|AC|} \Leftrightarrow 1-\frac{|AD|}{|AB|}=1-\frac{|AF|}{|AC|}=$$

$$=\frac{|AB|-|AD|}{|AB|}=\frac{|AC|-|AF|}{|AC|} \Leftrightarrow \frac{|BD|}{|AB|}=\frac{|FC|}{|AC|}=\frac{|DE|}{|AC|}.$$

Лемма 2 полностью доказана.

Замечание. Поскольку для любых чисел a, b, c, d, каждое из которых отлично от нуля $a:b=c:d \Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$, то, переставляя местами сомножители или в левой, или в правой, или сразу в обеих частях последнего равенства, мы получим:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \Leftrightarrow \frac{c}{a}=\frac{d}{b}.$$

Следствие 1. Доказанные соотношения представляют собой следующие пропорции (равенства отношений):

$$\frac{|BD|}{|BA|}=\frac{|BE|}{|BC|};\ \frac{|BD|}{|BA|}=\frac{|DE|}{|AC|};\ \frac{|BE|}{|BC|}=\frac{|DE|}{|AC|}.$$

Поэтому согласно замечанию эти пропорции соответственно равносильны следующим пропорциям:

$$\frac{|BD|}{|BE|}=\frac{|BA|}{|BC|};\ \frac{|BD|}{|DE|}=\frac{|BA|}{|AC|};\ \frac{|BE|}{|DE|}=\frac{|BC|}{|AC|}.$$

Таким образом, *если в треугольниках стороны пропорциональны, то отношение длин двух сторон одного треугольника равно отношению длин сходственных сторон другого треугольника.*

Следствие 2. Первая из пропорций, приведенная в следствии 1, равно-

сильна следующим пропорциям:

$$\frac{|BD|}{|BA|}=\frac{|BE|}{|BC|} \Leftrightarrow \frac{|DA|}{|BA|}=\frac{|EC|}{|BC|} \Leftrightarrow \frac{|BD|}{|DA|}=\frac{|BE|}{|EC|},$$

последняя из выписанных пропорций означает, что *если прямая, пересекает две стороны треугольника и параллельна его третьей стороне, то отрезки первой из пересекаемых этой прямой сторон пропорциональны отрезкам второй из этих сторон.*

Доказательство

$$\frac{|BD|}{|BA|}=\frac{|BE|}{|BC|} \Leftrightarrow 1-\frac{|BD|}{|BA|}=1-\frac{|BE|}{|BC|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|BA|-|BD|}{|BA|}=\frac{|BC|-|BE|}{|BC|} \Leftrightarrow \frac{|DA|}{|BA|}=\frac{|EC|}{|BC|};$$

$$\frac{|BD|}{|BA|}=\frac{|BE|}{|BC|} \Leftrightarrow \frac{|BA|}{|BD|}=\frac{|BC|}{|BE|} \Leftrightarrow \frac{|BD|+|DA|}{|BD|}=\frac{|BE|+|EC|}{|BE|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{|DA|}{|BD|}=1+\frac{|EC|}{|BE|} \Leftrightarrow \frac{|DA|}{|BD|}=\frac{|EC|}{|BE|} \Leftrightarrow \frac{|BD|}{|DA|}=\frac{|BE|}{|EC|}.$$

Основная часть

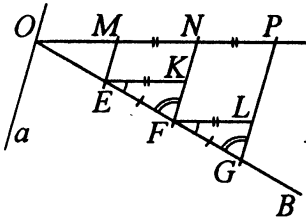


рис. 41 а)

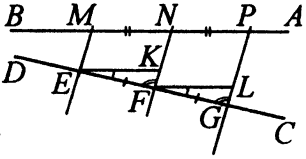


рис. 41 б)

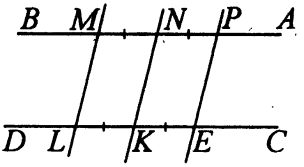


рис. 41 в)

Теорема Фалеса. Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла (параллельные прямые), отсекают на одной его стороне (на одной из параллельных прямых) равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне (на другой из параллельных прямых).

Доказательство

Пусть на прямой (OB) отрезки EF и FG равны, прямые (ME), (NF), (PG), пересекающие прямые (OB) и (OA) (где точки E, F, $G \in (OA)$), параллельны. Докажем, что отрезки MN и NP также равны. См. рис. 41 а). Поскольку в этом случае прямые (OA) и (OB) пересекаются в точке O, то, проводя через точки E и F прямые, параллельные (OA), в силу следствия из аксиомы параллельльсти прямых (см. выше вопрос 5) получим, что они пересекут прямые (NF) и (PG) соответственно в точках K и L, причем точки K и L не будут лежать на прямой (OB). В силу за-

мечания к лемме 1, если точка F лежит между точками E и G, то точка N лежит между точками M и P. В силу транзитивности параллельности прямых $(EK) \parallel (FL)$, так как обе эти прямые по построению параллельны прямой (OA). Поскольку точки E и G лежат в разных полуплоскостях относительно прямой (FN) (так как точка F лежит между точками E и G), то $\angle KEF$ и $\angle LFG$ — соответственные при $(EK) \parallel (FL)$ и секущей $(EF) \equiv (OB)$, в силу свойства параллельных прямых $\angle KEF = \angle LFG$. Аналогично $\angle EFK$ и $\angle FGL$ — соответственные при $(FN) \parallel (PG)$ и секущей $(FG) \equiv (OB)$, в силу свойства параллельных прямых $\angle EFK = \angle FGL$. Поскольку $EF = FG$, то $\triangle EFK = \triangle FGL$ (по стороне и двум прилежащим ей углам). Поэтому $EK = FL$, а так как $EMNK$ и $FNNP$ — параллелограммы, то $MN = EK = FL = PN$, то есть $MN = NP$.

В случае не параллельных прямых (AB) и (CD) доказательство проводится точно так же (см. рис. 41 б).

В случае параллельных прямых (AB) и (CD) (см. рис. 41 в) $LMNK$ и $KNPE$ — параллелограммы, поэтому $MN = LK = KC = PN$, то есть $MN = NP$. Теорема Фалеса доказана.

Замечание. В доказательстве теоремы Фалеса *не использовались* теоремы о подобии треугольников, поэтому применение теоремы Фалеса при доказательстве леммы 2 было законным.

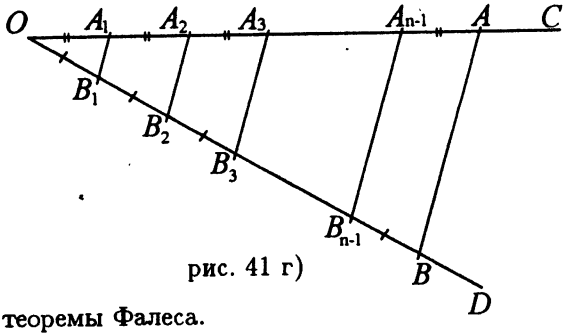


рис. 41 г)

Примененние теоремы Фалеса.

См. рис. 41 г). Она применяется, например, для решения задачи о делении отрезка на произвольное число равных отрезков. Пусть требуется разделить отрезок OA на луче OC на n равных отрезков (частей). Проведем луч OD под произвольным углом (углом первого типа) с лучом OC и последовательно отложим на луче OD n равных между собой отрезков $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \ldots = B_{n-1}B$. Далее проведем прямую (BA), а затем через точки B_1, B_2, B_3, $\ldots$ B_{n-1} проведем прямые, параллельные прямой (B_nA), которые пересекут луч OA в точках A_1, A_2, A_3, $\ldots$ A_{n-1}. В силу теоремы Фалеса получим равенство отрезков $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A$.

Сформулировать определения подобных сходственных сторон, пропорциональности отрезков и подобных треугольников (см. выше определения 1, 2, 3 вводной части этого вопроса).

Теорема 1. (первый признак подобия треугольников по двум углам).

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

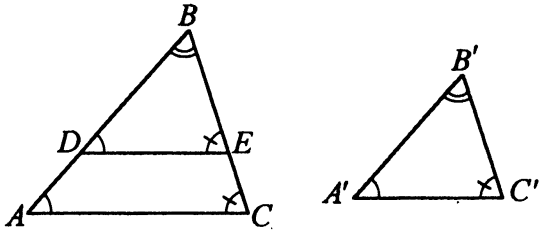


рис. 42 а)

Доказательство

См. рис. 42 а). Пусть в $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, тогда в силу равенства суммы внутренних углов треугольника развернутому углу и У32 п. 2.3.0. $\angle A + \angle B = \angle A' + \angle B'$, а потому $\angle C = \angle C'$. Если оказалось, что $AB = A'B'$, то по второму признаку равенства треугольников $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ и потому эти треугольники подобны с коэффициентом подобия $k = 1$. Пусть $A'B' < AB$ (случай $A'B' > AB$ рассматривается аналогично), отложим на луче BA отрезок $BD = B'A'$ (это возможно в соответствии с А14 п. 2.3.0) и проведем прямую $(DE) \parallel (AC)$, которая в силу следствия из аксиомы параллельности прямых и леммы 1 пересечет отрезок BC в точке E . При этом получится вспомогательный $\triangle DBE$, подобный (в силу леммы 2) $\triangle ABC$. Так как $\angle BAC = \angle BDE$ как соответственные при $AC \parallel DE$ и секущей (AB) , а $\angle BAC = \angle B'A'C'$ (по условию), то $\angle BDE = \angle B'A'C'$. Следовательно, у $\triangle DBE$ и $\triangle A'B'C'$ стороны $BD = B'A'$ по построению, $\angle DBE = \angle A'B'C'$ по условию и $\angle BDE = \angle B'A'C'$ по доказанному (на основе У36 п. 2.3.0), а потому (по двум сторонам и углу между ними) $\triangle DBE = \triangle A'B'C'$. Следовательно, $BE = B'C'$, $DE = A'C'$. Так как из того, что $\triangle DBE \sim \triangle A'B'C'$ вытекают равенства

$\frac{|BD|}{|BA|} = \frac{|BE|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|A'C'|}$, то $\frac{|B'A'|}{|BA|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$. Получили, что у треугольников ABC и $A'B'C'$ равны соответствующие внутренние углы и пропорциональны сходственные стороны. Следовательно, по определению они подобны. Теорема 1 доказана.

Теорема 2.

(второй признак подобия по двум сторонам и углу между ними).

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, и углы, образованные этими сторонами, равны.

то есть $\dfrac{|BA|}{|B'A'|} = \dfrac{|BC|}{|B'C'|}$ и $\angle B = \angle B'$, то эти треугольники подобны.

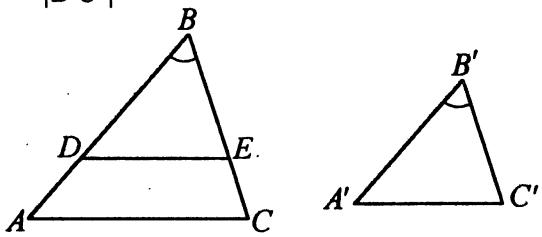


рис. 42 б)

Доказательство

См. рис. 42 б). Если оказалось, что $AB = A'B'$, то в силу равенства $|BA| : |B'A'| = |BC| : |B'C'|$ вытекает, что $BC = B'C'$, следовательно, по первому признаку равенства треугольников $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ и потому эти треугольники подобны с коэффициентом подобия $k = 1$. Пусть $A'B' < AB$ (случай $A'B' > AB$ рассматривается аналогично), отложим на луче BA отрезок $BD = B'A'$ (это возможно в соответствии с А14 п. 2.3.0) и проведем прямую $(DE) \parallel (AC)$, которая в силу следствия из аксиомы параллельности прямых и леммы 1 пересечет отрезок BC в точке E. Отметим, что $\angle BAC = \angle BDE$ как соответственные при $AC \parallel DE$ и секущей (AB) . Получим вспомогательный $\triangle DBE$, подобный (в силу леммы 2) $\triangle ABC$. Из подобия этих треугольников и равенства $BD = B'A'$

вытекают равенства: $\dfrac{|BD|}{|BA|} = \dfrac{|BE|}{|BC|} \Leftrightarrow \dfrac{|B'A'|}{|BA|} = \dfrac{|BE|}{|BC|}$.

Так как по условию $\dfrac{|B'A'|}{|BA|} = \dfrac{|B'C'|}{|BC|}$, то $\dfrac{|BE|}{|BC|} = \dfrac{|B'C'|}{|BC|} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |BE| = |B'C'| \Leftrightarrow BE = B'C' .$$

Получили, что у треугольников DBE и $A'B'C'$ $\angle DBE = \angle A'B'C'$ по условию, $BD = B'A'$ по построению, $BE = B'C'$ по доказанному, следовательно, $\triangle DBE = \triangle A'B'C'$ (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, $\angle BDE = \angle B'A'C'$, а так как выше отмечалось, что $\angle BDE = \angle BAC$ и по условию $\angle ABC = \angle A'B'C'$, то получаем, что $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. (третий признак подобия по трем сторонам).
Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника, то есть $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$, *то такие треугольники подобны.*

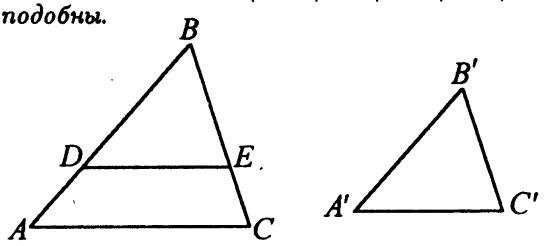


рис. 42 в)

Доказательство

См. рис. 42 в) Если оказалось, что $AB = A'B'$, то в силу равенств $|BA| : |B'A'| = |BC| : |B'C'|$ и $|BA| : |B'A'| = |AC| : |A'C'|$ вытекают равенства: $BC = B'C'$ и $AC = A'C'$, следовательно, по третьему признаку равенства треугольников $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ и потому эти треугольники подобны с коэффициентом подобия $k = 1$. Пусть $A'B' < AB$ (случай $A'B' > AB$ рассматривается аналогично), отложим на луче BA отрезок $BD = B'A'$ (это возможно в соответствии с А14 п. 2.3.0) и проведем прямую $(DE) \parallel (AC)$, которая в силу следствия из аксиомы параллельности прямых и леммы 1 пересечет отрезок BC в точке E. Получим вспомогательный $\triangle DBE$, подобный (в силу леммы 2) $\triangle ABC$. Из подобия этих треугольников вытекают равенства:

$$\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|BC|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|DE|}.$$

Из равенств $BD = B'A'$ (по построению), $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$ (по условию) и $\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|DE|}$ (по доказанному) следуют равенства:

$$\frac{|AC|}{|DE|} = \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} \Rightarrow \frac{|AC|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |DE| = |A'C'| \Leftrightarrow DE = A'C';$$

аналогично, из равенств $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$ (по условию) и $\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|BC|}{|BE|}$ (по доказанному) следуют равенства:

$$\frac{|BC|}{|BE|} = \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} \Rightarrow \frac{|BC|}{|BE|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |BE| = |B'C'| \Leftrightarrow BE = B'C' .$$

Таким образом, получили, что в треугольниках DBE и $A'B'C'$ $DB = A'B'$ (по построению), $DE = A'C'$, $BE = B'C'$ (по доказанному). Следовательно, $\triangle DBE = \triangle A'B'C'$ (по трем сторонам). Отсюда, в частности, вытекает, что $\angle ABC = \angle A'B'C'$, а потому для $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ оказываются выполненными все условия теоремы 2, согласно которой они подобны. Теорема 3 доказана.

Дополнительная часть

Теорема Фалеса обобщается следующим образом.

Стороны угла, пересекаемые рядом параллельных прямых, рассекаются ими на пропорциональные части (отрезки).

Две параллельные прямые, пересекаемые рядом лучей, исходящих из одной точки, рассекаются ими на пропорциональные части (отрезки).

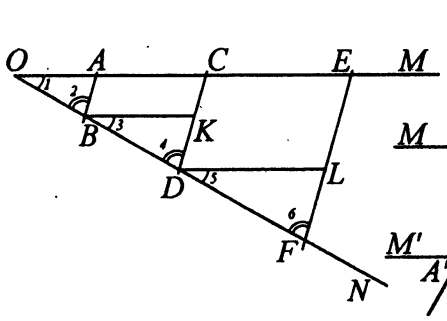


рис. 43 а)

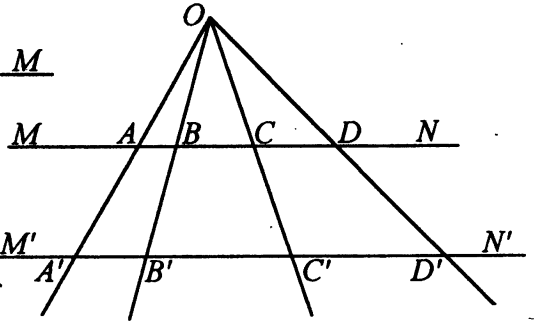


рис. 43 б)

Доказательство

См. рис. 43 а). Пусть стороны угла MON пересекаются параллельными прямыми $(AB) \parallel (CD) \parallel (EF) \parallel \ldots$, требуется доказать, что

$$\Leftrightarrow \frac{|OA|}{|AC|} = \frac{|OB|}{|BD|} \; ; \; \frac{|AC|}{|CE|} = \frac{|BD|}{|DF|} \ldots \Leftrightarrow \qquad (*)$$

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|AC|}{|BD|} = \frac{|CE|}{|DF|} = \ldots \; . \qquad (**)$$

Через точки B и D проведем прямые $(BK) \parallel (OM)$ и $(DL) \parallel (ON)$, где точка $K \in (CD)$, точка $L \in (EF)$. Тогда четырехугольники $ABKC$ и $CDLE$ являются параллелограммами, так как имеют попарно параллельные противоположные стороны, поэтому в соответствии со свойствами # $|AC| = |BK|$ и $|CE| = |DL|$. В треугольниках OAB , BKD и DLF

$\angle 1 = \angle 3 = \angle 5$ как соответственные при $(OA) \parallel (BK) \parallel (DL)$ и секущей (ON), $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6$ как соответственные при $(AB) \parallel (KD) \parallel (LF)$ и секущей (ON), поэтому в силу теоремы 1 (первого признака подобия треугольников)

$$\Leftrightarrow \frac{|OA|}{|BK|} = \frac{|OB|}{|BD|} \Rightarrow \{|BK| = |AC|\} \Rightarrow \frac{|OA|}{|AC|} = \frac{|OB|}{|BD|};$$

$$\Leftrightarrow \frac{|OA|}{|BK|} = \frac{|OB|}{|BD|} \Rightarrow \{|BK| = |AC|\} \Rightarrow \frac{|OA|}{|AC|} = \frac{|OB|}{|BD|};$$

$$\frac{|BK|}{|DL|} = \frac{|BD|}{|DF|} \Rightarrow \{|BK| = |AC|,\ |DL| = |CE|\} \Rightarrow \frac{|AC|}{|CE|} = \frac{|BD|}{|DF|}.$$

Равенства $(*)$ доказаны, равенства $(**)$ получаются из равенств $(*)$ на основе того, что в равенстве двух дробей можно менять местами числитель одной из них со знаменателем другой.

См. рис. 43 б). Пусть две параллельные прямые (MN) и $(M'N')$ пересекаются лучами OA, OB, OC, OD, ..., имеющими общее начало O (точки $A, B, C, D \in (MN)$, точки $A', B', C', D' \in (M'N')$), тогда в силу леммы 2 $\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$, $\triangle OBC \sim \triangle OB'C'$, $\triangle OCD \sim \triangle OC'D'$, ..., следовательно,

$$\Leftrightarrow \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|OB|}{|O'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|OC|}{|O'C'|} = \frac{|CD|}{|C'D'|} = \ \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CD|}{|C'D'|} = \ \ldots \ .$$

Обобщения теоремы Фалеса доказаны.

Замечание. Обобщения теоремы Фалеса можно аналогичным образом (как и теорему Фалеса при решении задачи о делении отрезка на n равных частей) применить для деления отрезка AB на части (отрезки) AC, CD, DE, ... FB, длины которых относятся как заданные числа (или отрезки заданных длин) m, n, k, ... p, то есть $|AC| : |CD| : |DB| : \ldots : |FB| = m : n : k : \ldots : p$. Эти обобщения применяются и для решении задачи об отыскании для трех отрезков заданных длин a, b, c четвертого пропорционального отрезка, то есть такого отрезка длины x, что $a : b = c : x$. По этому поводу см., например, п. 184 и 185 учебника [8].

Определение 4. Два многоугольника с одинаковым числом сторон $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ и $A'_1A'_2A'_3 \ldots A'_n$ называются **подобными**, *если у них равны внутренние углы при соответствующих вершинах, то есть $\angle A_1 = \angle A'_1$, $\angle A_2 = \angle A'_2$, ... $\angle A_n = \angle A'_n$ и пропорциональны соответствующие стороны (которые естественно назвать сходственными), то есть*

$$\Rightarrow \frac{|A_1A_2|}{|A_1'A_2'|} = \frac{|A_2A_3|}{|A_2'A_3'|} = \ldots = \frac{|A_{n-1}A_n|}{|A_{n-1}'A_n'|} = k \ \ldots \ ,$$

число k называют коэффициентом подобия.

В п. 169 учебника [8] рассматривается вопрос о существовании подобных многоугольников.

Следует отметить, что теоремы, аналогичные теоремам о подобии треугольников, для многоугольников не верны. Например, прямоугольник, не являющийся квадратом, и квадрат не являются подобными, четырехугольниками, хотя имеют соответственно равные углы (все их внутренние углы прямые), их соответствующие стороны не яаляются пропорциональными; ромб, не являющийся квадратом, и квадрат не являются подобными четырехугольниками, их соответствующие стороны стороны пропорциональны (так как у каждого из них они равны), соответствующие их углы не являются равными.

Имеет место утверждение о равенстве коэффициенту подобия (отношению длин сходственных сторон) отношения периметров подобных многоугольников.

В качестве упражнений доказать (на основе первого и второго признаков подобия треугольников) утверждения о равенстве коэффициенту подобия отношений длин медиан и биссектрис подобных треугольников, проведенных к его сходственным сторонам.

В п. 177 — 180 учебника [8] рассматривается вопрос и о подобии фигур произвольного вида, по сути дела там и при исследовании вопроса о существовании подобных многоугольников рассматривается гомотетия и преобразование подобия * фигур без использования этих терминов.

О материале, связанном с подобием многоугольников и фигур и применении метода подобия при решении задач на построение см. в учебнике [8], п. 168 — 181.

Вопрос 9. Признаки равенства и подобия прямоугольных треугольников. Теорема Пифагора

Вводная часть

Определения треугольника, прямоугольного треугольника, равных треугольников, были сформулированы выше (см. соответственно определения 1 , 7 и 8 в вопросе 1), определение подобных треугольников — см. определение 3 вопроса 7.

Напомним, что *треугольник называется* **прямоугольным**, *если у него есть внутренний прямой угол.*

---

* Об этих понятиях см. ниже, в п. 2.3.2.

Определение 1. Стороны прямоугольного треугольника, между которыми заключен прямой угол, называются **катетами**, *сторона, противолежащая прямому углу, в таком треугольнике называется* **гипотенузой**.

Как правило, в прямоугольном треугольнике ABC за C обозначают вершину прямого угла, тогда длину противолежащей ей вершины будем обозначать за c ; длину катета, противолежащего вершине острого $\angle A$, будем обозначать за a , величину этого угла будем обозначать за α , длину катета, противолежащего вершине острого $\angle B$, будем обозначать за b , величину этого угла будем обозначать за β (см. рис. 44 а).

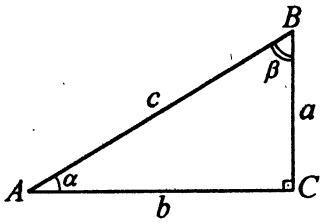


рис. 44 а)

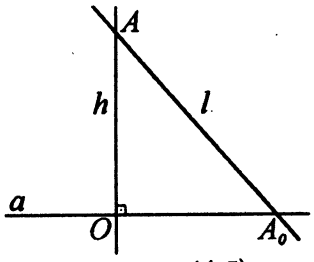


рис. 44 б)

Отметим некоторые свойства прямоугольного треугольника, вытекающие из полученных выше результатов:

1) *у прямоугольного треугольника только один угол прямой, а остальные два угла — острые* (это свойство вытекает из теоремы 6 вопроса 2);

2) *гипотенуза — наибольшая его сторона, а потому каждый катет прямоугольного треугольника меньше его гипотенузы* (поскольку острый угол по определению меньше прямого угла, это свойство вытекает из теоремы 7 вопроса 3) ;

3) *гипотенуза прямоугольного треугольника меньше суммы его катетов* (это свойство вытекает из теоремы 8 вопроса 3) ;

4) *сумма острых углов прямоугольного треугольника равна прямому углу (сумма градусных (радианных) мер этих углов равна* $90°$ $(\pi/2)$*)*.

Это свойство вытекает из теоремы 1 вопроса 6 о сумме внутренних углов произвольного треугольника.

Для доказательства некоторых следующих ниже признаков равенства прямоугольных треугольников необходимо исследовать вопрос о соотношениях между перпендикуляром, наклонными, проведенными к прямой из точки, не лежащей на этой прямой, и проекциями этих наклонных.

Пусть даны прямая и не лежащая на ней точка. В соответствии с определением 1 вопроса 3 перпендикуляра, как луча, и перпендикуляра, как отрезка введем следующие определения.

Определение 2. **Перпендикуляром**, *проведенным (опущенным) из данной точки A на данную прямую a, называется отрезок, соединяющий * точку A с точкой на прямой a, и лежащий на прямой h, перпендикулярной прямой a. Конец этого отрезка, лежащий на прямой a, называется* **основанием перпендикуляра.**

Длина *этого перпендикуляра называется* **расстоянием** *от точки A до до прямой a.*

Определение 3. **Наклонной** *к данной прямой a, называется прямая l, не являющаяся ни перпендикулярной, ни параллельной прямой a. Отрезок, соединяющий точку A с точкой на прямой a и лежащий на прямой l, наклонной к прямой a, называется* **отрезком наклонной.**

Замечание. Часто для упрощения терминологии под наклонной, проведенной из данной точки A к прямой a называют именно отрезок наклонной, одним из концов которого является точка A. Другой конец этого отрезка, лежащий на прямой a, называется **основанием наклонной.**

Определение 4. Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется **проекцией наклонной.**

Выше, на рис. 44 б), AO — перпендикуляр, проведенный из точки A на прямую a, O — основание этого перпендикуляра ; AA_0 — наклонная (отрезок наклонной l), A_0 — основание наклонной, OA_0 — проекция этой наклонной.

Теорема 1. Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки на прямую, меньше всякой наклонной, проведенной из этой же точки на эту прямую.

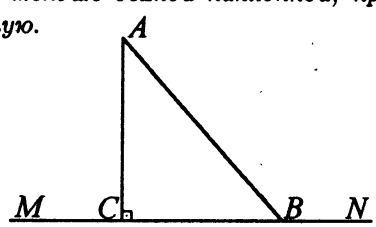


рис. 45 а)

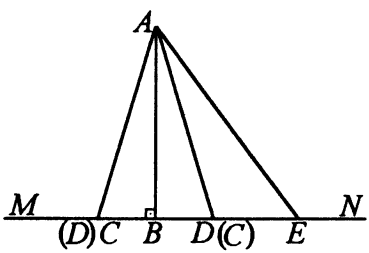


рис. 45 б)

Доказательство

См. рис. 45 а). Пусть AC — перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую (MN), C — основание этого перпендикуляра; AB — произвольная наклонная, проведенная из той же точки к прямой MN, B — основание этой наклонной. Тогда $\triangle ABC$ — прямоугольный, AB — его катет, AC

* Под термином "отрезок, соединяющий точки," понимается отрезок с концами в этих точках.

— его гипотенуза, в силу отмеченного выше свойства 2. прямоугольного треугольника вытекает, что $AC < AB$. Теорема 1 доказана.

Следствие. Поскольку $AC < AB \Leftrightarrow |AC| < |AB|$, а $|AC| \stackrel{df}{=} \rho(A;(MN))$, то *расстояние от точки до прямой — кратчайшее (наименьшее или минимальное) из расстояний от этой точки до всевозможных точек указанной прямой.*

Теорема 2. Если из одной и той же точки, не лежащей на прямой, к этой прямой проведены две (различные) наклонные, то если их проекции равны, то и сами наклонные равны.

Если из одной и той же точки, не лежащей на прямой, к этой прямой проведены две наклонные, проекции которых не равны, то та из наклонных больше (меньше), проекция которой больше (меньше).

Доказательство

См. рис. 45 б). Пусть AC и AD — две наклонные, проведенные из одной точки A к прямой (MN) , их основания C и D таковы, что $BC = BD$, B — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую (MN). Требуется доказать, что $AC = AD$.

Важно отметить, что точки C и D лежат *по разные стороны* от точки B на прямой (MN) , так как в противном случае, находясь по одну сторону от точки B на указанной прямой, в силу А14 п. 2.3.0 это было бы возможно только в случае совпадения точек C и D , но тогда в таком случае в силу А3 и А13 п. 2.3.0 совпали бы наклонные AC и AD , что противоречит тому, что они различны. У треугольников ACB и ADB общая сторона AC, $BC = BD$, $\angle ABC = \angle DBC$ равны, так как они прямые, следовательно, $\triangle ABC = \triangle DBC$ (по двум сторонам и углу между ними), а потому $AC = AD$.

Пусть AC и AE такие две наклонные, проведенные из точки A к прямой (MN) , что их проекции BC и BE не равны, для определенности пусть $BE > BC$ (тогда $BC < BE$) . Если точки C и E расположены по одну сторону от точки B на прямой (MN) , то тогда точка C лежит между точками B и E . Треугольник ACB — прямоугольный, следовательно в силу $BA \perp BC \Rightarrow \angle BCA$ — острый, а потому смежный (поскольку точка C лежит между точками B и E , лучи CB и CE являются взаимно дополнительными) с ним $\angle ECA$ — тупой. Следовательно, в $\triangle ECA$ остальные внутренние углы — острые, стало быть, его $\angle ECA$ — наибольший, а потому его сторона AE — наибольшая (в силу теоремы 7 вопроса 3), таким образом, $AE > AC$ (откуда $AC < AE$). Если точки C и E расположены по разные стороны от точки B на прямой (MN) на луче BD , не содержащем точку C , отложим отрезок $BD = BC$ (это возможно на основании А14 п. 2.3.0). По доказанному $AC = AD$, а также аналогично только что прове-

денным рассуждениям, получим, что $AE > AD$, следовательно, $AE > AC$. Теорема 2 доказана.

Справедливы и обратные утверждения доказанным в теореме 2.

Теорема 3. Если из одной и той же точки, не лежащей на прямой, к этой прямой проведены две (различные) наклонные, то если они равны, то и их проекции равны.

Если из одной и той же точки, не лежащей на прямой, к этой прямой проведены две наклонные, которые не равны, то та из них, которая больше (меньше) имеет большую (меньшую) проекцию.

Доказательство

В силу У33 п. 2.3.0 о наличии одного и только одного из трех соотношений между двумя отрезками: или $<$, или $=$, или $>$ каждое из этих утверждений легко доказывается от противного. Предположим, например, что (две различные) наклонные AD и AC равны, но их проекции BD и BC не равны, тогда если $BD > (<) BC$, то по доказанному в теореме 2 $AD > (<) AC$, откуда следует, что $AD \neq AC$, пришли к противоречию. Следовательно, $AD = AC$. Вторая часть этой теоремы доказывается таким же образом от противного с применением результата предыдущей теоремы 2. Теорема 3 доказана.

Основная часть

Теорема 4. (4 признака равенства прямоугольных треугольников).

I. *Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие прямоугольные треугольники равны.*

Справедливость этого признака вытекает из I признака равенства произвольных треугольников по двум сторонам и углу между ними (эти углы равны как прямые).

II. *Если катет и прилежащий ему (противолежащий ему) острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему ему (противолежащему ему) острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Справедливость этого признака вытекает из II признака равенства произвольных треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам (один из этих углов прямой). Причем это в случае равенства катетов и прилежащих им острых углов. Если равны катеты и противолежащие им острые углы, то равенство прилежащих им острых углов будет следовать из равенства суммы острых углов прямоугольника прямому углу и У32 п. 2.3.0 Поэтому случай равенства катетов и противолежащих им острых углов сводится к равенству катетов и прилежащих им острых углов.

III. *Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника*

ника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Справедливость этого признака вытекает из того того, что в силу У32: п. 2.3.0 и равенства прямому углу сумм острых углов прямоугольных треугольников, вторые острые углы этих треугольников также соответственно равны, поэтому в силу II признака равенства произвольных треугольников и вытекает равенство указанных прямоугольных треугольников.

Замечание. В учебнике [8] тема равенства прямоугольных треугольников излагается до теории параллельных прямых (из которой и вытекает теорема о сумме внутренних углов треугольника и, в частности, получается утверждение о сумме острых углов в прямоугольном треугольнике), поэтому в нем дается более подробное доказательство по сравнению с только что приведенным (см. п. 57 учебника [8]). Поскольку в последовательности изложения материала данного п. 2.3.1. этот признак применяется при доказательстве теоремы о свойстве биссектрисы угла (см. теорему 5 вопроса 4), а теоремы о параллельных прямых доказываются после этого, в вопросе 5, мы приведем еще одно доказательство этого признака.

Доказательство

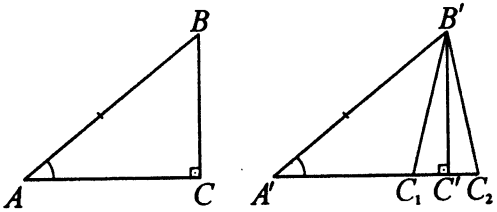


рис. 46 а)

См. рис. 46 а). Пусть у треугольников ABC и $A'B'C'$ $AB = A'B'$, $\angle A = \angle A'$. Наложим $\triangle ABC$ на $\triangle A'B'C'$ так, чтобы у них совместились точки A и A', сторона AB наложится на луч $A'B'$, а сторона AC наложится на луч $A'C'$. Такое наложение существует в силу равенства $\angle A = \angle A'$ и А16 п. 2.3.0 Так как $AB = A'B'$, то в силу А14 совместятся точки B и B', а точка C займет одно из положений: или C_1 (C_1 лежит между A' и C', $AC = A'C_1$), или C_2 (C' лежит между A' и C_2, $AC = A'C_2$), или совпадет с точкой C', $AC = A'C'$. По первому признаку равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними) соответственно $\triangle ABC = \triangle A'B'C_1$, $\triangle ABC = \triangle A'B'C_2$, $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$, поэтому соответственно или $\angle C = \angle C_1$, или $\angle C = \angle C_2$, или $\angle C = \angle C'$. Следовательно, или $\angle C_1$ — прямой, или $\angle C_2$ — прямой, а так как $\angle C'$ — прямой, $C_1 \not\equiv C'$ и $C_2 \not\equiv C'$, то получаем, что из точки B' на прямую $(A'C')$ опущено более одного перпендикуляра. Это противоречит теореме

о единственности перпендикуляра, который можно опустить из точки на прямую. Следовательно, при наложении стороны AC на луч $A'C'$ точка C может совместиться только с точкой C', а потому в силу А13 и О19 п. 2.3.0 $AC = A'C'$ и $B = B'C'$. Таким образом $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$, так как при проведенном наложении они совпали. Признак III доказан.

IV. *Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.*

Доказательство

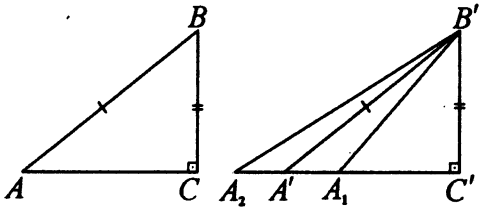


рис. 46 б)

См. рис. 46 б). Пусть у треугольников ABC и $A'B'C'$ $AB = A'B'$, $BC = B'C'$. Наложим $\triangle ABC$ на $\triangle A'B'C'$ так, чтобы у них совместились точки B и B', сторона BC наложится на луч $B'C'$, тогда в силу А14 совместятся точки C и C'. Вследствие равенства $\angle C = \angle C'$ (так как они оба прямые) сторона CA наложится на луч $C'A'$. Точка A займет одно из положений: или A_1 (A_1 лежит между A' и C', $CA = C'A_1$), или A_2 (A' лежит между C' и A_2, $CA = C'A_2$), или совпадет с точкой A', $CA = C'A'$. По признаку I равенства прямоугольных треугольников (по двум катетам) соответственно $\triangle ABC = \triangle A_1'B'C'$, $\triangle ABC = \triangle A_2B'C'$, $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$, поэтому соответственно или $B'A_1 = BA$, или $B'A_2 = BA$, или $B'A' = BA$. В силу равенства (по условию) $B'A' = BA$ получаем, что соответственно или $B'A_1 = B'A'$, или $B'A_2 = B'A'$. Однако в силу первой части теоремы 3 из равенства наклонных $B'A_1 = B'A'$ или равенства наклонных $B'A_2 = B'A'$ следовало бы равенство их проекций, то есть соответственно или $A_1C' = A'C'$, или $A_2C' = A'C'$. Поскольку точки A', A_1, A_2 расположены на одном луче с началом в точке C' в силу А14 п. 2.3.0 $A_1 \equiv A'$ и $A_2 \equiv A'$. Следовательно, возможно только то, что при указанном наложении $\triangle ABC$ на $\triangle A'B'C'$ точка A займет положение точки A', поэтому в силу А13 и О19 п. 2.3.0 $AC = A'C'$ и $B = B'C'$. Таким образом, $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$, так как при проведенном наложении они совпали. Признак IV доказан, а вместе с ним полностью доказана теорема 4.

Теорема 5. (3 признака подобия прямоугольных треугольников).

I. *Если острый угол одного прямоугольного треугольника равен остро-*

му углу другого прямоугольного треугольника, то такие прямоугольные треугольники подобны.

Справедливость этого признака вытекает из того, что у прямоугольных треугольников всегда есть еще соответственно равные углы — прямые, следовательно, они подобны по I признаку подобия треугольников общего вида (по двум углам).

II. *Если катеты одного прямоугольного треугольника пропорциональны катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны.*

Справедливость этого признака вытекает из того, что углы между катетами всегда равны, так как они прямые, следовательно, треугольники подобны по II признаку подобия треугольников общего вида (по двум пропорциональным сторонам и равному углу между ними).

III. *Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны.*

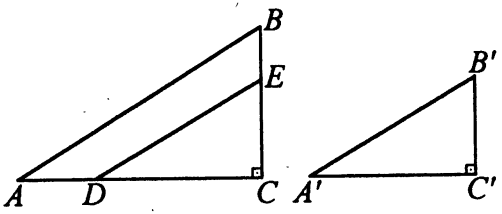


рис. 46 в)

Доказательство

См. рис. 46 в). Пусть у $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ углы $\angle C$ и $\angle C'$ прямые и $|AC| : |A'C'| = |AB| : |A'B'|$. Требуется доказать, что $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Для доказательства применим тот же прием, что и доказательстве признаков подобия произвольных треугольников в вопросе 8 . Если оказалось, что $AC = A'C'$, то $AB = A'B'$ и по признаку IV равенства прямоугольных треугольников $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ и потому эти треугольники подобны с коэффициентом подобия $k = 1$. Пусть $A'C' < AC$ (случай $A'C' > AC$ рассматривается аналогично), отложим на луче CA отрезок $CD = C'A'$ (это возможно в соответствии с А14 п. 2.3.0) и проведем прямую $(DE) \parallel (AB)$, которая в силу следствия из аксиомы параллельности прямых и леммы 1 вопроса 8 пересечет отрезок BC в точке E . При этом получится вспомогательный $\triangle DEC$, подобный (в силу леммы 2 вопроса 8) $\triangle ABC$, следовательно, $|AC| : |DC| = |AB| : |DE|$. Поскольку $CD = C'A' \Leftrightarrow |CD| = |C'A'|$, то имеем равенства:

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|AC|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|DE|} \Rightarrow |A'B'| = |DE| \Leftrightarrow A'B' = DE .$$

Следовательно, прямоугольные $\triangle DEC$ и $\triangle A'B'C'$ равны по катету и гипотенузе, а потому и $C'B' = CE$. Из подобия треугольников DEC и ABC и равенств $C'B' = CE$, $C'A' = CD$ следует, что

$$\frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|AC|}{|DC|} = \frac{|BC|}{|EC|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} .$$

Следовательно, у прямоугольных $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ пропорциональны катеты, в силу признака II они подобны. Признак подобия прямоугольных треугольников III доказан, а вместе с ним полностью доказана теорема 5 .

Теорема Пифагора. Во всяком прямоугольном треугольнике сумма квадратов длин катетов равна квадрату длины гипотенузы $(a^2 + b^2 = c^2)$.

Доказательство этой теоремы см. ниже, в вопросе 10 .

Дополнительная часть

В качестве упражнения доказать (на основе признаков подобия прямоугольных треугольников) утверждение о равенстве коэффициенту подобия отношений длин высот подобных треугольников, проведенных к его сходственным сторонам (см. п. 165 учебника [8]).

О тригонометрических функциях величины угла треугольника

Следующий материал: определения тригонометрических функций величины острого угла прямоугольного треугольника, произвольного угла треугольника и некоторые их важные свойства не имеет прямого отношения к данному вопросу, но некоторые из этих свойств доказываются на основе признаков подобия прямоугольных треугольников. В дальнейшем этот материал будет использоваться.

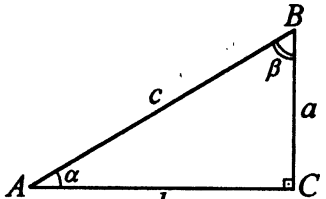


рис. 47 а)

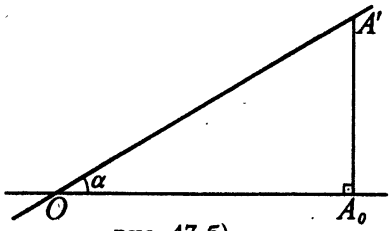


рис. 47 б)

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC , где $|CB| = a$, $|CA| = b$ — длины его катетов, $|AB| = c$ — длина его гипотенузы, $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$ — величины его внутренних острых углов (см. рис. 47 а).

Синусом *величины острого угла прямоугольного треугольника* φ *называется отношение длины противолежащего ему катета к длине гипотенузы*, обозначается $\sin\varphi$.

Косинусом *величины острого угла прямоугольного треугольника* φ *называется отношение длины прилежащего ему катета к длине гипотенузы*, обозначается $\cos\varphi$.

Тангенсом *величины острого угла прямоугольного треугольника* φ *называется отношение длины противолежащего ему катета к длине прилежащего ему катета*, обозначается $\operatorname{tg}\varphi$.

Котангенсом *величины острого угла прямоугольного треугольника* φ *называется отношение длины прилежащего ему катета к длине противолежащего ему катета*, обозначается $\operatorname{ctg}\varphi$.

Секансом *величины острого угла прямоугольного треугольника* φ *называется отношение длины гипотенузы к длине прилежащего ему катета*, обозначается $\sec\varphi$.

Косекансом *величины острого угла прямоугольного треугольника* φ *называется отношение длины гипотенузы к длине противолежащего ему катета*, обозначается $\operatorname{cosec}\varphi$.

Таким образом, в соответствии с обозначениями длин сторон и величин острых углов прямоугольгого треугольника и введенных определений имеем:

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}\ ;\ \cos\alpha=\frac{b}{c}\ ;\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}\ ;\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a}\ ;\ \sec\alpha=\frac{c}{b}\ ;\ \operatorname{cosec}\alpha=\frac{c}{a}\ .$$

Поскольку $a:b=(a:c):(b:c)$, $b:a=(b:c):(a:c)=1:(a:b)$, $(c:b)=1:(b:c)$, $(c:a)=1:(a:c)$, то

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ ;\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ ;\ \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}\ ;\ \operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}\ ;$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1\ ;\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\ ;\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}\ .$$

Замечание. Выше, при введении тригонометрических функций произвольного аргумента (см. п. 2.2) функции тангенс, котангенс, а также секанс и косеканс (см. еще и п. 2.2.3. раздела II) вводились *по определению* в виде их выражений через функции синус и косинус так же, как они выражены в предпоследних четырех равенствах. Что касается последних трех равенств, то они получены как следствие указанных перед этим четырех соотношений.

Докажем важную теорему о корректности определений тригонометрических функций величины острого угла, как функций только величины указанного угла.

Теорема 6. Определенные выше тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника являются функциями **только** *величи-*

ны указанного острого угла. * *Эти функции* **не зависят от взятых по отдельности** *фигурирующих в их определениях длин сторон прямоугольного треугольника.*

Доказательство

См. выше рис. 47 б). Выберем на одной из сторон угла величины α с вершиной O точку A' и опустим из нее перпендикуляр на другую сторону, A_0 — основание этого перпендикуляра. В силу теоремы 3 вопроса 4 так как $\angle O$ — острый, точка A_0 лежит именно на другой стороне этого угла. Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle OA'A_0$ (см. рис. 47 а) и б). Они прямоугольные и имеют равные острые углы ($\widehat{BAC} = \widehat{A'OA_0} = \alpha$), следовательно, в силу признака I подобия прямоугольных треугольников (см. теорему 5) $\triangle ABC \sim \triangle OA'A_0$, а потому

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{|A_0A'|}{|OA'|} \;\; ; \;\; \cos\alpha = \frac{b}{c} = \;\; ; \;\; \frac{|OA_0|}{|OA'|} \;\; ; \;\; \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{|A_0A'|}{|OA_0|} \;\; ;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{|OA_0|}{|A_0A'|} \;\; ; \;\; \sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{|OA'|}{|OA_0|} \;\; ; \;\; \operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a} = \frac{|OA'|}{|A_0A'|} \; .$$

В силу произвольности выбора точки A' на одной и сторон $\angle O$ мы и получаем справедливость утверждения теоремы. Теорема 6 доказана.

В силу определений тригонометрических функций величины острого угла прямоугольного треугольника легко видеть, что

$$\sin\alpha = \cos\beta \;\; ; \;\; \cos\alpha = \sin\beta \;\; ; \;\; \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta \;\; ; \;\; \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta \; ;$$

$$\sec\alpha = \operatorname{cosec}\beta \;\; ; \;\; \operatorname{cosec}\alpha = \sec\beta \; .$$

Рассмотрим (для определенности) градусную меру углов прямоугольного треугольника ABC , тогда мера его прямого угла $\widehat{ACB} = 90^\circ$, $\widehat{BAC} = \alpha^\circ$, $\widehat{ABC} = \beta^\circ$, следовательно, $\alpha^\circ + \beta^\circ = 90^\circ$. Вследствие этого и последних шести соотношениях между тригонометрическими функциями для любого $\alpha \in R$: $0 < \alpha < 90$ имеют место равенства :

$$\sin(90^\circ - \alpha^\circ) = \cos\alpha^\circ \;\; ; \;\; \cos(90^\circ - \alpha^\circ) = \sin\alpha^\circ \; ;$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha^\circ) = \operatorname{ctg}\alpha^\circ \;\; ; \;\; \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha^\circ) = \operatorname{tg}\alpha^\circ \; ;$$

$$\sec(90^\circ - \alpha^\circ) = \operatorname{cosec}\alpha^\circ \;\; ; \;\; \operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha^\circ) = \sec\alpha^\circ \; .$$

Отметим еще значения функций синус и косинус аргументов 0° ; 90° ; 180° и соотношения между этими функциями для градусной меры угла произвольного треугольника, которые вытекают из определений и свойств этих функций *для произвольного* аргумента (см. п. 2.2) :
$\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, для любого $\alpha \in R$: $0 \leqslant \alpha \leqslant 180$ имеют место равенства :

---

* Даже, если этот угол и не является углом какого-либо прямоугольного треугольника.

$$\sin(180^\circ - \alpha^\circ) = \sin\alpha^\circ \quad ; \quad \cos(180^\circ - \alpha^\circ) = -\cos\alpha^\circ \ .$$

Выведем значения тригонометрических функций аргументов 30°; 45°; 60°; при этом из последних формул можно будет получить значения тригонометрических функций и аргументов 120°; 135°; 150°.

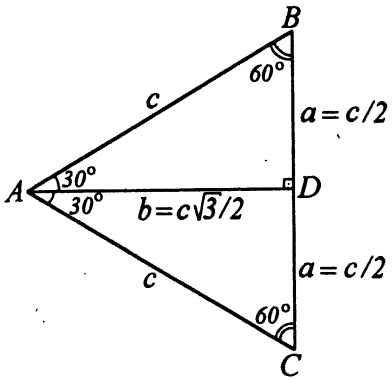


рис. 47 в)

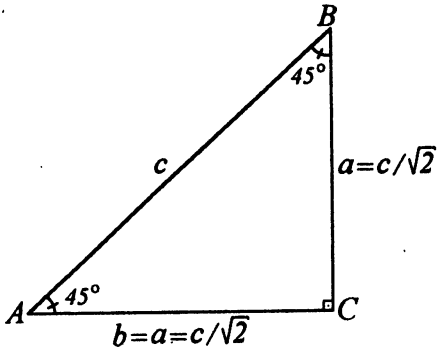


рис. 47 г)

См. рис. 47 в). Рассмотрим равносторонний треугольник ABC. Так как все его внутренние углы равны между собой, а их сумма равна развернутому углу, то каждый из них равен трети развернутого угла, а потому так как градусная мера развернутого угла равна 180°, то градусная мера каждого из внутренних углов равностороннего треугольника равна 60°, в частности $\widehat{ABD} = 60^\circ$. Медиана AD равностороннего треугольника ABC является его высотой и биссектрисой $\angle BAC$, следовательно $\angle ADB$ — прямой, а потому $\triangle ABD$ — прямоугольный, $\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = 30^\circ$, $|BD| = |DC| = |BC| : 2 = c : 2$, где c — длина каждой из сторон $\triangle ABC$. По теореме Пифагора, примененной к прямоугольному $\triangle ABD$, $|AD| = \sqrt{|AB|^2 - |BD|^2} = \sqrt{c^2 - c^2/4} = \sqrt{3c^2/4} = c\sqrt{3}/2$. Следовательно, получаем следующие значения тригонометрических функций углов величин 30° и 60° :

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad ; \quad \cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \ ;$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad ; \quad \operatorname{ctg} 30^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \ .$$

См. рис. 47 б). Рассмотрим прямоугольный равнобедренный треугольник ABC. Пусть у него $\angle C$ — прямой. Так как у прямоугольного треугольника гипотенуза больше любого из его катетов, то у такого треугольника могут быть равными только катеты. Следовательно, $AC = BC$, катеты прямоугольного равнобедренного треугольника — его боковые сто-

роны, гипотенуза AB — его основание. Из равенства $AC = BC$, следует равенство $|AC| = |CB|$, что означает $a = b$. Подставляя последнее равенство в утверждение теоремы Пифагора, примененной к $\triangle ABC$, получим $2a^2 = c^2 \Rightarrow a = b = c : \sqrt{2}$. В силу равенства углов при основании равнобедренного треугольника $\angle A = \angle B$, а так как сумма этих углов равна прямому углу, то каждый из них будет равен половине прямого угла (четверти развернутого угла). Следовательно, $\widehat{A} = \widehat{B} = 45°$ и мы получаем следующие значения тригонометрических функций угла величины 45° :

$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad \operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45° = 1 .$$

Вопрос 10. Пропорциональность отрезков в прямоугольном треугольнике. Теорема Пифагора

Вводная часть

Определение 1. Пусть имеются три положительных числа a, b и c. *Говорят, что число c есть* **среднее пропорциональное** *между числами a и b, если $a : c = c : b$.*

Сразу отметим, что равенство $a : c = c : b \Leftrightarrow c^2 = a \cdot b \Leftrightarrow c = \sqrt{a \cdot b}$, то есть c есть *среднее геометрическое двух чисел a и b* (см. вопрос 10 п. 2.1).

Теорема 1. Если из вершины прямого угла прямоугольного треугольника на прямую, содержащую его гипотенузу, опущен перпендикуляр, то основание этого перпендикуляра является внутренней точкой гипотенузы.

Доказательство

Поскольку оба внутренние угла прямоугольного треугольника (помимо прямого угла) являются острыми, то в силу теоремы 3 вопроса 4 это основание перпендикуляра находится на каждом из лучей с началом как в одном, так и в другом конце гипотенузы. А это и означает, что оно *лежит между* концами гипотенузы, то есть является ее внутренней точкой. Теорема 1 доказана.

Основная часть

Определение 2. Треугольник называется **прямоугольным**, *если у него есть внутренний прямой угол. Сторона, противолежащая прямому углу, называется* **гипотенузой**, *а остальные стороны* **катетами**.

Подробнее о прямоугольных треугольниках см. выше, вопрос 9. Там же см. используемое в этом вопросе понятие проекции наклонной.

Теорема 2. Пусть a, b — длины катетов, c — длина гипотенузы прямоугольного треугольника, h_c — длина высоты, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу, c_a — длина проекции катета длины a на гипотенузу, c_b — длина проекции катета длины b на гипотенузу. Тогда

$$\frac{h_c}{c_a}=\frac{c_b}{h_c} \Leftrightarrow h_c^2=c_a\cdot c_b \Leftrightarrow h_c=\sqrt{c_a\cdot c_b}\,; \qquad (1)$$

$$\frac{c_a}{a}=\frac{a}{c} \Leftrightarrow a^2=c\cdot c_a \Leftrightarrow a=\sqrt{c\cdot c_a}\,; \qquad (2)$$

$$\frac{c_b}{b}=\frac{b}{c} \Leftrightarrow b^2=c\cdot c_b \Leftrightarrow b=\sqrt{c\cdot c_b}\,. \qquad (3)$$

В соответствии с определением 1 утверждения теоремы означают, что:

1) *длина высоты, проведенной из вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорциональная между длинами отрезков, на которые основание этой высоты разбивает гипотенузу (в формулировке теоремы мы назвали эти отрезки проекциями катетов на гипотенузу)*;

2) *длина каждого катета, есть средняя пропорциональная между длиной гипотенузы и длиной проекции этого катета на гипотенузу.*

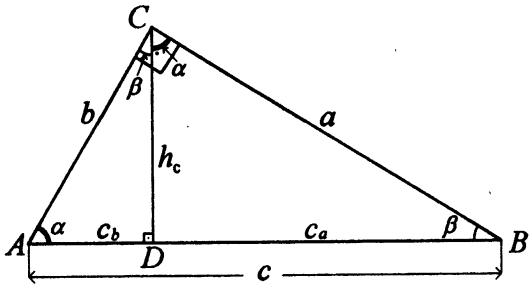


рис. 48

Доказательство

См. рис. 48. Пусть в треугольнике ABC $\angle C$ — прямой, $CD\perp AB$ $(D\in(AB))$, по доказанному в теореме 1 точка D — основание перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла C на гипотенузу, является внутренней точкой отрезка (гипотенузы) AB . Следовательно, рассматривая прямоугольные $\triangle ACD$ и $\triangle ACB$, у которых соответственно $\angle ADC$ и $\angle ACB$ — прямые, в силу равенства прямому углу суммы острых внутренних углов в прямоугольном треугольнике имеем : $\angle ACD+\angle CAD=$ $=\angle CBD+\angle CAD$, откуда в силу У32 п. 2.3.0 $\angle ACD=\angle CBD$. Совершенно аналогично, рассматривая прямоугольные $\triangle BCD$ и $\triangle ACB$, докажем, что $\angle BCD=\angle CAD$. Далее доказательство теоремы можно проводить двояким образом.

Рассматривая $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$, получим, что они подобны, как имеющие равные острые внутренние углы, из равенства отношений длин их сходственных сторон вытекают доказываемые равенства (1); затем рассматривая $\triangle ACD$ и $\triangle ABC$, получим, что они подобны, как имеющие общий острый внутренний угол $(\angle A)$, из равенства отношений длин их

сходственных сторон вытекают доказываемые равенства (2); наконец, рассматривая $\triangle BCD$ и $\triangle ABC$, получим, что они подобны, как имеющие общий острй внутренний угол ($\angle B$), также из равенства отношений длин их сходственных сторон вытекают доказываемые равенства (3).

По доказанному $\widehat{ACD} = \widehat{CBD} = \beta$, $\widehat{BCD} = \widehat{CAD} = \alpha$, откуда (см. рис. 48) из прямоугольных $\triangle BCD$ и $\triangle ACD$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h_c}{c_a} = \frac{c_b}{h_c} \;\Rightarrow\; (1)\,;$$

из прямоугольных $\triangle ACD$ и $\triangle ABC$ $\quad \cos\alpha = \dfrac{c_b}{b} = \dfrac{b}{c} \;\Rightarrow\; (2)\,;$

из прямоугольных $\triangle BCD$ и $\triangle ABC$ $\quad \cos\beta = \dfrac{c_a}{a} = \dfrac{a}{c} \;\Rightarrow\; (3)\,.$

Теорема 2 полностью доказана.

Следствие. Отношение квадратов длин катетов равно отношению длин их проекций на гипотенузу.

Это утверждение следует из (2) и (3) следующим образом:

$$a^2 = c \cdot c_a \;;\; b^2 = c \cdot c_b \;\Rightarrow\; \frac{a^2}{b^2} = \frac{c \cdot c_a}{c \cdot c_b} = \frac{c_a}{c_b}\,.$$

Теорема 3 (Пифагора). *В любом прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин его катетов, то есть, если a и b — длины его катетов, а c — длина его гипотенузы, то* $c^2 = a^2 + b^2$.

Доказательство

Воспользовавшись результатом предыдущей теоремы, почленно складывая равенства $a^2 = c \cdot c_a$; $b^2 = c \cdot c_b$, получим с учетом того, что $c_a + c_b = c$, $a^2 + b^2 = c \cdot (c_a + c_b) = c \cdot c = c^2$. Теорема 3 доказана.

Следствие. Имеет место равенство $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, *где α — величина острого угла прямоугольного треугольника (основное тригонометрическое тождество).*

Из определений синуса и косинуса величины острого угла прямоугольного треугольника вытекает, что

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1\,.$$

Дополнительная часть

Замечание. В п. 257 учебника [8] приводится другое доказательство теоремы Пифагора (доказательство Евклида). Там доказывается, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах (при условии, что ни один из этих квадратов не имеет общих внутренних точек с каким-либо другим из них — "пифагоровы штаны").

Теорема 4. (обратная теорема Пифагора). *Если в треугольнике сумма квадратов длин двух сторон равен квадрату длины третьей стороны, то треугольник — прямоугольный.*

Доказательство

См. п. 55 учебника [6]. Пусть в $\triangle ABC$ $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$, докажем, что $\angle C$ — прямой. Для этого рассмотрим $\triangle A'B'C'$, у которого $A'C' = AC$, $B'C' = BC$ и $\angle C'$ — прямой. Такой треугольник можно построить, выбирая на некоторой прямой точку C', откладывая на каком-нибудь ее луче с началом в точке C' отрезок $C'A' = CA$ (согласно А14 п. 2.3.0), затем проводится луч, перпендикулярный прямой $(C'A')$ (согласно следствию из У43 п. 2.3.0), на этом луче с началом в точке C' откладываем отрезок $C'B' = CB$, соединяем отрезком точки A' и B'. $\triangle A'B'C'$ — прямоугольный с прямым углом $\angle C'$, в силу теоремы Пифагора $|A'B'|^2 = |A'C'|^2 + |B'C'|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2 \Leftrightarrow |A'B'| = |AB|$. Получили, что $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (по трем сторонам), следовательно, $\angle C = \angle C'$, а потому $\angle C$ — прямой и $\triangle ABC$ — прямоугольный. Теорема 4 доказана.

Замечание. Утверждение обратной теоремы Пифагора можно получить и из теоремы косинусов (см. ниже, вопрос 13).

Вопрос 11. Свойство отрезков, на которые биссектриса треугольника делит противоположную сторону

Основная часть

Определения треугольника и биссектрисы угла треугольника см. соответственно в вопросе 1 и 3.

Теорема 1. Если в треугольнике ABC проведена биссектриса угла A, AD, то она делит противолежащую вершине A сторону BC на отрезки BD и DC, пропорциональные прилежащим вершине A сторонам AB и AC, то есть $\dfrac{|AB|}{|BD|} = \dfrac{|AC|}{|CD|} \Leftrightarrow \dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|BD|}{|CD|}$, $D \in BC$.

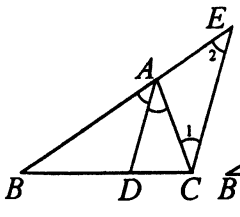


рис. 49 а)

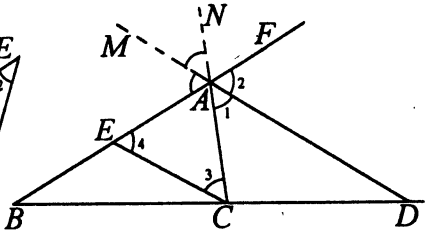


рис. 49 б)

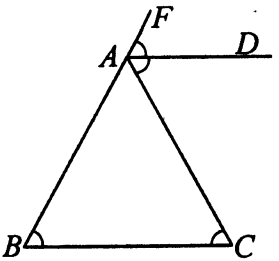


рис. 49 в)

Доказательство

См. рис. 49 а). Через точку C проведем прямую $(CE) \parallel (AD)$, E точка пересечения прямых (CE) и (BA). Такая точка E существует в силу параллельности (AD) и (CE), того что $A \equiv (AD) \cap (BE)$ и следствия из аксиомы параллельности прямых (см. вопрос 5). В силу леммы 1 вопроса 8 так как AD — биссектриса угла A (стало быть, луч, проходящий внутри угла A, см. О29 п. 2.3.0), $D \equiv (AD) \cap (BC)$, то в силу У26 п. 2.3.0 точка D лежит между точками B и C. Следовательно, в силу леммы 1 вопроса 8 точка A лежит между точками B и E. В силу леммы 2 вопроса 8 $\triangle BAD \sim \triangle BEC$, потому в силу следствий из указанной леммы $|BD| : |DC| = |BA| : |AE|$. В силу свойств параллельности прямых вытекает, что $\angle ACE \doteq \angle CAD$ как внутренние накрест лежащие при $(CE) \parallel (AD)$ и секущей (AC), $\angle BAD = \angle BEC$ как соответственные при $(CE) \parallel (AD)$ и секущей (BE). По условию $\angle BAD = \angle CAD$, следовательно в силу свойства транзитивности отношения равенства углов $\angle ACE = \angle AEC$, а потому в силу признака равнобедренного треугольника $\triangle CAE$ — равнобедренный, у которого $AC = AE$, откуда $|AC| = |AE|$. Следовательно, в силу равенства $|BD| : |DC| = |BA| : |AE|$ получаем равенства

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CD|} \Leftrightarrow \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|CD|}.$$

Теорема 1 доказана.

Дополнительная часть

Докажем теперь теорему, выражающую аналогичное свойство биссектрисы внешнего угла треугольника.

Теорема 2. Если в треугольнике ABC стороны AB и AC не равны, то биссектриса AD его внешнего угла A пересекает прямую (BC) в точке D, являющейся внешней точкой отрезка BC такой, что расстояния от точки D до точек A и C пропорциональны длинам сторон AB и AC, то есть

$$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AC|} \Leftrightarrow \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CD|}.$$

Если же $AB = AC$, то биссектриса внешнего угла A параллельна BC.

Доказательство

См. рис. 49 б). Пусть для определенности $AB > AC$ (случай $AB < AC$ рассматривается аналогично). Отложим на луче AB отрезок $AE = AC$ (на основании А14 п. 2.3.0), поскольку $AC < AB$, то и $AE < AB$, следовательно, точка E лежит между точками A и B, соединим отрезком точки E и C. В $\triangle EAC$ $EA = AC$, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$ (как углы при основании равнобедренного треугольника). Через точку A (в плоскос-

ти (BAC)) (на основе А22 п. 2.3.0) проведем прямую $(AD) \parallel (CE)$. Рассмотрим луч AD с вершиной в точке A прямой (AD) , лежащий в той же полуплоскости относительно прямой (AB) , что и луч EC . Поскольку точка E лежит между точками A и B , то она отлична от точки B , следовательно она лежит на прямой $(AB) \not\equiv (BC)$, а потому она не лежит на прямой (BC) . Стало быть, точка C — точка пересечения прямых (CE) и (CB) , а потому прямая $(AD) \parallel (CE)$ (на основании следствия из аксиомы параллельности прямых (см. вопрос 5)) *пересечет* прямую (BC) в некоторой точке D . В силу леммы 1 вопроса 8 так как точка E на луче BA лежит между точками B и A , и $(CE) \parallel (AD)$, то точка D находится *на луче* BC и точка C лежит между точками B и D на этом луче, а точка B не лежит между точками C и D . Последний вывод означает, что точки C и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой (AB) , в силу У20 п. 2.3.0 в этой же полуплоскости будут лучи AD и AC . Итак, луч BD лежит в одной полуплоскости относительно прямой (AB) , что и луч BC . Луч AF является дополнительным по отношению к лучу BA . Так как точки B и D лежат на разных полупрямых прямой (BD) относительно точки C , то они будут и в разных полуплоскостях относительно прямой (AC) . В силу У20 п. 2.3.0 в той из них, где точка B, будет и луч AB, следовательно, в другой из них будет луч AF , а потому точки F и D будут в одной полуплоскости относительно прямой (AC) . Стало быть, в одной полуплоскости относительно прямой (AC) будут и лучи CD и AF. Следовательно, луч AD лежит во внутренней области $\angle CAF$.

Поскольку E — точка пересечения прямых (AB) и (CE) , то в силу $(AD) \parallel (CE)$ точка $A \equiv (AD) \cap (AB)$. $\angle 1 = \angle 3$ как внутренние накрест лежащие при $(CE) \parallel (AD)$ и секущей (AC) . Поскольку лучи AB и AF взаимно дополнительные, то они лежат в разных полуплоскостях относительно прямой (AD) , следовательно $\angle 2 = \angle 4$ как соответственные при $(CE) \parallel (AD)$ и секущей (FB) . Так как $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle 3 = \angle 4$. Таким образом, луч AD — биссектриса $\angle CAF$ — внешнего угла $\triangle ABD$.

Замечание 1. Если провести биссектрису угла CAF , а затем через точку C прямую, параллельную этой биссектрисе, то в силу единственности биссектрисы угла (см. У44 п. 2.3.0) и прямой, проходящей через точку и параллельной данной прямой, эта биссектриса пересечет прямую (BC) в точке D такой, что точка C лежит между точками B и D .

Замечание 2. Аналогично, если $AB < AC$, то биссектриса угла BAN должна будет пересечь прямую (BC) в точке , между которой и точкой C лежит точка B . Указанная биссектриса будет параллельна прямой, проходящей через точку B , пересекающей сторону AC .

В силу леммы 2 вопроса 8 $\triangle BEC \sim \triangle BAD$, а потому

$$\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|BD|}{|CD|} \Leftrightarrow \{AE = AC\} \Leftrightarrow \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CD|}.$$

См. рис. 49 в). Если $AB = AC$, то $\angle ABC = \angle ACB$, проводя через точку A прямую, параллельную (BC), применяя свойства параллельных прямых, получим, что $\angle CAD = \angle DAF$.

Замечание 3. Если провести биссектрису угла CAF, а затем через точку A прямую, параллельную (BC), то по доказанному она будет биссектрисой $\angle CAF$. В силу единственности биссектрисы угла (см. У44 п. 2.3.0) и прямой, проходящей через точку и параллельной данной прямой, эта биссектриса будет параллельна прямой (BC). Теорема 2 полностью доказана.

Вопрос 12. Свойства средней линии треугольника. Свойства средней линии трапеции

Вводная часть

Определение 1. **Трапецией** *называется четырехугольник,* * *у которого по крайней мере две стороны параллельны.*

Из этого определения вытекает, что параллелограмм является трапецией (то есть # — частный случай трапеции). См. рис. 50 а), б).

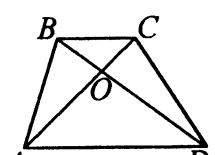


рис. 50 а)

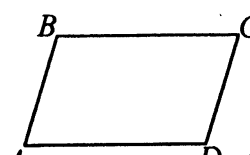


рис. 50 б)

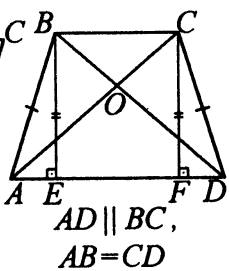


рис. 50 в)

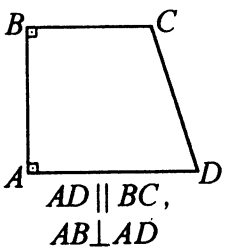


рис. 50 г)

Параллельные стороны трапеции называются ее **основаниями**, *а две другие стороны — ее* **боковыми сторонами**.

Если боковые стороны трапеции равны, но не параллельны, то она называется **равнобедренной (равнобокой или равнобочной)**. См. рис. 50 в).

Если трапеция имеет хотя бы один прямой угол, то она называется **прямоугольной**. См. рис. 50 г).

Так как (см. доказательство теоремы 11 вопроса 7) все отрезки с концами на основаниях трапеции, которые лежат на прямых, перпендикулярных

---

* Напомним, что под термином "четырехугольник" мы понимаем простой многоугольник с четырьмя сторонами, определение простого четырехугольника см. выше, в вопросе 6 определения 1, 1А, 1Б, 2 и замечания после определения 2.

этим основаниям, равны между собой, то можно определить *высоту* трапеции, как любой такой отрезок.

Теорема 1. Трапеция — выпуклый четырехугольник.

Доказательство

Пусть у четырехугольника $ABCD$ $AD \parallel BC$, тогда в силу У20 п. 2.3.0 и вывода из определения 2 вопроса 5 все внутренние точки отрезков AB и DC будут располагаться в плоскости четырехугольника $ABCD$ как по одну сторону от прямой (AD), так и по одну сторону от прямой (BC), а также весь отрезок BC (весь отрезок AD) будет располагаться по одну сторону от прямой (AD) (по одну сторону от прямой (BC)). Далее поскольку в силу простоты четырехугольника $ABCD$ его стороны AB и CD не пересекаются, поэтому ни одна из вершин каждого из отрезков AB и CD не является внутренней точкой или вершиной другого из них. В силу параллельности прямых (BC) и (AD) сумма углов CBA и BAD равна развернутому углу, а потому каждый из них — неразвернутый угол первого типа (то есть меньше развернутого угла), следовательно, точки C и D, лучи AD и BC, а потому и отрезки AD и BC целиком расположены по одну сторону от прямой (AB). По аналогичной причине лучи DA и CB, а потому и отрезки DA и CB, целиком расположены по одну сторону от прямой (CD), следовательно четырехугольник $ABCD$ целиком расположен по одну сторону относительно прямой, содержащей любую из его сторон, а потому он — выпуклый.

Следствие. В силу теоремы 1 вопроса 7 диагонали трапеции (как отрезки) пересекаются и точка их пересечения находится во внутренней области трапеции.

Теорема 2. У равнобедренной трапеции внутренние углы при каждом из оснований равны и диагонали равны.

Доказательство

Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$, у которой $AD \parallel BC$ и $AB = CD$ (см. рис. 50 в). Пусть $BE \perp AD$ и $CF \perp AD$, в силу теоремы 11 вопроса 7 $BE = CF$, а потому по катету и гипотенузе $\triangle ABE = \triangle DCF$. Следовательно, $\angle BAD = \angle CDA$, а потому и $\angle ABC = \angle DCB$. Если провести в этой трапеции диагонали AC и BD, то рассматривая $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$, у которых $AB = CD$, AD — общая сторона $\angle BAD = \angle CDA$, получим, что они равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AC = BD$.

Замечание. В справочной литературе (см., например [13] и [16]) можно еще найти материал о важных свойствах трапеции. Ниже, в основной части этого ворпроса мы докажем теорему, традиционно приводимую в учебной литературе, о свойствах средней линии трапеции.

Основная часть

Определения треугольника и трапеции см. соответственно в вопросе 1 и вводной части данного вопроса.

Определение 2. **Средней линией** *треугольника называется отрезок с концами на серединах (соединяющий середины) двух его сторон.*

Определение 3. **Средней линией** *трапеции называется отрезок с концами на серединах (соединяющий середины) ее боковых сторон.*

Теорема 3. Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух каких-либо его сторон, параллельна третьей стороне и равна ее половине.

Теорема 4. Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме.

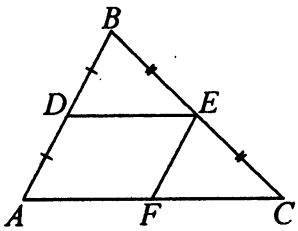


рис. 51 а)

Доказательство теоремы 3.

Формулировка теоремы 3 означает, что прямая, содержащая среднюю линию треугольника, параллельна прямой, содержащей его третью сторону.

См. рис. 51 а). Пусть в $\triangle ABC$ DE — средняя линия, которая соединяет отрезком середины D и E сторон AB и BC соответственно. Тогда по определению 2 $AD = DB$, $CE = EB$. Если провести через точку D прямую, параллельную AC , то в силу теоремы Фалеса (см. теорему 1 вопроса 8) она пересечет сторону BC также в ее середине, то есть — в точке E. Следовательно в силу А3 п. 2.3.0 эта прямая совпадет с прямой (DE), отсюда и вытекает параллельность средней линии стороне AC. Далее вторую часть теоремы можно было доказать на основе леммы 2 вопроса 8, на основании которой $\triangle BDE \sim \triangle BAC$ с коэффициентом подобия $k = 1/2$,

$$\frac{|DE|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|BA|} = \frac{|BE|}{|BC|} = \frac{1}{2} .$$

Однако в учебной литературе, например, в [8] эта теорема доказывается до изучения теории подобия фигур. Поэтому мы предложим еще один способ доказательства этой второй части. Через точку E проведем прямую, параллельную стороне AB , которая по аналогии с прямой (DE) пересечет сторону AC в точке F , где $AF = FC$. У четырехугольника $ADEF$

$DE \parallel AF$, $AD \parallel EF$, следовательно, $ADEF$ — параллелограмм. В силу равенства противоположных сторон # $DE = AF = FC = AC/2 \Rightarrow DE = AC/2$. Теорема 3 доказана.

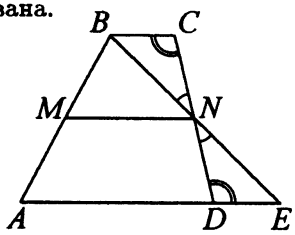


рис. 51 б)

Доказательство теоремы 4.

Формулировка теоремы 4 означает, что прямая, содержащая среднюю линию трапеции параллельна прямым, содержащим ее основания.

См. рис. 51 б). Пусть $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$, MN — ее средняя линия, которая соединяет отрезком середины M и N сторон AB и CD соответственно. Тогда по определению 3 $AM = MB$, $CN = ND$. Через точку M проведем прямую (MN), параллельную (AD) , так как $(AD) \parallel (BC)$, то в силу транзитивности свойства параллельности прямых эта прямая будет параллельна и (BC) . Так как прямые (AD) и (BC) пересекают прямую (CD) в точках D и C соответственно, то и параллельная им прямая (MN) пересечет ее в точке N . По теореме Фалеса (см. теорему 1 вопроса 8) так как $AM = MB$, то $DN = NC$. Следовательно, в силу А3 п. 2.3.0 эта прямая будет содержать среднюю линию трапецию $ABCD$, отсюда и вытекает параллельность средней линии стороне основаниям AD и BC . Первая часть теоремы 4 доказана.

Проведем прямую через точки B и N (на основании А3 п. 2.3.0). Так как точки B , C и N не лежат на одной прямой, то точка B — точка пересечения прямых (BC) и (BN) . В силу следствия из аксиомы параллельности прямых так как $(BC) \parallel (AD)$ прямая (BN) пересечет прямую (AD) в некоторой точке E . В силу выпуклости трапеции $ABCD$ (см. теорему 1) точки B и N лежат в одной полуплоскости относительно прямой (AD) . Так как $(CD) \cap (MN) \equiv N$, то точки C и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой (MN) . В силу $(MN) \parallel (AD)$ и $(MN) \parallel (BC)$ и вывода из определения 2 вопроса 5 вытекает, что и прямые (BC) и (AD) лежат в разных полуплоскостях относительно прямой (MN) , следовательно, точки B и E лежат в разных полуплоскостях относительно прямой (MN) . Так как $(BE) \cap (CD) \equiv N$, то точка N лежит между точками B и E . Аналогично поскольку $(BE) \cap (CD) \equiv N$, то точки B и E лежат в разных полуплоскостях относительно прямой (CD) , а потому (в силу У18 п. 2.3.0)

и лучи CB и DE лежат в разных полуплоскостях относительно прямой (CD) . Следовательно, $\angle NCB$ и $\angle NDE$ — внутренние накрест лежащие для прямых (CB) и (DE) и секущей (DC) . В силу выпуклости $ABCD$ точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой (CD) . Поэтому (в силу У18 п. 2.3.0) точки A и E лежат в разных полуплоскостях относительно прямой (CD). Так как точка $D \in (CD) \cap (AE)$, то она лежит между точками A и E . Далее поскольку точка N — точка пересечения прямых BE и CD , то точки C и D , а потому (в силу У20 п. 2.3.0) и лучи BC и EA находятся в разных полуплоскостях относительно прямой (BE) . Следовательно, $\angle NBC$ и $\angle NED$ — внутренние накрест лежащие для прямых (BC) и (EA) и секущей (BE) . Рассмотрим $\triangle BNC$ и $\triangle DNE$. У них $\angle BNC = \angle DNE$ как вертикальные, $\angle NCB = \angle NDE$ как внутренние накрест лежащие при $(CB) \parallel (DE)$ и секущей (CD) , $CN = ND$ по условию. Следовательно, $\triangle BNC = \triangle DNE$ по двум сторонам и углу между ними, а потому $BN = NE$ и $BC = DE$ как стороны, лежащие против соответственно равных углов. Таким образом, для $\triangle ABE$ MN — средняя линия, а поэтому по теореме 2 $MN =$
$= AE/2 = (AD + DE)/2 = (AD + BC)/2$. Теорема 4 полностью доказана.

Замечание 1. При доказательстве теоремы 4 мы нигде не использовали параллельность или не параллельность боковых сторон трапеции AB и CD . В случае $AB \parallel CD$ вытекало бы, что $AM = MB = AB/2 = CD/2 = CN = ND$, откуда в силу $AM \parallel DN$, $MB \parallel NC$ следовало, что $AMND$ и $MBCN$ — параллелограммы, а потому $AD \parallel MN \parallel BC$ и $AD = MN = BC = (AD + BC)/2$.

Замечание 2. Поскольку применительно к параллелограмму верна и теорема о площади трапеции (она равна произведению длины средней линии трапеции на длину ее высоты), то естественно считать параллелограмм частным случаем трапеции, что не во всех учебниках принято.

Вопрос 13. Теорема косинусов для треугольника

Основная часть

Определения треугольника и косинуса величины угла в треугольнике см. соответственно в вопросе 1 и дополнительной части вопроса 9.

Теорема. В произвольном треугольнике квадрат длины стороны равен сумме квадратов длин двух других сторон минус удвоенное произведение длин этих сторон на косинус величины угла между ними.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma ,$$

где γ — величина угла, противолежащего стороне с длиной c , a и b — длины других сторон треугольника.

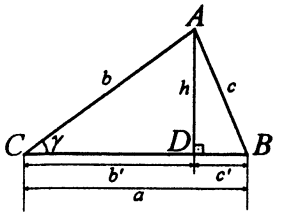


рис. 52 а)

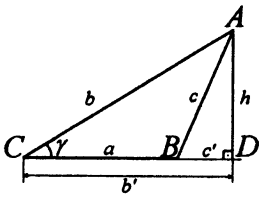


рис. 52 б)

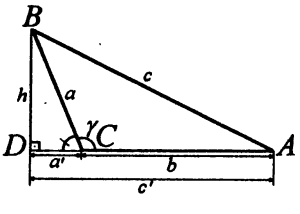


рис. 52 в)

Доказательство

Пусть в $\triangle ABC$ $\gamma = \widehat{ACB}$. Рассмотрим четыре случая. Отметим, что на рис. 52 а), б), в) обозначения a , b , c , a' , b' , c' , h означают длины соответствующих отрезков.

См. рис. 52 а). $\angle C$ и $\angle B$ — острые, тогда основание высоты AD $\triangle ABC$, проведенной из вершины A на прямую (CB) , лежит на стороне CB . Это доказывается точно также, как и теорема 1 в вопросе 10. Из прямоугольного $\triangle ADB$ по теореме Пифагора $h^2 = c^2 - (c')^2$, а так как точка D лежит между точками B и C , то $c' = a - b'$. С другой стороны, из прямоугольного $\triangle ACD$ по теореме Пифагора $h^2 = b^2 - (b')^2$ и по определению косинуса величины острого угла (см. дополнение вопроса 9) $b' = b\cos\gamma$. Следовательно,
$c^2 - (a - b')^2 = b^2 - (b')^2 \Leftrightarrow c^2 - a^2 + 2ab' - (b')^2 = b^2 - (b')^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab' = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

См. рис. 52 б). $\angle C$ — острый, $\angle B$ — тупой, тогда смежный с ним $\angle ABD$ — острый. В силу теоремы 3 вопроса 4 основание D высоты AD $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$, проведенной из вершины A на прямую (CB) , лежит на *луче* BD , дополнительном лучу BC . Следовательно, точка B лежит между точками C и D . Из прямоугольного $\triangle ACD$ по теореме Пифагора $h^2 =$
$= b^2 - (b')^2$, а так как точка B лежит между точками C и D , то $c' = b' - a$. По определению косинуса величины острого угла (см. дополнение вопроса 9) $b' = b\cos\gamma$. С другой стороны, из прямоугольного $\triangle ABD$ по теореме Пифагора $h^2 = c^2 - (c')^2$. Следовательно, $b^2 - (b')^2 = c^2 - (c')^2 \Leftrightarrow c^2 =$
$= (c')^2 + b^2 - (b')^2 \Leftrightarrow c^2 = (b' - a)^2 + b^2 - (b')^2 = (b')^2 + a^2 - 2ab' + b^2 - (b')^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

См. рис. 52 в). $\angle C$ — тупой, тогда смежный с ним $\angle BCD$ — острый и $\angle A$ — острый. В силу теоремы 3 вопроса 4 основание D высоты BD $\triangle ABC$ и $\triangle CBD$, проведенной из вершины B на прямую (AC) , лежит на *луче* CD , дополнительном лучу CA . Следовательно, точка C лежит между точками A и D . Из прямоугольного $\triangle CBD$ по теореме Пифагора $h^2 =$
$= a^2 - (a')^2$, а так как точка C лежит между точками A и D , то $c' =$
$= a' + b$. По определению косинуса величины острого угла и соотношению

между косинусами величин смежных углов (см. дополнение вопроса 9) $b' = b\cos(180^\circ - \gamma^\circ) = -b\cos\gamma^\circ = -b\cos\gamma$. С другой стороны, из прямоугольного $\triangle ABD$ по теореме Пифагора $h^2 = c^2 - (c')^2$. Следовательно, $a^2 - (a')^2 = c^2 - (c')^2 \Leftrightarrow c^2 = (c')^2 + a^2 - (a')^2 \Leftrightarrow c^2 = (a' + b)^2 + a^2 - (a')^2 = (a')^2 + 2ab' + b^2 + a^2 - (a')^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Если $\angle C$ — прямой, то по теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$. Так как $\cos\gamma = 0$ $(\gamma = \widehat{C} = 90^\circ)$, то равенство $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ будет справедливо и в этом случае. Теорема косинусов полностью доказана.

Следствие. С помощью теоремы косинусов можно доказать свойство 6 параллелограмма (см. вопрос 7, теорему 4). Сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон.

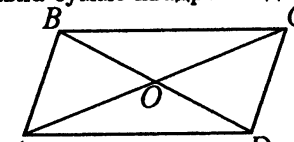


рис. 52 г)

Доказательство

См. рис. 52 г). В силу свойств параллелограмма (см. теорему 4 вопроса 7) $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ$, $|AD| = |BC|$, $|AB| = |CD|$. По теореме косинусов для треугольников ABC и ABD

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB| \cdot |BC| \cdot \cos(\widehat{B}) ,$$

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2|AB| \cdot |AD| \cdot \cos(\widehat{A}) .$$

Складывая почленно эти равенства, с учетом $|AD| = |BC|$, $|AB| = |CD|$ и $\cos(\widehat{B}) = -\cos(\widehat{A})$ получим: $|AC|^2 + |BD|^2 = |AB|^2 + |AB|^2 + |BC|^2 + |AD|^2 = |AB|^2 + |CD|^2 + |BC|^2 + |AD|^2$. Следствие доказано.

Дополнительная часть

Выше, в вопросе 10 отмечалось, что справедливость обратной теоремы Пифагора можно получить и из теоремы косинусов. Это получается следующим образом: если a , b , c — длины сторон треугольника, и γ — величина угла между сторонами длин a , b (или угла, противолежащего стороне с длиной c), то по теореме косинусов для этого треугольника $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ и равенства $c^2 = a^2 + b^2$ получаем, что так как $a > 0$ и $b > 0$ $\cos\gamma = 0$. Следовательно, $\gamma = 90^\circ$, а потому угол между сторонами длин a , b — прямой, следовательно треугольник — прямоугольный.

Замечание 1. В учебнике [6] доказательство теоремы косинусов проводится с использованием метода координат. При этом используется формула расстояния между точками на координатной плоскости, которая выводится с использованием теоремы Пифагора. Эта формула доказывается ниже, в вопросе 15.

Замечание 2. В учебнике [5] теорема косинусов доказывается векторным методом с использованием свойств скалярного произведения двух векторов. При этом само скалярное произведение двух векторов *по определению* вводится в виде формулы в самом низу стр.15 данной книги, а не как произведение длин этих векторов на косинус величины угла между ними. Если определять скалярное произведение векторов традиционно, как произведение длин этих векторов на косинус величины угла между ними, доказать свойства линейных операций над векторами, только затем рассматривать векторы в декартовой прямоугольной системе координат, то именно на основе доказанной иным способом теоремы косинусов (например, как проведено выше) *можно доказать* указанную формулу для скалярного произведения векторов в декартовой прямоугольной системе координат.

Вопрос 14. Теоремы о пересечении медиан, пересечении биссектрис и пересечении высот треугольника

Вводная часть

Определение треугольника см. в вопросе 1.

Для доказательства указанных теорем нам потребуется доказать ряд вспомогательных утверждений: лемму и теоремы.

Лемма. *Отрезок, соединяющий вершину треугольника с какой-либо точкой противолежащей ей стороны лежит во внутренней области этого треугольника. Отрезок, соединяющий вершину треугольника с какой-либо точкой, лежащей на прямой, которая содержит противолежащую указанной вершине сторону этого треугольника, но являющейся внешней точкой этой стороны, лежит во внешней области этого треугольника.*

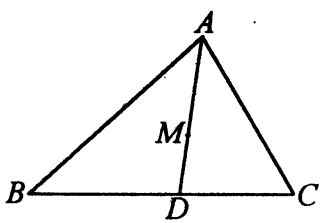


рис. 53 а)

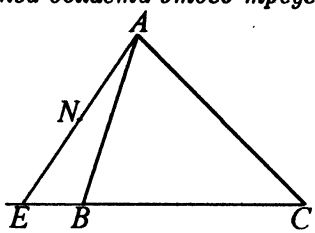


рис. 53 б)

Доказательство

См. рис. 53 а). Пусть в $\triangle ABC$ D — точка, лежащая на стороне BC (то есть эта точка — внутреняя точка отрезка BC), докажем, что всякая внутренняя точка M отрезка AD — является внутренней точкой $\triangle ABC$. Так как концы отрезка AD лежат на сторонах как $\angle ABC$, так и $\angle BCA$, а поскольку это внутренние углы треугольника, то они — неразвернутые углы первого типа. Следовательно, в силу У24 п. 2.3.0, все внутренние

точки отрезка AD находятся во внутренних областях $\angle ABC$ и $\angle BCA$. Поскольку луч AD пересекает отрезок BC в точке D, концы которого B и C лежат на сторонах $\angle BAC$, в силу У26 п. 2.3.0 он лежит во внутренней области $\angle BAC$, а потому и все внутренние точки отрезка AD находятся во внутренней области $\angle BAC$. В силу замечания вводной части вопроса 1 об эквивалентности определений внутренней точки треугольника мы и получаем, что все внутренние точки отрезка AD находятся во внутренней области треугольника. Первая часть леммы доказана.

См. рис. 53 б). Пусть E — внешняя точка стороны BC треугольника ABC, тогда концы отрезка AE лежат на сторонах $\angle ABE$ — смежного с $\angle ABC$, то есть внешнего угла $\triangle ABC$. В силу У24 п. 2.3.0 все внутренние точки отрезка AE находятся во внутренней области $\angle ABE$, которая не имеет общих точек с внутренней областью $\angle ABC$ (см. У28 п. 2.3.0, его следствия и замечание после них), а потому все внутренние точки отрезка AE и точка E находятся во внешней области $\triangle ABC$. Лемма полностью доказана.

Напомним определения серединного перпендикуляра к отрезку, медианы, биссектрисы и высоты треугольника.

Определение 1. **Серединным перпендикуляром к отрезку** *называется прямая, проходящая через середину отрезка и перпендикулярная ему* (см. также определение 1 вопроса 4).

Определение 2. **Медианой** *треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противолежащей ей стороны треугольника* (см. также определение 2 вопроса 3).

Определение 3. **Биссектрисой** *треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок биссектрисы внутреннего угла треугольника, соединяющий эту вершину с точкой на противолежащей ей стороне* (стало быть, она делит угол при этой вершине на два равных угла, см. также определение 3 вопроса 3)).

Определение 4. **Высотой** *треугольника, опущенной из данной вершины, называется* **перпендикуляр**, * *проведенный из этой вершины к прямой, которая содержит противолежащую сторону треугольника* (см. также определение 4 вопроса 3).

Теорема 1. Серединные перпендикуляры к сторонам произвольного треугольника пересекаются в одной точке.

---

* По поводу этого понятия см. определение 1, в вопроса 3.

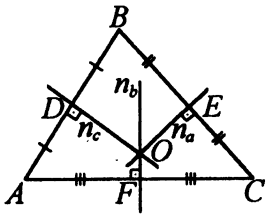


рис. 54 а)

Доказательство

Пусть в $\triangle ABC$ $AD = DB$, $BE = EC$, $CF = FA$. Через точки D и E в плоскости (ABC) проведем соответственно $n_c \perp (AB)$, $n_a \perp (BC)$ (существование и единственность этих перпендикуляров вытекает из У43 п. 2.3.0 и его следствия). Поскольку прямые (BA) и (BC) различные, точки D и E отличны от точки B , эти точки различны. Если предположить, что прямые n_a и n_c совпадают, то это будет означать, что к прямой $n_a \equiv n_c$ из точки B проведены два перпендикуляра (BD) и (BE) , что невозможно. Если предположить, что $n_a \parallel n_c$, то из $(BA) \perp n_c \Rightarrow (BA) \perp n_a$ (в силу следствия из теоремы 4 вопроса 5). Так как $(BC) \perp n_a$, точка $B \notin n_a$, то получаем, что из точки B на прямую n_a проведены два перпендикуляра: (BC) и (BA) , что также невозможно. Следовательно, остается единственная возможность, $n_a \cap n_c \equiv O$ (точку пересечения серединных перпендикуляров к сторонам BA и BC мы обозначили через O). Аналогичным образом мы докажем пересечение перпендикуляров n_c и n_b , n_a и n_b , откуда следует, что все эти перпендикуляры — различные прямые. В силу теоремы 4 вопроса 4 (свойства серединного перпендикуляра к отрезку) $OA = OB$ и $OB = OC$, в силу транзитивности отношения равенства отрезков (см. А19 п. 2.3.0) отсюда следует, что $OA = OC$. В силу теоремы 6 вопроса 4 (признака серединного перпендикуляра к отрезку) точка O лежит на серединном перпендикуляре n_b к отрезку AC . Следовательно, так как все эти перпендикуляры n_a , n_b , n_c — различные прямые, точка O их единственная общая точка (точка пересечения). Теорема 1 доказана.

Замечание. Ниже, в вопросе 19 будет доказано, что точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника — центр описанной около него окружности.

Теорема 2. Две медианы произвольного треугольника пересекаются (как отрезки).

Теорема 3. Две биссектрисы произвольного треугольника пересекаются (как отрезки).

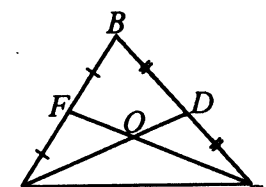


рис. 54 б)

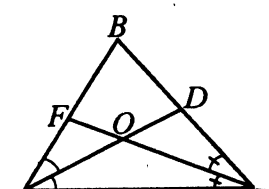


рис. 54 в)

Доказательство теоремы 2.

См. рис. 54 б). Пусть в $\triangle ABC$ AD и CF — две медианы, $BD = DC$, $AF = FB$. Так как точки D и F — середины сторон BC и AB соответственно, то в силу У37 п. 2.3.0 это внутренние точки отрезков BC и AB . Так как точка A не лежит на прямой (BC) , то луч AD пересекает отрезок BC в его внутренней точке D , а потому согласно О12 и У18 п. 2.3.0 точки B и C расположены в разных полуплоскостях относительно прямой (AD) . Далее так как точка F лежит между точками A и B , то точка A не лежит между точками F и B , а потому эти точки расположены на одном луче с началом в точке A и в силу У20 п. 2.3.0 они расположены в одной полуплоскости относительно прямой (AD) . Следовательно, в силу У18 п. 2.3.0 точки и F лежат в разных полуплоскостях относительно прямой (AD) и в силу О12 п. 2.3.0 *отрезок* CF пересекает прямую (AD) в некоторой внутренней точке $O \in CF$. Аналогичным образом доказывается пересечение *отрезка* AD и прямой (CF) . В силу единственности точки пересечения прямых (AD) и (CF) точка O — точка пересечения *отрезков* AD и CF . В силу леммы O точка, лежащая во внутренней области $\triangle ABC$. Точно также доказывается пересечение каждой из медиан AD и CF с третьей медианой $\triangle ABC$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3.

См. рис. 54 в). Пусть в $\triangle ABC$ AD и CF — биссектрисы. В силу определения биссектрисы треугольника отрезок AD лежит на луче AD (с началом в точке A) , который является биссектрисой $\angle BAC$. Согласно О29 п. 2.3.0 луч AD проходит во внутренней области $\angle BAC$, а потому в силу У26 п. 2.3.0 луч AD пересечет отрезок BC в некоторой его внутренней точке D. Аналогичным образом луч CF (с началом в точке C) пересечет отрезок AB в некоторой его внутренней точке F . Далее доказательство проводится точно так же (буквально дословным повторением), что и доказательство теоремы 2. Таким же образом доказывается пересечение каждой из биссектрис AD и CD с третьей биссектрисой $\triangle ABC$. Точно так же, как и в теореме 2 на основе леммы убеждаемся, что точка пересечения биссектрис треугольника лежит в его внутренней области. Теорема 3 доказана.

Основная часть

См. выше формулировки треугольника, его медиан, биссектрис и высот.

Теорема 4. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану на отрезки, длины которых относятся как $2:1$ *, считая от вершины, из которой она проведена.*

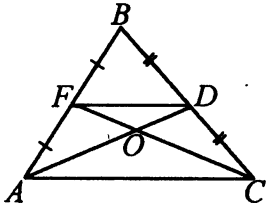


рис. 54 г)

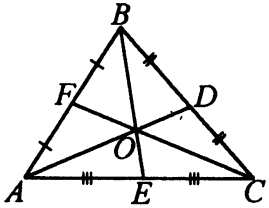


рис. 54 д)

Доказательство

См. рис. 54 г). Рассмотрим в $\triangle ABC$ медианы AD и CF. По доказанному в теореме 2 вводной части этого вопроса они (как отрезки) пересекаются в некоторой точке O. Соединим отрезком точки D и F. Поскольку AD и CF — медианы, точки D и F — середины сторон BC и AB, а потому DF — средняя линия $\triangle ABC$. В силу теоремы 3 вопроса 12 $DF \parallel AC$ и $|DF| : |AC| = 1:2$. Так как $(DF) \parallel (AC)$ и точки C и F (а потому в силу У20 п. 2.3.0 и лучи AC и DF) находятся в разных полуплоскостях относительно прямой (AD) $\angle ADF$ и $\angle DAC$ — внутренние накрест лежащие углы при $(DF) \parallel (AC)$ и секущей (AD), а в силу свойств параллельных прямых $\angle ADF = \angle DAC$. Аналогичным образом показывается, что $\angle DFC$ и $\angle FCA$ — внутренние накрест лежащие углы при $(DF) \parallel (AC)$ и секущей (CF), следовательно, $\angle DFC = \angle FCA$. Итак, $\triangle FOD \sim \triangle AOC$ (по двум углам). Следовательно,

$$\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|CO|}{|OF|} = \frac{|AC|}{|FD|} = \frac{2}{1} \Rightarrow |AO| = \frac{2|AD|}{3}.$$

Аналогичным образом, проводя третью медиану BE мы докажем, что она пересечется, например, с медианой AD в такой точке O', что $|AO'| = 2|AD| : 3$. Следовательно, $|AO'| = |AO| \Rightarrow AO' = AO$, в силу А13 п. 2.3.0 точки O и O' совпадают. Итак, все три медианы $\triangle ABC$: AD, BE, CF пересеклись о точке O (см. рис. 54 д) и

$$\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|CO|}{|OF|} = \frac{|BO|}{|OE|} = \frac{2}{1}.$$

В силу леммы точка O — внутреняя точка $\triangle ABC$. Теорема 4 полностью доказана.

Теорема 5. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

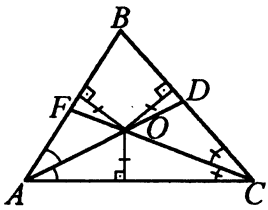


рис. 54 е)

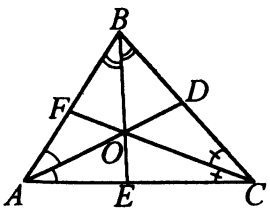


рис. 54 ж)

Доказательство

См. рис. 54 е). Рассмотрим в $\triangle ABC$ биссектрисы AD и CF . По доказанному в теореме 3 вводной части этого вопроса они (как отрезки) пересекаются в некоторой точке O , эта точка находится во внутренней области треугольника ABC , а потому — во внутренней области каждого из его внутренних углов. В силу теоремы 5 вопроса 4 так как лучи AD и CF — биссектрисы $\angle BAC$ и $\angle BCA$ соответственно, то $\rho(O;(AC)) = \rho(O;(AB))$ и $\rho(O;(AC)) = \rho(O;(BC))$. Следовательно, $\rho(O;(AB)) = \rho(O;(BC))$ и так как O — внутренняя точка $\angle ABC$ в силу теоремы 7 вопроса 4 O лежит на биссектрисе BE $\angle ABC$ (см. рис. 54 ж). Итак, все три биссектрисы $\triangle ABC$ AD , BE , CF пересеклись в одной и той же точке O . Отметим, что если бы мы рассматривали, например, точку O' пересечения биссектрис AD и BE , то также доказали, что она оказалась бы на биссектрисе CF . В силу единственности биссектрис углов (см. У44 п. 2.3.0) и единственности точки пересечения прямых точки O и O' совпадут. В силу леммы точка O — внутреняя точка $\triangle ABC$. Теорема 5 полностью доказана.

Замечание. Ниже, в вопросе 22 будет доказано, что точка пересечения биссектрис углов треугольника — центр вписанной в него окружности.

Теорема 6. Высоты треугольника (или содержащие их прямые) пересекаются в одной точке.

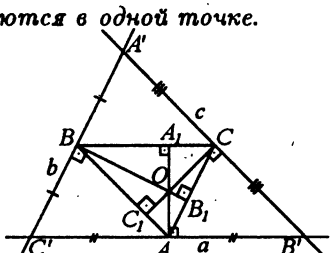


рис. 55 а)

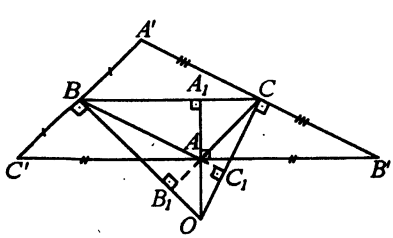


рис. 55 б)

Доказательство

См. рис. 55 а). Проведем в плоскости (ABC) через точку A прямую $a \parallel (BC)$, через точку B прямую $b \parallel (AC)$ и через точку C прямую

$c \parallel (AB)$. Докажем, что любые две из этих прямых пересекаются. Рассмотрим прямые a и b . Прямые a и b не совпадают, так как точка $B \notin a$, но $B \in b$. Если предположить, что $b \parallel a$, то в силу транзитивности свойства параллельности прямых $(AC) \parallel b$, $b \parallel a$, $a \parallel (BC) \Rightarrow (AC) \parallel (BC)$, что противоречит пересечению прямых (AC) и (BC) в точке C . Итак, прямые a и b пересекаются в точке C' . Аналогично доказывается, что прямые a и c пересекаются в точке B' , и прямые b и c пересекаются в точке A' .

Замечание. В дополнительной части этого вопроса будет доказано, что все точки A' , B' , C' — различные ; точка A' и прямая $a \equiv (B'C')$ будут расположены в разных полуплоскостях относительно прямой (BC) ; точка B' и прямая $b \equiv (A'C')$ будут расположены в разных полуплоскостях относительно прямой (AC) ; точка C' и прямая $c \equiv (A'B')$ будут расположены в разных полуплоскостях относительно прямой (AB) , то есть действительно имеет место то, что изображено на рис. 55 а) и б).

В четырехугольнике $C'BCA$ $C'B \parallel AC$, $C'A \parallel BC$, следовательно, $C'BCA$ — параллелограмм, а потому $C'A = BC$. В четырехугольнике $ABCB'$ $BC \parallel AB'$, $AB \parallel B'C$, следовательно, $ABCB'$ — параллелограмм, а потому $AB' = BC$. Из $C'A = BC$ и $AB' = BC$ вытекает $C'A = AB'$, то есть точка A — середина отрезка $C'B'$. Аналогично доказывается, что $C'B = BA'$ и $A'C = CB'$, то есть точка B — середина отрезка $A'C'$ и точка — середина отрезка $A'B'$. Серединный перпендикуляр к отрезку $B'C'$ будет перпендикулярен и к параллельной ему прямой (BC) (в силу следствия из теоремы 4 вопроса 5), по той же причине серединный перпендикуляр к отрезку $A'B'$ будет перпендикулярен и к параллельной ему прямой (AB) , серединный перпендикуляр к отрезку $A'C'$ будет перпендикулярен и к параллельной ему прямой (AC) . В силу теоремы 1 серединные перпендикуляры к сторонам $\triangle A'B'C'$ пересекаются в одной точке O , которая и будет точкой пересечения прямых, содержащих высоты $\triangle ABC$. Теорема 6 доказана.

Определение 5. Точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника называется **ортоцентром** *этого треугольника.*

Дополнительная часть

Докажем утверждение, сформулированное в замечании при доказательстве теоремы 6. См. рис. 55 а) и б). Проведем через точку A прямую, a , параллельную прямой (BC) и на каждом из лучей этой прямой с началом в точке A отложим отрезки $AC' = BC$ и $AB' = BC$ (в соответствии с А14 п. 2.3.0). Так как точки B' и C' расположены на разных полупрямых прямой a относительно точки A , то в силу У20 п. 2.3.0 эти точки будут и в разных полуплоскостях относительно прямой (AC) . Пусть точка B будет в одной полуплоскости с точкой C' относительно прямой (AC) , тогда отрезок BC'

не будет пересекать прямую (AC) , следовательно не будут иметь общих точек множества внутренних точек вместе с их концами отрезков (AC) и (BC') . Проведем прямую (BC') , так как по построению $(AC') \parallel (BC)$, то точка $B \notin (AC')$, следовательно, так как $B \in (BC')$, прямые (AC') и (BC') различные, C' — точка их пересечения. Из проведенных рассуждений и построений вытекает, что четырехугольник $AC'BC$ — простой, у которого $BC \parallel AC'$ и $BC = AC'$. Следовательно в силу теоремы 5 вопроса 7 и замечания к ней в дополнительной части этого вопроса четырехугольник $AC'BC$ — параллелограмм, а потому $(BC') \parallel (AC)$ и $BC' = AC$. В силу вывода из определения 2 вопроса 5 прямая (BC') лежит в одной полуплоскости относительно прямой (AC) , той, в которой лежит точка C' , а потому точка B' лежит с прямой BC' в разных полуплоскостях относительно прямой (AC) . Далее в параллелограмме $C'BCA$ диагонали AB и $C'C$ пересекаются как отрезки (см. следствие из теоремы 3 вопроса 7), поэтому точки C и C' лежат в разных полуплоскостях относительно прямой (AB) . Так как точка A лежит между точками C' и B' на прямой $(C'B')$ и она является точкой пересечения прямых $(C'B')$ и (AB) , то точки C' и B' также лежат в разных полуплоскостях относительно прямой (AB) . Следовательно, точки B' и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой (AB) . Проводя прямую (CB') , мы аналогичным образом докажем, что $B'CBA$ — параллелограмм, откуда $(CB') \parallel (AB)$. В силу вывода из определения 2 вопроса 5 прямая $(B'C)$ лежит в одной полуплоскости относительно прямой (AB) , той, в которой лежит точка B' , а потому точка C' лежит с прямой $(B'C)$ в разных полуплоскостях относительно прямой (AB). Итак, $(BC') \parallel (AC)$, $(CB') \parallel (AB)$, в силу аксиомы параллельности прямых $(BC') \equiv b$, $(CB') \equiv c$, где b и c те самые прямые, которые были построены выше, в основной части этого вопроса при доказательстве теоремы 6. Стало быть, именно построенные точка $C' \equiv b \cap a$ и $B' \equiv c \cap a$. Пусть $A' \equiv b \cap c$. Докажем, что точки A' и B' — различные и точки A' и C' — различные. Если предположить, что, например, $A' \equiv B'$, то так как $A' \in b$, получилось бы, что через различные (по построению) точки C' и B' проходят две *различные* прямые a и b , а это противоречит А3 п. 2.3.0 Следовательно, точки A' и B' — различные. Аналогично от противного доказывается, что точки A' и C' — различные. Точка $A' \notin (B'C')$, так как в противном случае в силу А3 п. 2.3.0 прямые b и a совпали бы, что неверно. Следовательно, A', B' и C' — точки, не лежащие на одной прямой, а потому они являются вершинами $\triangle A'B'C'$. Точка A' не лежит на прямой (BC) . В противном случае, предположив, что точка A' лежит на луче BC (это означает, что $A \not\equiv B$), в силу А3 п. 2.3.0 мы получили бы, что прямые b и (BC) совпадут, откуда следует $b \parallel a$, а это противоречит

тому, что прямые a и b пересекаются в точке C'. Если предположить, что точка A' лежит на луче CB (это означает, что $A \not\equiv C$), в силу А3 п. 2.3.0 мы получили бы, что прямые c и (BC) совпадут, откуда следует $c \parallel a$, а это противоречит тому, что прямые a и c пересекаются в точке B'. Таким образом, точка A' отлична от каждой из точек A, B и C, а потому точки A, B, A' и C являются вершинами четырехугольника. У четырехугольника $ABA'C$ $BA' \parallel AC$ (так как прямая $b \equiv (BA') \parallel (AC)$) и $AC' \parallel AB$ (так как прямая $c \equiv (AC') \parallel (AB)$). Следовательно, $ABA'C$ — параллелограмм, откуда в силу свойств # $A'B = AC = BC' \Rightarrow A'B = BC'$ и $A'C = AB = CB' \Rightarrow A'C = CB'$. По доказанному точки A', B' и C' — различные, а потому в силу А14 п. 2.3.0 точки A' и C' лежат на разных полупрямых прямой b относительно точки B, а стало быть, и в разных полуплоскостях относительно прямой (BC). Точки C', A и B' лежат на прямой $a \parallel (BC)$, поэтому в силу вывода из аксиомы параллельнлсти прямых (см. выше, вопрос 5) эти точки лежат в одной полуплоскости (в которой находится прямая a) относительно прямой (BC). Следовательно, в силу У18 п. 2.3.0 точка A' и прямая a расположены в разных полуплоскостях относительно прямой (BC). Утверждение полностью доказано.

Теперь исследуем местоположение точки пересечения высот треугольника или прямых, содержащих его высоты, в зависимости от того, какой треугольник: остроугольный, прямоугольный или тупоугольный.

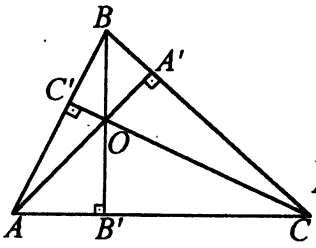


рис. 55 в)

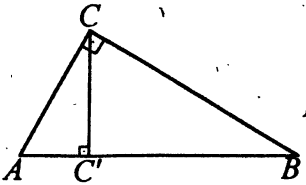


рис. 55 г)

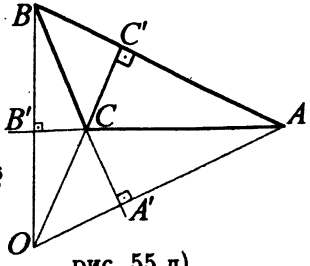


рис. 55 д)

См. рис. 55 в), случай остроугольного треугольника. В силу теоремы 3 вопроса 4 все основания перпендикуляров, проведенных в треугольнике из вершин его углов на прямые, содержащие противолежащие им стороны, лежат именно на сторонах. Аналогичным образом, как и в теоремах 2 и 3 доказывается (на основе леммы вводной части этого вопроса), что пересекутся причем в точке внутренней области этого треугольника любые две высоты (как отрезки). По доказанному в теореме 6 третья высота также пройдет через эту точку.

См. рис. 55 г), случай прямоугольного треугольника. В этом случае точкой пересечения высот треугольника является вершина его прямого уг-

ла, так как две его высоты совпадают с его катетами. Основание высоты, проведенной на гипотенузу (см. вопрос 10), является ее внутренней точкой.

См. рис. 55 д), случай тупоугольного треугольника. Так как в силу теоремы 3 вопроса 4 основания перпендикуляров, проведенные из вершин A и B $\triangle ABC$ с тупым углом C соответственно на прямые (BC) и (AC) — точки A' и B' лежат на дополнительных лучах по отношению к лучам CB и CA, то в силу первой части леммы отрезки этих перпендикуляров будут находиться во внешней области $\triangle ABC$. Если предположить, что, например, прямая (BB') имеет общую точку с внутренней областью $\triangle ABC$, то эта точка будет во внутренней области $\angle ABC$, и луч этой прямой с началом в точке B, проходящий через эту точку, окажется в этой области. В силу У26 п. 2.3.0 этот луч, а потому и прямая (BB') должна пересечь отрезок AC, что невозможно, так как она пересекает прямую (AC) во внешней точке отрезка AC. Следовательно, перпендикуляры, проведенные из вершин A и B $\triangle ABC$ на прямые, содержащие противолежащие им стороны, будут (кроме указанных вершин) лежать во внешней области этого треугольника. Следовательно, их общая точка O, будучи отличной от всех вершин $\triangle ABC$, будет в его внешней области. Рассматривая $\triangle OAB$, убеждаемся в том, что вершина C тупого угла $\triangle ABC$ является точкой пересечения высот $\triangle OAB$.

Вопрос 15. Формула для вычисления расстояния между двумя точками на координатной плоскости. Уравнение окружности

Вводная часть

Для вывода формулы расстояния между точками на координатной плоскости необходимо рассмотреть вопрос и о расстоянии между точками на числовой оси (числовой прямой или координатной прямой). Напомним определение числовой прямой (см. определение 6 п. 2.0.3).

Определение 1. Пусть на некоторой прямой a выбраны: точка O — начало отсчета, масштабный отрезок OE, где точки O и E различные, длина которого считается равной единице (единица измерения отрезков), и положительное (от точки O к точке E) и противоположное ему отрицательное направления. Тогда эту прямую называют **числовой** *или* **координатной прямой (осью).**

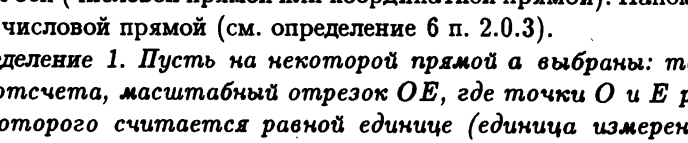


рис. 56 а)

Напомним также сформулированную в п. 2.0.3 теорему об обосновании

координатного метода на прямой, которую можно использовать на экзаменах без доказательств.

Теорема 1. Между множествами всех действительных чисел R и всех точек числовой прямой (оси) M можно установить взаимно однозначное соответствие, причем если прямая расположена горизонтально, то из двух точек M_1 и M_2 на этой прямой лежащей правее (левее) соответствует большее (меньшее) действительное число и наоборот, из двух действительных чисел большему (меньшему) из них соответствует точка на числовой прямой, лежащая правее (левее).

Действительное число x, взаимно однозначно соответствующее точке M на числовой оси, называется **координатой** *(числовой координатой) этой точки.* Обозначается $M(x)$. Точке O — началу отсчета соответствует число 0, то есть $O(0)$, точке E соответствует число 1, то есть $E(1)$ (см. рис. 56 а).

Замечание. Напомним, что возможность выбрать только *два* взаимно противоположных направления на прямой вытекает из У16 п. 2.3.0 и замечаний к нему. В замечании 3 к этому утверждению разъясняются термины расположения одной точки относительно другой точки "левее" или "правее".

Определение 2. **Расстоянием** *между двумя точками M и N или на прямой, или на плоскости, или в пространстве называется длина отрезка MN, то есть $|MN|$.* Обозначается расстояние между точками M и N $\rho(M;N)$.

Таким образом, $\rho(M;N) \stackrel{df}{=} |MN|$ и оно положительно во всех случаях кроме случая совпадения точек, когда оно равно нулю.

Отметим, что согласно У40 п. 2.3.0 $\forall a > 0$ от данной точки на данной полупрямой (то есть на полупрямой с началом в данной точке) можно отложить единственный отрезок, длина которого равна a. Если обратиться к схеме доказательства этого факта (см. [17], гл. II, ¡21, теорема 35), то можно убедиться, что если в качестве начальной точки полупрямой выступает начало отсчета O, именно точка M — $M(a)$, лежащая правее точки O, такова, что $|OM| = a$, и именно точка M' — $M'(-a)$, лежащая левее точки O, такова, что $|OM'| = a$. Точек $\tilde{M}$ на числовой оси, отличных как от M, так и от M' таких, что $|O\tilde{M}| = a$, не существует. Следовательно, если число $x \in R$ является координатой точки M на числовой оси, то $\rho(O;M) = |OM| = |x|$. Таким образом, геометрический смысл модуля действительного числа x — расстояние от точки M на числовой оси с координатой x до точки O — начала отсчета на этой оси.

Теорема 2. Пусть $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ — точки на числовой оси со своими координатами. Тогда $\rho(M_1;M_2) = |M_1M_2| = |x_2 - x_1|$.

Доказательство

Рассмотрим следующие случаи:

А) $M_1 \equiv A(a)$, $M_2 \equiv B(b)$ (см. рис. 56 а) , где точка A лежит не левее точки O на числовой оси (то есть или $A \equiv O$, или B лежит правее A), а точка B лежит правее точки O . В силу теоремы 1 $b > a \geqslant 0$. Согласно замечанию 3 к У16 и У17 п. 2.3.0 при указанных условиях при расположении точки A правее точки O эта точка будет лежать между точками O и B , а потому в силу определений суммы отрезков, длины отрезка, свойств длины отрезка (см. О21 и О24 п. 2.3.0) в рассматриваемом случае (в том числе и когда $A \equiv O$) $OB = OA + AB \Rightarrow |OB| = |OA| + |AB| \Leftrightarrow |AB| = |OB| - |OA| = |b| - |a| = b - a = |b - a| = |a - b|$.

Б) $M_1 \equiv M(x)$, $M_2 \equiv N(y)$ (см. рис. 56 а) , где точка N лежит не правее точки O на числовой оси (то есть или $N \equiv O$, или N лежит левее O), а точка M лежит левее точки N . В силу теоремы 1 $x < y \leqslant 0$. Согласно замечанию 3 к У16 и У17 п. 2.3.0 при указанных условиях при расположении точки N левее точки O эта точка будет лежать между точками O и B, а потому аналогично случаю А) в рассматриваемом случае (в том числе и когда $N \equiv O$) $OM = ON + NM \Rightarrow |OM| = |ON| + |NM| \Leftrightarrow |NM| = |OM| - |ON| = |x| - |y| = -x + y = |y - x| = |x - y|$.

В) $M_1 \equiv N(y)$, $M_2 \equiv A(a)$ (см. рис. 56 а) , где точка N лежит левее точки O на числовой оси, а точка A лежит правее точки O . В силу теоремы 1 $y < 0 < a$. Согласно замечанию 3 к У16 и У17 п. 2.3.0 при указанном расположении точек N , O и A точка O будет лежать между точками N и A, а потому согласно О21 п. 2.3.0 $NA = NO + OA \Rightarrow |NA| = |ON| + |OA| = |y| + |a| = -y + a = |a - y| = |y - a|$.

Г) $M_1 \equiv M_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ (в силу теоремы 1). При этом $\rho(M_1; M_2) \stackrel{df}{=} |M_1 M_2| \stackrel{df}{=} 0 = |x_2 - x_1|$. Теорема 2 полностью доказана.

Следующий ниже материал вводной части этого вопроса не имеет прямого к нему отношения, но он либо уже использовался ранее, например, в п. 2.2, или может быть использован ниже.

Определение 3. Отрезок AB называется **направленным**, *если он задан* **упорядоченной парой** * *точек A и B* . Обозначается $\overline{AB}$ или $\overrightarrow{AB}$. В этих обозначениях точка A первая (начальная), точка B вторая (конечная).

Определение 3'. Вектором называется направленный отрезок.

Если точки A и B различные, то направление вектора $\overrightarrow{AB}$ (от начальной точки A к конечной точке B) считается таким, при котором на выбранном направлении на прямой (AB) точка A *предшествует* точке B (по поводу понятия "предшествует" см. О11 п. 2.3.0).

---

* Пара точек считается упорядоченной, если указано, какая из них — первая, а какая из них — вторая.

Если точки A и B совпадают ($A \equiv B$), то направленный отрезок (вектор) $\overline{AA}$ или $\overrightarrow{AA}$ называется *нулевым*. Направление нулевого вектора *считается неопределенным*. Для нулевых направленных отрезков используются обозначения $\overline{0}$ или $\overrightarrow{0}$.

Для направленных отрезков (векторов) вводится понятие *длины* , имеющее такой же смысл, что и для обычного отрезка AB . Длина вектора обозначается $|\overline{AB}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$. С учетом того, что длина отрезка AB обозначалась $|AB|$, $|\overline{AB}| = |\overrightarrow{AB}| = |AB|$. Поэтому длина любого ненулевого направленного отрезка (вектора) — число положительное, а длина нулевого вектора равна нулю ($|\overline{AA}| = |\overrightarrow{AA}| = 0$).

Замечание. Отметим, что при изменении порядка концов направленного отрезка меняется на противоположное его направление. При этом сохраняется его длина, то есть если $A \not\equiv B$, то $|\overline{AB}| = |\overline{BA}|$, но направленные отрезки (векторы) $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ — различные.

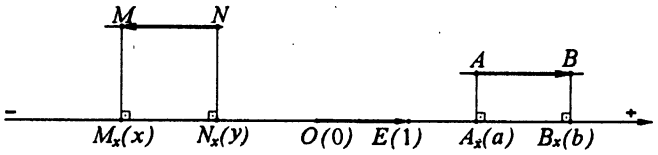


рис. 56 б)

Пусть некоторый направленный отрезок $\overline{M_1M_2}$ или лежит на числовой оси, или лежит на прямой, параллельной числовой оси. Если x_1 и x_2 — координаты точек M_1 и M_2 соответственно (в случае принадлежности числовой оси отрезка $\overline{M_1M_2}$), или x_1 и x_2 — координаты точек M_{1x} и M_{2x} , где M_{1x} и M_{2x} — основания перпендикуляров, проведенных из точек M_1 и M_2 (проекций точек M_1 и M_2) соответственно, на числовую ось.

Определение 4. **Величиной** *направленного отрезка* $\overline{M_1M_2}$ *называется число, равное* $x_2 - x_1$, *где* x_1 *и* x_2 — *координаты точек начала и конца указанного направленного отрезка (или их проекций) на числовой оси.* Величина направленного отрезка $\overline{M_1M_2}$ обозначается M_1M_2 , при этом существенен порядок точек M_1 и M_2 (в отличии от обычного отрезка M_1M_2).

Из этого определения вытекает, что при $M_1 \not\equiv M_2$ $M_1M_2 = |M_1M_2|$, если направление $\overline{M_1M_2}$ совпадает с положительным направлением числовой оси (то есть точка M_1 или ее проекция предшествует точке M_2 или ее проекции на числовую ось), и $M_1M_2 = -|M_1M_2|$, если направление $\overline{M_1M_2}$ противоположно положительному направлению (совпадает с отрицательным направлением) числовой оси (то есть точка M_2 или ее проекция предшествует точке M_1 или ее проекции на числовую ось). Если

$M_1 \equiv M_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ ($\overline{M_1M_2}$ — нулевой), то его величина равна нулю ($M_1M_1 = M_2M_2 = 0$). Если изменить порядок концов направленного отрезка, то его длина не изменится, а величина изменит знак на противоположный $M_1M_2 = -M_2M_1$, $|M_1M_2| = |M_2M_1|$.

Выше, на рис. 56 б) $AB = |AB| = |b - a| = b - a$,
$MN = -|MN| = -|y - x| = -(y - x) = x - y$, $OE = |OE| = 1 - 0 = 1$.

Основная часть

Определение 5. Если на некоторой плоскости α заданы две взаимно перпендикулярные числовые оси с общим началом отсчета (точкой O их пересечения), равными на этих осях единицами измерения отрезков (то есть единым масштабом на всей плоскости), то говорят, что на этой плоскости задана **декартова прямоугольная система координат**, *эта плоскость называется* **координатной плоскостью**, *а эти оси называются* **координатными осями**, *точка O называется* **началом координат**.

Если одна из этих осей расположена горизонтально — ось абсцисс, а другая — вертикально — ось ординат, то положительное (отрицательное) направления на них выбраны соответственно вправо (влево) и вверх (вниз) от точки O . Ось абсцисс обозначается Ox , ось ординат обозначается Oy, координатная плоскость обозначается Oxy .

Теорема 3. Между множествами всех точек M координатной плоскости и всех упорядоченных пар действительных чисел $(x; y)$ можно установить взаимно однозначное соответствие.

Схему доказательства этой теоремы мы приведем в дополнительной части к этому вопросу, там же мы рассмотрим и другие понятия, связанные с декартовой прямоугольной системой координат на плоскости, в частности, — координатных полуосей, полуплоскостей, четвертей. Сейчас мы отметим, что упорядоченную пару чисел $(x; y)$, где $x; y \in R$ называют *координатами* точки M *на плоскости*, обозначают $M(x; y)$, x — абсцисса точки M , y — ордината точки M . Точка O — начало координат имеет координаты равные нулю, то есть $O(0; 0)$ (см. рис. 57 а). Координаты точки $M(x; y)$ — координаты ее проекций *на оси абсцисс* $M_x(x)$ и *на оси ординат* $M_y(y)$ соответственно (см. рис. 57 а). Отметим, что две упорядоченные пары чисел $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ считаются совпадающими (различными), если

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \,, \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (x_2 - x_1)^2 + \\ +(y_2 - y_1)^2 = 0 \end{array} \quad \left(\begin{bmatrix} x_1 \neq x_2 \,; \\ y_1 \neq y_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (x_2 - x_1)^2 + \\ +(y_2 - y_1)^2 > 0 \end{array} \right) .$$

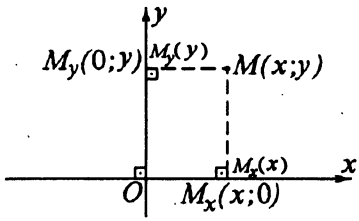


рис. 57 а)

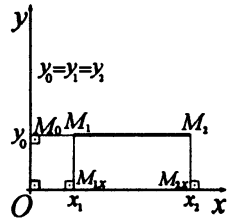


рис. 57 б)

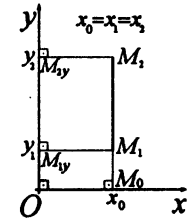


рис. 57 в)

Теорема 4. Пусть M_1 — $M_1(x_1;y_1)$; M_2 — $M_2(x_2;y_2)$, *тогда*

$$|M_1M_2| = \rho(M_1;M_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

Доказательство

Пусть точки M_1 и M_2 различные. Рассмотрим следующие случаи.

А) $(M_1M_2) \parallel Ox$ или $(M_1M_2) \in Ox$, тогда так как $Ox \perp Oy$, то в силу следствия из теоремы 4 вопроса 5 $(M_1M_2) \perp Oy$. Пусть $M_0(y_0) \equiv$ $\equiv (M_1M_2) \cap Oy$, M_0 — совпадающие проекции точек M_1 и M_2 на ось Oy, поэтому ординаты точек M_1 и M_2 равны, $y_1 = y_2 = y_0 \Rightarrow y_2 - y_1 = 0$ (см. рис. 57 б). Если отрезок $M_1M_2 \in Ox$, то в силу теоремы 2 о расстоянии между двумя точками на числовой прямой $|M_1M_2| = |x_2 - x_1|$. Если отрезок $M_1M_2 \notin Ox$, то если опустить их этих точек перпендикуляры на ось Ox , M_{1x} и M_{2x} — основания этих перпендикуляров, мы получим прямоугольник $M_{1x}M_1M_2M_{2x}$, у которого (по соответствующему свойству) стороны $M_{1x}M_{2x}$ и M_1M_2 равны, откуда и в силу теоремы 2 $|M_1M_2| = |M_{1x}M_{2x}| = |x_2 - x_1|$. Следовательно, в рассматриваемом случае:

$$\rho(M_1;M_2) = |M_1M_2| = |x_2-x_1| = \sqrt{(x_2-x_1)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+0^2} =$$
$$= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

Б) $(M_1M_2) \parallel Oy$ или $(M_1M_2) \in Oy$, тогда так как $Ox \perp Oy$, то в силу следствия из теоремы 4 вопроса 5 $(M_1M_2) \perp Ox$. Пусть $M_0(x_0) \equiv$ $\equiv (M_1M_2) \cap Ox$, M_0 — совпадающие проекции точек M_1 и M_2 на ось Ox, поэтому абсциссы точек M_1 и M_2 равны, $x_1 = x_2 = x_0 \Rightarrow x_2 - x_1 = 0$ (см. рис. 57 б). Если отрезок $M_1M_2 \in Oy$, то в силу теоремы 2 о расстоянии между двумя точками на числовой прямой $|M_1M_2| = |y_2 - y_1|$. Если отрезок $M_1M_2 \notin Ox$, то, опуская их этих точек перпендикуляры на ось Oy , M_{1y} и M_{2y} — основания этих перпендикуляров, мы получим прямоугольник $M_{1y}M_1M_2M_{2y}$, у которого (по соответствующему свойству) стороны $M_{1y}M_{2y}$ и M_1M_2 равны, откуда и в силу теоремы 2 $|M_1M_2| = |M_{1y}M_{2y}| =$ $= |y_2 - y_1|$. Следовательно, в рассматриваемом случае:

$$\rho(M_1;M_2)=|M_1M_2|=|y_2-y_1|=\sqrt{(y_2-y_1)^2}=\sqrt{0^2+(y_2-y_1)^2}=$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

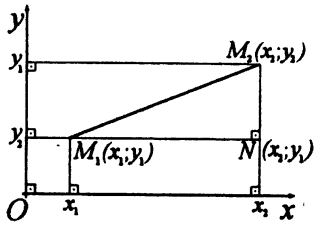


рис. 57 г)

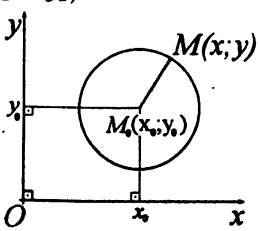


рис. 57 д)

В) $(M_1M_2)\not\parallel Ox$ и $(M_1M_2)\not\parallel Oy$ (см. рис. 57 г). Через точку M_1 проведем прямую $\ell_1\parallel Ox$ (если $M_1\in Ox$, то $\ell_1\equiv Ox$) , через точку M_2 проведем прямую $\ell_2\parallel Oy$ (если $M_1\in Ox$, то $\ell_2\equiv Oy$) . Так как $\ell_1\parallel Ox$ или $\ell_1\equiv Ox$, то в силу $Ox\perp Oy$ и следствия из теоремы 4 вопроса 5 $\ell_1\perp Oy$, а так как $\ell_2\parallel Oy$ или $\ell_2\equiv Oy$, то в силу того же следствия $\ell_1\perp\ell_2$. Следовательно, прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекутся в некоторой точке N . Эта точка N отлична как от точки M_1 , так и от точки M_2 . Предполагая противное, что, например, $N\equiv M_1$ поскольку $N\in\ell_2$, то и $M_1\in\ell_2$. А так как $M_2\in\ell_2$ и $M_1\not\equiv M_2$, то в силу А3 п. 2.3.0 $\ell_2\equiv(M_1M_2)$. Последнее обстоятельство означает, что $(M_1M_2)\parallel Oy$, что противоречит рассматриваемому случаю. Аналогично устанавливается невозможность совпадения точек M_2 и N . Пусть N — $N(x';y')$. Так как $(M_1N)\parallel Ox$, то согласно случаю А) $y'=y_1$, а так как $(M_2N)\parallel Oy$, то согласно случаю Б) $x'=x_2$, следовательно, N — $N(x_2;y_1)$. Из условий $N\not\equiv M_1$ и $N\not\equiv M_2$ соответственно вытекает, что

$$\left[\begin{array}{l}x_1\neq x_2\ ;\\ y_1\neq y_1\end{array}\right.\Leftrightarrow x_1\neq x_2\quad\text{и}\quad\left[\begin{array}{l}x_2\neq x_2\ ;\\ y_1\neq y_2\end{array}\right.\Leftrightarrow y_1\neq y_2\ .$$

Таким образом, попутно установлено, что из условий $M_1(x_1;y_1)\not\equiv M_2(x_2;y_2)$ и $M_1M_2\not\parallel Ox$, $M_1M_2\not\parallel Oy$, вытекает, что

$$\left\{\begin{array}{l}x_1\neq x_2\ ,\\ y_1\neq y_2\ .\end{array}\right.$$

Отметим, что в вопросе 5 п. 2.1 было установлено, что $(M_1M_2)\parallel Ox(Oy)\Leftrightarrow y_2=y_1(x_1=x_2)$, откуда вытекает обратное к сформулированному перед этим утверждение

$$\left\{\begin{array}{l}x_1\neq x_2\ ,\\ y_1\neq y_2\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}M_1M_2\not\parallel Ox\ ,\\ M_1M_2\not\parallel Oy\end{array}\right.$$

$\triangle M_1NM_2$ — прямоугольный, так как $(M_1N)\perp(NM_2)$, по доказанному в случаях А) и Б) $|M_1N|=|x_2-x_1|$, $|NM_2|=|y_2-y_1|$, следовательно по

теореме Пифагора для $\triangle M_1NM_2$ и в случае В) получаем, что

$$\rho(M_1;M_2)=|M_1M_2|=\sqrt{|M_1N|^2+|NM_2|^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

Осталось рассмотреть последний, простейший случай, когда $M_1\equiv M_2$. В силу теоремы 3 это означает, что координаты этих точек совпадают, то есть $x_1=x_2\Leftrightarrow(x_2-x_1)=0$ и $y_1=y_2\Leftrightarrow(y_2-y_1)=0$. Так как по определению в этом случае $\rho(M_1;M_2)=|M_1M_2|=0$, то

$$\rho(M_1;M_2)=|M_1M_2|=0=\sqrt{0}=\sqrt{0^2+0^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

Теорема 4 полностью доказана.

Уравнение окружности. Сформулируем определение окружности.

Определение 6. **Окружностью** *называется фигура, состоящая из всех точек* **плоскости**, *расположенных на равном положительном расстоянии от некоторой фиксированной точки этой плоскости. Указанная точка называется* **центром окружности**.

Радиусом *окружности называется любой отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром, а также* **радиусом** *называется* **расстояние** *(длина отрезка) от любой точки окружности до ее центра.*

Замечание. Требование положительности расстояния в определении 6 вызвано тем, что если бы это расстояние равнялось нулю (а это возможно между совпадающими точками), то тогда окружностью (с нулевым радиусом) могла быть и всего одна точка. Традиционно одну точку не принято считать окружностью.

В силу доказанной теоремы 4 о расстоянии между двумя точками на координатной плоскости и определения 6 точка $M(x;y)$ принадлежит окружности с центром в точке $M_0(x_0;y_0)$ радиуса $R>0$ тогда и только тогда, когда $\rho(M;M_0)=R$ или $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$. Следовательно, уравнение окружности с центром в точке $M_0(x_0;y_0)$ радиуса $R>0$ имеет вид (см. выше рис. 57 д) $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.
Если M_0 — $O(0;0)$, то есть $x_0=y_0=0$, то следовательно, $x^2+y^2=R^2$ — уравнение окружности радиуса R с центром в начале координат.

Дополнительная часть

Приведем схему обоснования утверждения, сформулированного в теореме 3, которое и является обоснованием введения системы декартовых прямоугольных координат на плоскости.

Первый этап. Пусть точка $M\equiv O$ — начало координат. Поставим ей в соответствие пару чисел $(0;0)$. Если точка $M\in Ox$, $M\not\equiv O$, то ей мы поставим в соответствие пару чисел $(x;0)$, где $x\in R$, $x\neq 0$ и x взаимно однозначно соответствующее точке M число на оси Ox как на числовой оси. Аналогично если точка $M\in Oy$, $M\not\equiv O$, то ей мы поставим в соответствие пару чисел $(0;y)$, где $y\in R$, $y\neq 0$ и y взаимно однозначно

соответствующее точке M число на оси Oy как на числовой оси. Если точка $M \notin Ox$ и $M \notin Oy$, то мы можем (на основании теоремы 2 вопроса 4) из точки M на каждую из осей Ox и Oy провести единственные перпендикуляры. Тем самым, получим две однозначно определенные точки M_x и M_y — основания этих перпендикуляров к осям Ox и Oy соответственно. Взаимно однозначно соответствующие им координаты x и y (как координаты точек на числовых осях Ox и Oy), где x — первое число (абсцисса), y — второе число (ордината) мы и поставим в соответствие точке M, то есть $M \to (x; y)$, получим точку M с координатами $M(x; y)$. Первое условие определения взаимно однозначного соответствия между множествами M точек на координатной плоскости и множеством упорядоченных пар чисел $(x; y)$ (см. сноску на стр. 10 данной книги) выполнено.

Второй этап. Если теперь рассмотреть произвольную упорядоченную пару действительных чисел $(x; y)$, то при $x = y = 0$ этой паре будет (в силу теоремы 1) взаимно однозначно отвечать точка, являющаяся началом отсчета как оси Ox, так и оси Oy, то есть это будет точка их пересечения — начало координат O. Если $x \neq 0$, а $y = 0$, то паре $(x; 0)$ поставим в соответствие точку $M_x(x; 0)$, которая взаимно однозначно будет отвечать числу x на оси Ox как числовой оси. Если $x = 0$, а $y \neq 0$, то паре $(0; y)$ поставим в соответствие точку $M_y(0; y)$, которая взаимно однозначно будет отвечать числу y на оси Oy как числовой оси (см. выше рис. 57 а). Наконец, если $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то можно (причем единственным образом) восставить из точек $M_x(x; 0)$ на оси Ox и $M_y(0; y)$ на оси Oy перпендикуляры к каждой из этих осей. Эти перпендикуляры не будут лежать ни на какой из осей Oy и Ox (поскольку точки M_x и M_y не совпадают с точкой O, следовательно они параллельны соответственно оси Oy и Ox), не могут быть параллельными (в противном случае были бы параллельны оси Ox и Oy, что неверно), следовательно, они пересекутся в некоторой точке M. Ее мы и поставим в соответствие упорядоченной паре чисел $(x; y)$ (см. выше рис. 57 а). Нетрудно убедиться, что пара чисел $(x; y)$ и будет той самой парой, которая соответствует построенной указанным способом точке M (см. выше первый этап). Второе условие определения взаимно однозначного соответствия между множествами M точек на координатной плоскости и множеством упорядоченных пар чисел $(x; y)$ (см. сноску на стр. 10 данной книги) выполнено.

Третий этап. Остается доказать, что различным точкам M_1 и M_2 будут отвечать различные пары чисел $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$. Если точки M_1 и M_2 лежат или на оси Ox, или на оси Oy, то в силу теоремы 1 соответственно будут выполняться условия $x_1 \neq x_2$ или $y_1 \neq y_2$, а потому указанные пары чисел будут различными. Если прямая $(M_1M_2) \not\parallel Ox$ и $(M_1M_2) \parallel Ox$,

то основания перпендикуляров, проведенных из точек M_1 и M_2 на ось Ox будут различными (в случае их совпадения мы имели бы два перпендикуляра, восставленных из одной точки на оси Ox в полуплоскость, в которой находится прямая (M_1M_2) относительно этой оси, что невозможно). Следовательно, в этом случае $x_1 \neq x_2$, поэтому указанные пары чисел различны. Аналогичным образом доказывается, что если прямая $(M_1M_2) \not\in Oy$ и $(M_1M_2) \parallel Oy$, то $y_1 \neq y_2$, поэтому указанные пары чисел различны. Если прямая $(M_1M_2) \not\parallel Ox$, $(M_1M_2) \not\in Ox$ и $(M_1M_2) \not\parallel Oy$, $(M_1M_2) \not\in Oy$, то $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$, так как, предполагая, что, например, $x_1 = x_2$, мы получим, что основания перпендикуляров, проведенных из точек M_1 и M_2 на ось Ox (при сделанных предположениях по крайней мере одна из этих точек не будет лежать на оси Ox), совпадут, а это означает, что $M_1M_2 \perp Ox$ и потому $M_1M_2 \parallel Oy$, что неверно. Итак, третье условие определения взаимно однозначного соответствия между множествами M точек на координатной плоскости и множеством упорядоченных пар чисел $(x; y)$ (см. сноску на стр. 10 данной книги) выполнено. Теорему 3 можно считать полностью доказанной.

О координатных полуосях, полуплоскостях и четвертях

В силу У15 п. 2.3.0 о разбиении точкой на прямой всех ее точек на *две* полупрямые мы и имеем то, что начало координат O разбивает каждую из координатных осей на две полуоси, которые (условно) называют: на горизонтальной оси абсцисс Ox находящуюся справа (слева) от точки O полуось *положительной (отрицательной)*, а на вертикальной оси ординат Oy находящуюся сверху (снизу) от точки O полуось *положительной (отрицательной)*. Точку O — начало координат не относят ни к положительной, ни к отрицательной полуосям как оси Ox , так и оси Oy .

В силу У18 п. 2.3.0 о разбиении прямой на плоскости всех ее точек на *две* полуплоскости мы и имеем то, что ось абсцисс Ox разбивает координатную плоскость на две полуплоскости, которые (условно) называют *верхней (нижней)* полуплоскостью. При этом в верхней (нижней) полуплоскости (см. У20 п. 2.3.0) находится положительная (отрицательная) полуось оси Oy . Ось ординат Oy разбивает координатную плоскость на две полуплоскости, которые (условно) называют *правой (левой)* полуплоскостью. При этом в правой (левой) полуплоскости (см. У20 п. 2.3.0) находится положительная (отрицательная) полуось оси Ox . Сами координатные оси Ox и Oy не относят соответственно ни к верхней, ни к нижней и ни к правой, ни к левой полуплоскостям. Их можно считать границей каждой из соответствующих полуплоскостей.

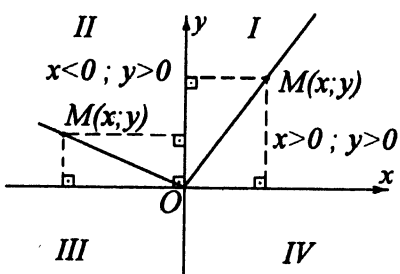


рис. 57 е)

Рассмотрим внутреннюю область прямого угла с вершиной в начале координат со сторонами — положительными полуосями осей Ox и Oy . Эта область, являющаяся пересечением правой и верхней полуплоскостей, (см. О15 п. 2.3.0) называется *первой координатной четвертью* (I ч). Если взять произвольную точку M , принадлежащую первой четверти, то луч OM , находясь в I ч. (в силу У20 п. 2.3.0), будет образовывать углы больше нулевого и меньше прямого, то есть острые углы с каждой из положительных полуосей (см. О22, О27В п. 2.3.0). Следовательно, в силу теоремы 3 вопроса 4 основания перпендикуляров, проведенных из точки M на координатные оси, будут именно на положительных полуосях, а потому если M — $M(x;y)$, то $x > 0$ и $y > 0$ (см. рис. 57 е).

Рассмотрим внутреннюю область прямого угла с вершиной в начале координат со сторонами — положительной полуосью Oy и отрицательной полуосью Ox . Эта область, являющаяся пересечением левой и верхней полуплоскостей, (см. О15 п. 2.3.0) называется *второй координатной четвертью* (II ч). Если взять произвольную точку M , принадлежащую второй четверти, то луч OM , находясь во II ч. (в силу У20 п. 2.3.0), будет образовывать углы больше нулевого и меньше прямого, то есть острые углы с каждой из указанных полуосей, а потому — тупой угол с положительной полуосью оси Ox (см. О22, О27В п. 2.3.0 и свойства смежных углов, изложенных выше, в вопросе 2). Следовательно, в силу теоремы 3 вопроса 4 основания перпендикуляров, проведенных из точки M на координатные оси, будут именно на отрицательной полуоси оси Ox и положительной полуоси оси Oy , а потому если M — $M(x;y)$, то $x < 0$ и $y > 0$.

Аналогичным образом определяются третья координатная четверть (III ч) как пересечение (общая часть) нижней и левой полуплоскостей и четвертая координатная четверть (IV ч) как пересечение (общая часть) нижней и правой полуплоскостей, получаются результаты о том, что если

точка M — $M(x;y)$ лежит в третьей четверти, то $x<0$ и $y<0$ и если точка M — $M(x;y)$ лежит в четвертой четверти, то $x>0$ и $y<0$.

Поскольку принадлежность точки M на координатной плоскости какой-либо конкретной или полуоси, или полуплоскости, или четверти исключает (в силу У15, У18 п. 2.3.0) ее принадлежность какому другому из указанных множеств, то можно утверждать (см. обозначение на стр. 12 множества элементов из X , обладающих свойством $P(x)$), что

ось абсцисс Ox — $\{M(x;y)\in Oxy\ :\ y=0\}$;
ось ординат Oy — $\{M(x;y)\in Oxy\ :\ x=0\}$;
верхняя полуплоскость — $\{M(x;y)\in Oxy\ :\ y>0\}$;
нижняя полуплоскость — $\{M(x;y)\in Oxy\ :\ y<0\}$;
правая полуплоскость — $\{M(x;y)\in Oxy\ :\ x>0\}$;
левая полуплоскость — $\{M(x;y)\in Oxy\ :\ x<0\}$;
I четверть — $\{M(x;y)\in Oxy\ :\ x>0\ ,\ y>0\}$;
II четверть — $\{M(x;y)\in Oxy\ :\ x<0\ ,\ y>0\}$;
III четверть — $\{M(x;y)\in Oxy\ :\ x<0\ ,\ y<0\}$;
IV четверть — $\{M(x;y)\in Oxy\ :\ x>0\ ,\ y<0\}$;
положительная полуось абсцисс Ox — $\{M(x;y)\in Oxy\ :\ x>0\ ,\ y=0\}$;
отрицательная полуось абсцисс Ox — $\{M(x;y)\in Oxy\ :\ x<0\ ,\ y=0\}$;
положительная полуось ординат Oy — $\{M(x;y)\in Oxy\ :\ x=0\ ,\ y>0\}$;
отрицательная полуось ординат Oy — $\{M(x;y)\in Oxy\ :\ x=0\ ,\ y<0\}$.

В начале п. 2.2, на стр. 306 вводились термины "угол оканчивается" на той или иной полуоси или в той или иной четверти. Исходя из проведенных рассуждений о лучах, находящихся в той или иной четверти, а также лучах, совпадающих с той или иной полуосью, используя соотношения между острым, прямым, тупым и развернутым углами и соответствующих соотношений между их мерами (см. У45 п. 2.3.0) можно получить диапазоны изменения мер углов, оканчивающихся на той или иной полуоси или в той или иной четверти (причем и ориентированных углов), которые были выписаны в п. 2.2, на стр. 306.

Об окружности и круге, их элементах и свойствах

В материале следующих семи вопросов планиметрии (вопросы 16 — 22) в той или иной мере используются: понятие окружности, ее свойства, а также свойства тесно связанных с ней геометрических фигур: прямых, лучей, отрезков, углов, дуг и т.п.

Поэтому необходимо *отдельно* остановиться на изложении некоторых свойств окружности, ее элементов и связанных с ней фигур.

До начала изложения ответа на следующий 16-й вопрос мы начнем новую нумерацию определений и теорем, так же, как и в п. 2.3.0 будем называть теоремы утверждениями. Всюду в дальнейшем при ссылке на эти теоремы и утверждения будем говорить "в силу О2" п. 2.3.1 или "в силу У4" п. 2.3.1, что будет означать использование указанных определения 2, или соответственно утверждения 4.

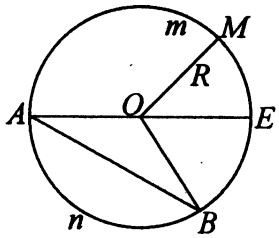


рис. 58 а)

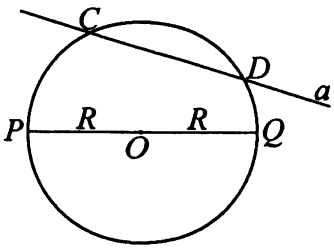


рис. 58 б)

Выше, в определении 6 вопроса 15 сформулированы понятия окружности и ее радиуса. Сформулируем их еще раз, а также введем и ряд других, связанных с окружностью определений.

Определение 1. **Окружностью** *называется фигура, состоящая из всех точек* **плоскости**, *расположенных на равном положительном расстоянии от некоторой фиксированной точки этой плоскости. Указанная точка называется* **центром окружности**.

Определение 2. **Радиусом** *окружности называется любой отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром, а также* **радиусом** *(точнее* **длиной радиуса***) называется* **расстояние** *(длина отрезка) от любой точки окружности до ее центра.*

В замечании после этих определений в вопросе 6 говорится о существенности положительности расстояния, фигурирующего в определении окружности.

Радиус (длина радиуса) окружности, как правило, обозначается буквами или R , или r , или R' , или r_1 и т.п. Центр окружности, как правило, обозначается или O , или O' , или O_1 и т.п. Если окружность имеет центр O и радиус R , то это обозначается "окружность $(O; R)$" .

На рис. 58 а) O — центр окружности, M — точка окружности, OM — радиус окружности, число $R > 0$ — длина этого радиуса.

Сразу же отметим, что в силу приведенных определений 1 и 2 (О1 и О2) и того, что два отрезка равны тогда и только тогда, когда равны их длины (см. У38 п. 2.3.0), следует: *радиусы одной и той же окружности равны.*

Определение 3. Пусть A и B — две (различные) точки на окружности $(O;R)$. *Отрезок AB называется* **хордой** *этой окружности. Хорда окружности, содержащая ее центр, называется* **диаметром** *этой окружности. Точки окружности, являющиеся концами одного ее диаметра, называются* **диаметрально противоположными.**

На рис. 58 а) AE — диаметр окружности, а на рис. 58 б) PQ — диаметр окружности. Так как по определению суммы отрезков $PQ = PO + OQ$ (см. рис. 58 б) *диаметр окружности равен сумме ее двух радиусов (удвоенному радиусу).* Следовательно, *если длина радиуса окружности равна R, то длина ее диаметра равна $2R$.*

Утверждение 1. Пусть A — точка окружности, длина радиуса которой равна R , тогда наибольшее из всех расстояний от этой точки до другой точки этой окружности — расстояние от точки A до диаметрально противоположной ей точки (то есть оно равно $2R$).

Доказательство

См. рис. 58 а). Пусть B — точка окружности $(O;R)$, отличная от точки A и от диаметрально противоположной ей точки E . В силу У40 п. 2.3.0 о существовании *только двух* точек прямой (AE) , расположенных на расстоянии $R > 0$ от точки O этой прямой (это и есть точки A и E) точка B не лежит на прямой (AE) , следовательно точки A , O и B — вершины $\triangle AOB$. В силу неравенства треугольника (см. теорему 8 вопроса 3) $\rho(A;B) = |AB| < |AO| + |OB| = 2R = |AE|$. Утверждение 1 доказано.

Определение 4. Две окружности называются **равными**, *если их можно совместить при наложении.*

Утверждение 2. Две окружности равны тогда и только тогда, когда равны их радиусы и при наложении одной из них на другую совмещаются их центры.

Доказательство

Пусть две окружности $(O;R)$ и $(O';R')$ могут быть совмещены наложением, например, первой из них $((O;R))$ на вторую $((O';R'))$. Тогда точка $M \in (O;R)$ совместится с некоторой точкой $M' \in (O';R')$, а точка $N \in (O;R)$ — диаметрально противоположная точке M совместится с некоторой точкой $N' \in (O';R')$. В силу А13 п. 2.3.0 $MN = M'N'$, откуда $|MN| = |M'N'| = 2R$. Точка N' является диаметрально противоположной точке M' на окружности $(O';R')$. Предположим противное, тогда диаметрально противоположной точке M' на окружности $(O';R')$ будет некоторая точка $K' \not\equiv N'$, в силу У1 п. 2.3.1 $|M'K'| > 2R$. В силу того, что окружности $(O;R)$ и $(O';R')$ могут быть совмещены при наложении, с точкой K' совместится некоторая точка K окружности $(O;R)$. Следовательно, $MK = M'K' \Rightarrow |MK| = |M'K'| > 2R$, что противоречит доказанному в п. 2.3.1 У1 о том, что $|MK| \leqslant 2R$. Таким образом, $2R' = |M'N'| = |MN| =$

$= 2R \Leftrightarrow R = R'$, что означает $|MO| = |M'O''| \Leftrightarrow MO = M'O''$, $|ON| = |O''N'| \Leftrightarrow ON = O''N' \Rightarrow M'O'' = MO = ON = O''N'$, поэтому O'' — точка, в которую переходит точка O при наложении окружности $(O; R)$ на окружность $(O'; R')$ является серединой отрезка $M'N'$, то есть центром окружности $(O'; R')$. Следовательно, $O'' \equiv O'$.

Обратно, пусть у окружностей $(O; R)$ и $(O'; R')$ $R = R'$ и при наложении совмещаются центры O и O' . Тогда в силу равенства радиусов этих окружностей всякая точка M окружности $(O; R)$ совместится с некоторой точкой M' окружности $(O'; R')$. Пусть N' — произвольная точка окружности $(O'; R')$, она будет отвечать той точке N на окружности $(O; R)$, в которую перешла бы точка N' при наложении отрезка $O'N'$ на отрезок ON в результате совмещения точки O' с точкой O (в силу А18 п. 2.3.0 $O'N' = ON \Leftrightarrow ON = O'N'$). Это и означает совпадение окружностей $(O; R)$ и $(O'; R')$ при наложении. Утверждение 2 полностью доказано.

Пусть C и D две различные точки окружности $(O; R)$. Эти две точки (по А3 п. 2.3.0) определяют единственную проходящую через них прямую.

Определение 5. Прямая , проходящая через две точки окружности называется **секущей**. При этом также говорят, что *прямая и окружность* **пересекаются** *в указанных точках или то, что эти точки являются* **точками пересечения** *окружности и прямой.* См. выше рис. 58 б), на котором прямая пересекает окружность $(O; R)$ в точках C и D .

Определение 6. Прямая, лежащая с окружностью в одной плоскости и имеющая с ней **одну и только одну (единственную)** *общую точку, называется* **касательной** *к окружности, а их общая точка —* **точкой касания.**

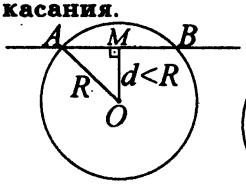


рис. 58 в)

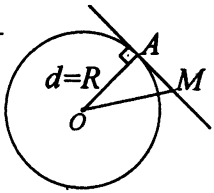


рис. 58 г)

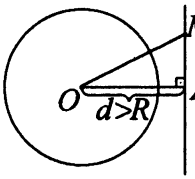


рис. 58 д)

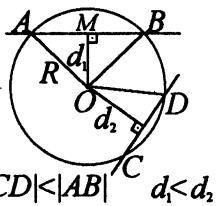


рис. 58 е)

Докажем утверждения о взаимном расположении окружности и прямой, лежащих в одной плоскости.

Утверждение 3. Существуют три и только три возможности взаимного расположения окружности и прямой.

1) *Если расстояние от центра окружности до прямой меньше ее радиуса, то прямая и окружность имеют две общие точки* (см. рис. 58 в).

2) *Если расстояние от центра окружности до прямой равно ее радиусу, то прямая и окружность имеют одну точку* (в этом случае говорят,

что прямая и окружность *касаются*, см. рис. 58 г).

3) *Если расстояние от центра окружности до прямой больше ее радиуса, то прямая и окружность не имеют общих точек*, в этом случае говорят, что они не пересекаются и не касаются (см. рис. 58 д).

Доказательство

Пусть a — прямая, $(O;R)$ — окружность, $d=\rho(O;a)$ — расстояние от точки O до прямой a .

1) В случае, когда $O\in a$ расстояние d считают равным 0 (нулю). В этом случае в силу У40 п. 2.3.0 существуют *только две* точки A и B , лежащие на этой прямой, такие, что $|OA|=|OB|=R$, причем точка O лежит между точками A и B на прямой a , следовательно в этом случае утверждение доказано.

Если теперь $0<d<R$, то d — длина перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую a (см. рис. 58 в). Пусть M — основание этого перпендикуляра, в силу У40 п. 2.3.0 на прямой a от точки M на каждом из двух лучей с началом в точке O можно отложить по одной точке (стало быть, на прямой таких точек будет две) A и B , для которых $|MA|=$ $=|MB|=\sqrt{R^2-d^2}>0$. По теореме Пифагора для прямоугольных $\triangle OAM$ и $\triangle OBM$ имеем:

$|OA|^2=|OB|^2=(\sqrt{R^2-d^2})^2+d^2=R^2-d^2+d^2=R^2\Leftrightarrow|OA|=|OB|=R$.

Существование двух точек пересечения прямой и окружности установлено.

Если предположить существование еще одной общей точки C $(C\not\equiv A\ ,\ C\not\equiv B)$ у окружности и прямой, то в силу равенства $|OA|=$ $=|OC|=R$ получим, что $\triangle OAC$ — равнобедренный. Середина его основания, точка N не может совпадать с точкой M — серединой отрезка AB , в противном случае в силу У40 $C\equiv B$, что противоречит предположению. В силу свойств равнобедренного треугольника медиана $\triangle OAC$ $ON\perp a$. Получили, что из точки O на прямую a проведено два перпендикуляра OM и ON , что невозможно. Следовательно более двух общих точек прямая и окружность не имеют.

Замечание. Отметим, что при рассмотрении этого случая нами попутно установлено, что *если AB и CD — хорды одной окружности и $\rho(O;(AB))=d_1<(>)d_2=\rho(O;(CD))$, то $|AB|>(<)|CD|$ и если $\rho(O;(AB))=d_1=d_2=\rho(O;(CD))$, то $|AB|=|CD|$* (см. рис. 58 е).

Это вытекает из соотношения (следующего из теоремы Пифагора) между длиной основания, длиной проведенной к нему высоты (d), являющейся медианой и длиной боковой стороны равнобедренного треугольника OAB $(OA=OB)$: $|AB|=\sqrt{|OA|^2-d^2}$.

2) Пусть $d=R$ (см. рис. 58 г). В этом случае основание перпендикуляра, проведенного из точки O на прямую a (точка A), лежит на окружности

(так как $|OA| = R$). Всякая точка M прямой a, отличная от точки A, будет основанием *наклонной*, проведенной из точки O к этой прямой. В силу теоремы 1 вопроса 9 (длина перпендикуляра, проведенного из точки к прямой меньше длины всякой наклонной, проведенной из этой точки к этой прямой) получаем, что $|OM| > |OA| = R$. Следовательно, точка M не является точкой окружности $(O; R)$, получаем, что окружность и прямая в этом случае *имеют единственную общую точку.*

3) Пусть $d > R$ (см. рис. 58 д). В этом случае основание перпендикуляра, проведенного из точки O на прямую a (точка M), не лежит на окружности (так как $|OM| > R$). Всякая точка A прямой a, отличная от точки M, будет основанием *наклонной*, проведенной из точки O к этой прямой. Аналогичным образом, что и в случае 2) $|OA| > |OM| > R$. Следовательно, точка A не является точкой окружности $(O; R)$, получаем, что окружность и прямая в этом случае *не имеют общих точек.*

Так как каждое из соотношений $0 \leqslant d < R$, $d = R$, $d > R$ исключает другое, то от противного легко доказываются обратные утверждения каждого из случаев 1), 2), 3). Таким образом,

1) *прямая и окружность имеют две общие точки тогда и только тогда, когда расстояние от центра окружности до прямой меньше ее радиуса* ;

2) *прямая и окружность имеют единственную общую точку тогда и только тогда, когда расстояние от центра окружности до прямой равно ее радиусу* ;

3) *прямая и окружность не имеют общих точек тогда и только тогда, когда расстояние от центра окружности до прямой больше ее радиуса.*

Утверждение 3 полностью доказано.

Следствие. Прямая, содержащая диаметр или радиус окружности, перпендикулярна хорде этой окружности, не проходящей через ее центр, тогда и только тогда, когда она проходит через ее середину.

Это утверждение непосредственно вытекает из того, что $\triangle OAB$, (где AB — хорда окружности, O — ее центр) — равнобедренный ($OA = OB$ как радиусы одной окружности) и медиана (высота), проведенная на из вершины O на сторону AB является высотой (медианой).

Теперь отметим, что так же, как в случае угла и многоугольника, точки окружности разбивают точки плоскости на две части. Одну из них условно называют внутренней областью по отношению окружности, а другую — внешней. Сформулируем следующие определения.

Определение 7. Пусть в плоскости α проведена окружность $(O; R)$, точка $M \in \alpha$ называется **внутренней (внешней)** *точкой по отноше-*

нию к этой окружности, или говорят, что $M \in \alpha$ лежит **внутри (вне)** *этой окружности, если $\rho(O;M) < R$ ($\rho(O;M) > R$).*

Множество всех внутренних (внешних) точек по отношению к окружности называют ее **внутренней (внешней)** *областью. Множество всех точек окружности считают* **границей** *круга.*

Из этого определения вытекает, что *центр окружности всегда является внутренней точкой по отношению к ней.*

Определение 8. **Кругом** *с центром в точке O радиуса $R > 0$ называется фигура, состоящая из всех точек* **плоскости**, *расположенных на расстоянии, не превосходящем R, от некоторой фиксированной точки O этой плоскости* (см. ниже на рис. 58 ж) заштрихованную область).

Аналогичным образом, как и для окружностей, вводится определение равных кругов.

Определение 9. Два круга называются **равными**, *если их можно совместить при наложении.*

Утверждение 4. Два круга равны тогда и только тогда, когда равны их радиусы и при наложении одного из них на другой совмещаются их центры.

Доказательство проводится по такой же схеме, что и утверждение 2 о равенстве кругов. При этом доказывается совмещение граничных (точек окружности) равных кругов и внутренних точек равных кругов.

Символически окружность и круг с центром в точке O радиуса $R > 0$ можно представить соответственно и так (см. обозначение множества всех точек, обладающих некоторым свойством на стр. 12):

$$\text{окружность} — M \in \alpha : \quad \rho(O;M) = R \quad (O \in \alpha),$$

$$\text{круг} — M \in \alpha : \quad \rho(O;M) \leqslant R \quad (O \in \alpha).$$

Из определений 7 и 8 непосредственно вытекает, что *круг с центром в точке O радиуса $R > 0$ — есть объединение всех точек окружности с теми же центром и радиусом и ее внутренней области.*

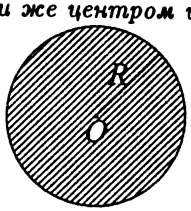


рис. 58 ж)

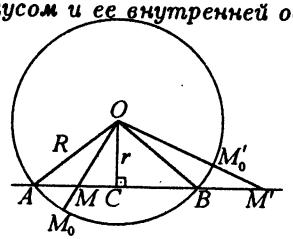


рис. 58 з)

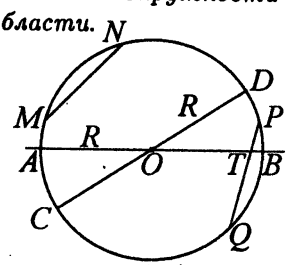


рис. 58 и)

Утверждение 5. Пусть (AB) — секущая окружности с центром в точке O радиуса R, где A и B — точки окружности, тогда точка M этой прямой является внутренней точкой отрезка AB (то есть она лежит

между точками A и B) тогда и только тогда, когда $\rho(O;M) < R$, и точка M' этой прямой является внешней точкой отрезка AB (то есть она не лежит между точками A и B) тогда и только тогда, когда $\rho(O;M') > R$ (см. рис. 58 з).

Доказательство

В силу утверждения 3 о взаимном расположении окружности и прямой поскольку прямая (AB) пересекает окружность в двух точках, то $0 \leqslant \rho(O;(AB)) = r < R$ ($\rho(O;(AB)) = |OC|$, где $(OC) \perp (AB)$, $C \in (AB)$). В силу следствия из утверждения 3 при $r > 0$ C — середина отрезка AB, то есть $|AC| = |CB|$. Если $r = 0$, то отрезок AB проходит через центр окружности, то есть является ее диаметром). Поскольку точка C — середина отрезка AB, то она лежит между точками A и B, поэтому точка A не лежит между точками C и B и точка B не лежит между точками C и A.

Пусть точка M лежит между точками A и B на прямой (AB), тогда в силу теоремы о том, что каждая точка на прямой разбивает ее на два луча с вершинами в этой точке (см. У15 п. 2.3.0), мы получим, что точка M лежит на том же луче с вершиной в точке A, что и точки C и B, и точка M лежит на том же луче с вершиной в точке B, что и точки C и A. Поэтому точка M или совпадает с тоской C, или она лежит между точками A и C, или она лежит между точками C и B. Следовательно, согласно свойствам длины отрезка $|CM| < |AB|/2 = |AC| = |CB| \Rightarrow |OM| = \sqrt{|OC|^2 + |CM|^2} < \sqrt{|OC|^2 + |AB|^2/4} = |OA| = |OB| = R$, то есть $|OM| < R$.

Пусть точка M лежит между точками A и B на прямой (AB), и $|OM| < R$, тогда $|CM| = \sqrt{|OM|^2 - |OC|^2} < \sqrt{R^2 - |OC|^2} = |CA| = |CB| = |AB|/2$, а потому согласно свойствам длины отрезка точка M или лежит между точками C и A (а стало быть, она лежит на луче BA с началом в точке B), или точка M лежит между точками C и B (а стало быть, она лежит на луче AB с началом в точке A), таким образом, в обоих случаях точка M лежит между точками A и B, то есть является внутренней точкой отрезка AB.

Поскольку в случае $M \in (AB)$ $|OM| = R \Leftrightarrow M \equiv A$ или $M \equiv B$, то точка M' этой прямой не лежит между точками A и B) тогда и только тогда, когда $\rho(O;M') = |OM'| > R$ (в этом случае $|CM'| = \sqrt{|OM'|^2 - |OC|^2} > \sqrt{R^2 - |OC|^2} = |CA| = |CB|$). Утверждение 5 доказано.

Замечание 1. Доказанное утверждение 5 означает, что *всякая точка прямой, содержащей хорду окружности, которая лежит на хорде (вне хорды) лежит также внутри (вне) окружности.*

Замечание 2. Из утверждения 5 непосредственно вытекают следующие факты.

Если точка $M \in AB$ (то есть она является внутренней точкой хорды AB), то радиус окружности, проходящий через эту точку, *пересечет* хорду AB в точке M , стало быть, точка M_0 — конец этого радиуса и центр окружности O будут *в разных полуплоскостях* относительно прямой (AB) (см. рис. 58 з).

Если точка $M' \in (AB)$ и $M' \notin (AB)$ (то есть она является внешней точкой хорды AB), то $|OM'| > R$ и на луче OM' существует единственная точка M'_0 такая, что $|OM'_0| = R$, то есть M'_0 — точка окружности, которая лежит между точками O и M' поэтому точка M' не лежит между точками O и M'_0 . Следовательно, радиус окружности, проходящий через точку M'_0, *не пересекает* прямую (AB) , стало быть, точка M'_0 — конец этого радиуса и центр окружности O будут *в одной полуплоскости* относительно прямой (AB) (см. рис. 58 з).

Таким образом, если прямая пересекает окружность и не проходит через ее центр, то точки пересечения этой прямой с окружностью разбивают множество всех точек окружности на два множества. Любая точка одного из этих множеств лежит в одной полуплоскости с центром окружности относительно указанной прямой, а любая точка другого из этих множеств лежит в другой полуплоскости относительно указанной прямой. Выше, на рис. 58 з) точки M_0 и M'_0 окружности $(O; R)$ лежат в разных полуплоскостях относительно прямой (AB) .

Если прямая проходит через центр окружности, то она будет пересекать ее в диаметрально противоположных точках. При этом любая другая пара диаметрально противоположных точек этой окружности будет определять отрезок, пересекающий эту прямую в центре окружности. Следовательно, указанные точки будут находиться в разных полуплоскостях относительно указанной прямой (см. выше рис. 58 и). Поэтому и в этом случае, когда прямая, пересекающая окружность, проходит через ее центр, точки пересечения этой прямой с окружностью разбивают множество всех точек окружности на два множества. Любые две точки одного из этих множеств (при условии, что отрезок, соединяющий их, не пересекает указанную прямую) лежат в одной полуплоскости относительно указанной прямой. Любые две точки одного из разных множеств (при условии, что отрезок, соединяющий их, пересекает указанную прямую) лежат в одной разных полуплоскостях относительно указанной прямой. См. выше рис. 58 и), на котором точки M и N окружности $(O; R)$ расположены в одной полуплоскости относительно прямой (AB) , а точки P и Q этой окружности расположены в разных полуплоскостях относительно прямой (AB) (точка $T \equiv PQ \cap AB$).

Отметим, что аналогичные выводы с аналогичным обоснованием можно сделать и относительно точек *круга*.

Если вернуться к рассмотрению случаев, когда окружность и прямая или имеют единственную общую точку, или не имеют общих точек (см. выше обоснования случаев 2) и 3) в утверждении 3), то становится ясным, что все точки окружности и соответствующего круга *лежат в одной полуплоскости относительно указанной прямой* (кроме единственной общей точки окружности и прямой в случае существования такой точки, (см. выше рис. 58 г), е).

Проведенные рассуждения позволяют нам ввести понятие такого важного элемента окружности, как ее *дуга*. Определим его следующим образом.

Определение 10. Пусть прямая (AB) пересекает окружность в точках A и B . *Каждая из двух частей окружности, состоящая из всех ее точек, лежащих в одной полуплоскости относительно прямой* (AB) , *называется* **дугой** *этой окружности.*

Из этого определения следует, что каждая из дуг с одними и теми же концами не имеет общих точек, кроме точек A и B , поэтому каждую из этих дуг естественно считать *дополняющей* другую дугу до окружности или *дополнительной* по отношению к другой дуге и обе эти дуги — *взаимно дополнительными.*

Точки A и B считаются **концами** *каждой из этих дуг. Точка M данной дуги окружности с концами A и B ($M \neq A$, $M \neq B$) считается ее* **внутренней** *точкой, а точка N дополнительной по отношению к ней дуги (также отличная от ее концов) считается ее* **внешней** *точкой.*

Обозначается дуга с концами A и B $\smile AB$. Если мы хотим конкретизировать, какая из двух дуг $\smile AB$ берется, то для них используются обозначения типа $\smile AmB$, $\smile AnB$. Символы m и n ставятся около некоторой внутренней точки конкретной дуги. Выше, на рис. 58 а) точка M является внутренней точкой дуги $\smile AmB$, и она является внешней точкой дуги $\smile AnB$.

Замечание. Если $A \equiv B$ — совпадающие точки окружности $(O; R)$, то дугу $\smile AA$, не имеющую внутренних точек естественно считать *нулевой* дугой. Множеством ее внешних точек является окружность без точки A . Дугой $\smile AA$, совпадающей со всей окружностью (*полной* дугой), считается дуга, не имеющая внешних точек. Множеством ее внуренних точек является указанная окружность без точки A .

Определение 11. Две дуги одной окружности или равных окружностей называются **равными**, *если они могут быть совмещены наложением.*

В этом определении предполагается, что в равных дугах одной окружности совмещаются соответствующие концы и внутренние точки. В равных дугах равных окружностей сначала совмещаются центры, а затем совмещаются концы и внутренние точки.

Отметим, что две нулевые дуги одной окружности с центром O (или равных окружностей с центрами O и O') *равны*. Две полные дуги одной окружности с центром O или равных окружностей с центрами O и O' *равны*, так как концы этих дуг могут быть совмещены как лежащие на окружности концы равных радиусов одной окружности или равных окружностей. Внутренние точки полных дуг одной или равных окружностей совмещаются следующим образом: если точка A — начало и конец одной из равных дуг, а точка B — начало и конец другой из них, то совмещающиеся точка M первой дуги с точкой N второй дуги — это такие точки, что $\angle AOM = \angle BON$ или $\angle AOM = \angle BO'N$.

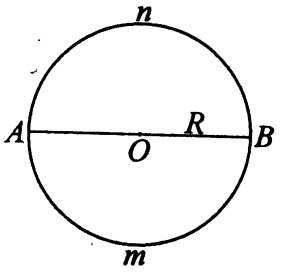


рис. 59 а)

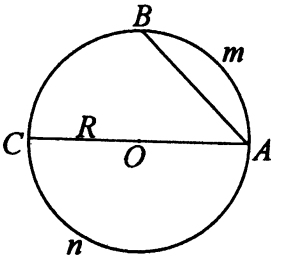


рис. 59 б)

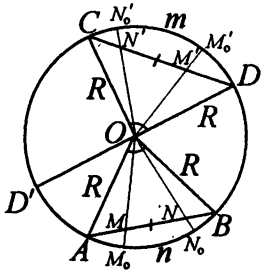


рис. 59 в)

Определение 12. Пусть прямая (AB) пересекает окружность в диаметрально противоположных точках. Тогда каждая из дуг $\smile AB$ *называется* **дугой, равной полуокружности** *(или)* **полуокружностью**. *Если прямая (AB), не проходящая через центр O окружности, пересекает ее в точках A и B , то дуга AnB (AmB), внутренние точки которой лежат* **в одной полуплоскости с центром** O **(в разных полуплоскостях с центром** O**) называется дугой больше (меньше) полуокружности.**

На рис. 59 а) изображены дуги $\smile AnB$ и $\smile AmB$ одной окружности $(O; R)$, равные полуокружности.

Замечание 1. Отметим, что *дуги одной окружности, равные полуокружности и являющиеся взаимно дополнительными равны* (согласно О11).

Это сразу вытекает из того, что при наложении дуги $\smile AnB$ на дугу $\smile AmB$ каждая из внутренних точек дуги $\smile AnB$ наложится на диаметрально противоположную ей точку, находящуюся на дуге $\smile AmB$, и для каждой из внутренних точек дуги $\smile AmB$ существует (диаметрально ей противоположная) точка дуги $\smile AnB$, которая при наложении $\smile AnB$ на $\smile AmB$ с ней совместится. При этом наложении точка A (B) совместится с диаметрально противоположной ей точкой B (A) .

Замечание 2. Отметим также, *что две хорды одной окружности или равных окружностей равны тогда и только тогда, когда равны соот-*

ветствующие им дополнительные дуги.

Это утверждение следует в силу взаимно однозначного соответствия между точками равных фигур и того, что при наложении точек одной дуги окружности на точки равной ей дуги совмещаются (см. комментарий после О11) центры окружностей или в одной окружности центр совмещается сам с собой. В силу равенства радиусов одной окружности или равных окружностей (см. выше У2) каждая точка дополнительной дуги окружности совместится (взаимно однозначным образом) только с точкой дуги, *дополнительной* той дуге, которая равна исходной дуге.

На рис. 59 б) изображены дуги $\smile AnB$ и $\smile AmB$ окружности $(O;R)$, дуга $\smile AnB$ больше полуокружности, дуга $\smile AmB$ меньше полуокружности.

Согласно О10 и О12 если из двух взаимно дополнительных дуг одна меньше полуокружности, то другая больше полуокружности.

Определение 13. Пусть задана дуга $\smile AmB$ окружности $(O;R)$. Говорят, что хорда AB этой окружности **стягивает** *дугу $\smile AmB$ или* **соответствует** *дуге $\smile AmB$.*

Из этого определения следует, что дуги, равные полуокружности, стягиваются ее диаметром.

Утверждение 6. Две дуги одной окружности (или равных окружностей) меньшие (большие) полуокружности, а также равные полуокружности равны тогда и только тогда, когда равны стягивающие их хорды.

Доказательство

См. рис. 59 в). Пусть дуги $\smile AnB$ и $\smile CmD$ окружности $(O;R)$ меньшие полуокружности равны. Так как согласно О11 при совмещении этих дуг, в частности, совмещаются их концы, то в силу А13 п. 2.3.0 совмещаются внутренние точки хорд AB и CD, следовательно, они равны.

Обратно, пусть хорды AB и CD окружности $(O;R)$ равны. Прежде всего отметим, что так как точки C и D и точки A и B не являются диаметрально противоположными, то точки O, D, C и точки O, A, B *не лежат на одной прямой* и поэтому тройка точек O, D, C — вершины $\triangle ODC$ и тройка точек O, A, B — вершины $\triangle OAB$. Пусть при наложении, например, хорды CD на равную ей хорду AB совмещаются соответственно концы D и A, C и B и произвольная точка M хорды CD наложится на некоторую точку N хорды AB. Проводя радиусы окружности через точки M и N, мы получим точки M_0 и N_0 на окружности. Так как в силу У5 $\rho(O;M) < R = \rho(O;M_0)$ и $\rho(O;N) < R = \rho(O;N_0)$, точки M_0 и N_0 будут в разных полуплоскостях относительно соответственно прямых (DC) и (AB) с центром окружности O. В силу О12 и того, что $N \notin (OA)$, $N \notin (OB)$, $M \notin (OD)$, $M \notin (OC)$, точка M_0 будет внут-

ренней точкой *именно дуги* $\smile AnB$, а точка N_0 будет внутренней точкой *именно дуги* $\smile AmB$. При указанном наложении точка O — центр окружности совместилась сама с собой точка D совместилась с точкой A и точка M совместилась с точкой N. Следовательно, совместятся отрезки OM и ON, стало быть (см. рассуждения после определения 8 равных треугольников в вопросе 1, базирующиеся на основе У31А п. 2.3.0), совместятся лучи OM и ON, а потому (в силу $|OM_0| = |ON_0| = R$) — и точки M_0 и N_0. При этом для каждой внутренней точки N_0' дуги $\smile AmB$ будет существовать внутренняя точка M_0' дуги $\smile AnB$, которая на нее накладывается, следующим образом. Пусть N' — точка пересечения хорды AB и радиуса ON_0' (см. О12), тогда при наложении хорды DC на хорду AB на точку N' наложится некоторая внутренняя точка M' хорды DC. Далее, рассуждая аналогично, мы получим, что конец радиуса, проходящий через точку M', и будет той самой точкой M_0'. Итак, для равных хорд меньших полуокружности утверждение 6 доказано.

Если дуги $\smile AnB$ и $\smile CmD$ больше полуокружности, то справедливость утверждения для этих хорд вытекает из замечания 2 к определению 12 и доказанного утверждения 6 для дуг, меньших полуокружности.

Если дуги $\smile AmB$ и $\smile CnD$ — полуокружности, то, накладывая диаметр AB на диаметр CD, при совмещении, например, концов A и C этих диаметров, а стало быть, концов указанных дуг, в силу равенства диаметров $AB = CD$ совместятся точки B и D, а в силу равенства радиусов окружности (равных окружностей) центр окружности O совместится сам с собой (совместятся центры равных окружностей O и O'). Далее выберем произвольную точку M на дуге AmB, отличную от точки A и точки B, которая уже не будет лежать на прямой (AB), следовательно, точки A, M, B, а также точки O, M, B и O, M, A могут быть вершинами соответственно $\triangle AMB$, $\triangle OMB$, $\triangle OMA$. Точка M находится в одной из двух полуплоскостей относительно прямой (AB), в которой находятся все точки дуги $\smile AmB$. Эта точка при указанном выше совмещении концов диаметров окружности (равных окружностей) AB и CD на основе аксиом наложения А14 и А15 п. 2.3.0 перейдет в некоторую точку N *окружности* $(O; R)$ (или равной ей окружности $(O'; R)$) (поскольку $|OM| = |ON| = R$ ($|OM| = |O'N| = R$)), причем в такую, что $\angle AOM = \angle CON$ ($\angle AOM = \angle CO'N$). Последнее обстоятельство вызвано тем, что $\triangle AOM = \triangle CON$ ($\triangle AOM = \triangle CO'N$) (по двум сторонам и углу, заключенному между ними), откуда $AM = CN$. Следовательно, при совмещении точек A и C совмещаются точки M и N. Если теперь взять произвольную точку N' на дуге $\smile CpD$ (на которой лежит точка N), отличную от точки C и точки D, которая будет находиться в одной полуплоскости

вместе с точкой N относительно прямой (CD), то в нее перейдет такая точка M' дуги $\smile AmB$, что $\angle AOM' = \angle CON'$ ($\angle AOM' = \angle CO'N'$). Таким образом, дуги $\smile AmB$ и $\smile CpD$ совместились при наложении, следовательно, они равны. Отметим, что поскольку существуют только две дуги-полуокружности с концами в фиксированных точках C и D, то или дуга $\smile CpD$ совпадает с дугой $\smile CnD$, или дуга $\smile CpD$ совпадает с дополнительной по отношению к дуге $\smile CnD$, дугой $\smile Cn'D$. Так как $\smile AmB = \smile CpD$, $\smile CpD = \smile CnD$ или $\smile CpD = \smile Cn'D$, то в силу А19 п. 2.3.0 $\smile AmB = \smile CnD$. Утверждение 6 полностью доказано.

Введем определение сравнения, суммы и разности дуг *одной окружности (или равных окружностей).*

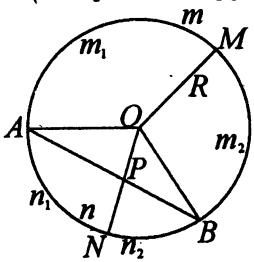


рис. 59 г)

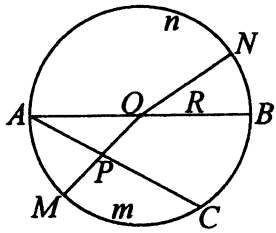


рис. 59 д)

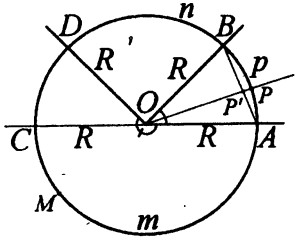


рис. 59 е)

Пусть $\smile AmB$ — дуга окружности $(O; R)$, M — ее внутренняя точка.

Определение 14. Говорят, что при этом дуга $\smile AmB$ **больше** *дуги* $\smile Am_1M$ *и также* $\smile AmB$ **больше** $\smile Mm_2B$, *а дуга* $\smile Am_1M$ **меньше** *дуги* $\smile AmB$ *и также дуга* $\smile Mm_2B$ **меньше** *дуги* $\smile AmB$.

Обозначение $\smile AmB > \smile Am_1M$, $\smile Mm_2B < \smile AmB$ (см. рис. 59 г).

По определению также считают, что *всякая, не являющаяся нулевой* (**ненулевая**), *дуга больше нулевой дуги, а всякая нулевая дуга меньше любой ненулевой дуги.*

Из определения 14 вытекает, что всякая дуга, отличная от полной дуги меньше полной дуги, а полная дуга больше всякой отличной от нее дуги.

Замечание. На рис. 59 д) дуга $\smile AnC$ — дуга больше полуокружности (согласно О12), так как любая ее точка лежит в одной полуплоскости с центром O окружности относительно прямой (AC). Если провести через точки A и O диаметр этой окружности, то, поскольку в силу У20 п. 2.3.0, все точки *луча* AO лежат в одной полуплоскости вместе с центром окружности O относительно прямой (AC), точка B, диаметрально противоположная точке A, лежит в этой же полуплоскости, а стало быть, она лежит на дуге $\smile AnC$, то есть является ее внутренней точкой. Следовательно, равная полуокружности $\smile AnB$ меньше дуги $\smile AnC$ в смысле О14. На рис. 59 д) дуга $\smile AmC$ — дуга меньше полуокружности (согласс-

но О12), так как любая ее точка и центр окружности O лежат в разных полуплоскостях относительно прямой (AC). Точка C окружности $(O;R)$ отлична от точки B (поскольку $O \notin (AC)$), поэтому она находится в одной из полуплоскостей относительно прямой (AB) . В этой же полуплоскости будет находиться и каждая точка M дуги $\smile AmB$, поскольку существует точка P пересечения отрезков OM и AC , а так как (согласно У20 п. 2.3.0) всякая точка луча AC (а потому и отрезка AC) лежит в той же полуплоскости относительно прямой (AB) , что и C , то и точка P будет в ней же и находиться. Следовательно, в силу У20 п. 2.3.0, в указанной полуплоскости будет находиться и всякая точка луча OP , в том числе и точка M . Итак, точка C будет внутренней точкой именно дуги-полуокружности $\smile AmB$, поэтому дуга $\smile AmC$ меньше дуги-полуокружности в смысле О14.

Пусть $\smile AnB$ — дуга окружности $(O;R)$, N — ее внутренняя точка.

Определение 15. Говорят, что при этом дуга $\smile AnB$ *есть* **сумма** *дуг* $\smile An_1N$ *и* $\smile Nn_2B$, *а дуга* $\smile An_1N$ *есть* **разность** *дуг* $\smile AnB$ *и* $\smile Nn_2B$ *и также дуга* $\smile Nn_2B$ *есть* **разность** *дуг* $\smile AnB$ *и* $\smile An_1N$. Обозначение $\smile AnB = \smile An_1N + \smile Nn_2B$; $\smile An_1N = \smile AnB - \smile Nn_2B$; $\smile Nn_2B = \smile AnB - \smile An_1N$ (см. рис. 59 г).

По определению также считают, что *сумма и разность любой дуги с нулевой дугой равна данной дуге, а разность любой дуги с ней же самой равна нулевой дуге.*

Из этого определения вытекает, что *разность двух дуг определена тогда и только тогда, когда уменьшаемая дуга больше или равна вычитаемой дуги,* а также, что сумма двух ненулевых дуг больше каждой из слагаемых дуг.

Из определения 15 вытекает, что *сумма двух взаимно дополнительных дуг (в том числе нулевой и полной дуг) равна полной дуге.*

Так же, как и для углов для дуг вводится числовая характеристика — мера (например, градусная, радианная). Такая мера дуги определяется мерой угла с вершиной в центре окружности и сторонами, проходящими через концы дуги. Введем следующее определение.

Определение 16. **Центральным углом** *называется угол с вершиной в центре окружности и сторонами, проходящими через точки окружности.*

Из этого определения вытекает, что стороны центрального угла содержат радиусы окружности. Поэтому еще говорят, что "центральный угол — угол, образованный радиусами одной окружности".

Поскольку каждая из сторон центрального угла имеет единственную общую точку с окружностью (на основании У40 п. 2.3.0), то в случе центральныго угла, не являющегося нулевым и полным, существуют *две* точки

окружности, лежащие одна на одной стороне угла, другая — на другой его стороне. Таким образом, указанные точки разбивают точки окружности *на две дуги* (см. выше О10). Можно сказать, что и всякой дуге окружности соответствует некоторый центральный угол, который получается, если через концы дуги и центр окружности провести лучи с общим началом в центре этой окружности.

Введем следующее определение:

Определение 17. Дуга окружности, все внутренние точки которой лежат во внутренней области центрального угла с вершиной в центре этой окружности, называется **дугой, соответствующей (отвечающей) этому центральному углу**. *При этом указанный центральный угол называется* **соответствующим (отвечающим) этой дуге** *окружности.*

По определению также считают, что **нулевому центральному углу соответствует нулевая дуга и нулевой дуге соответствует нулевой центральный угол**, а также **полному центральному углу соответствует полная дуга и полной дуге соответствует полный центральный угол** (в соответствии с определениями внутренней области полного угла и полной дуги, что согласуется с определением 17 для остальных типов центральных углов).

Замечание. Часто про центральный угол, соответствующий данной дуге окружности говорят, что он "опирается на эту дугу".

На рис. 59 е) изображены: центральный угол $\angle AOB$, отвечающая ему дуга $\smile ApB$ меньше полуокружности, этот угол — угол первого типа (см. О15А п. 2.3.0) ; центральный угол $\angle AOD$, отвечающая ему дуга $\smile AmD$ больше полуокружности, этот угол — угол третьего типа (см. О15В п. 2.3.0) ; развернутый центральный угол $\angle AOC$, отвечающая ему дуга $\smile AnC$ равна полуокружности.

Докажем следующие утверждения:

Утверждение 7.

А) *Всякому центральному углу первого типа соответствует дуга, меньше полуокружности. Всякой дуге, меньшей полуокружности соответствует центральный угол первого типа.*

Б) *Всякому развернутому центральному углу соответствует дуга, равная полуокружности. Всякой дуге, равной полуокружности соответствует развернутый центральный угол.*

В) *Всякому центральному углу третьего типа соответствует дуга, больше полуокружности. Всякой дуге, большей полуокружности соответствует центральный угол третьего типа.*

Доказательство

А) См. рис. 59 е). Пусть центральный $\angle AOB$ — угол первого типа. Проведем диаметр AC, тогда луч OB, согласно У20 п. 2.3.0, окажется в одной из полуплоскостей относительно прямой (AC). В силу У40 п. 2.3.0 он пересечет окружность в единственной точке B, находящейся в этой же полуплоскости. Эта точка — внутренняя точка дуги-полуокружности, расположенной в указанной полуплоскости. Согласно О14 дуга $\smile ApB$ меньше указанной дуги-полуокружности. Проведем хорду AB и выберем произвольную внутреннюю точку P на дуге AB, отвечающей центральному углу $\angle AOB$. Согласно О17 эта точка будет находиться во внутренней области $\angle AOB$, а потому в силу У26 п. 2.3.0 луч OM пересечет хорду AB в некоторой ее внутренней точке P'. В силу доказанного выше У5 п. 2.3.1 точка P' — точка, лежащая внутри окружности, следовательно, $|OM'| < |OM| = R$ (R — радиус этой окружности), а потому *отрезок* OM пересекает *отрезок* AB в точке P'. Это означает, что точка P и центр окружности O лежат в *разных* полуплоскостях относительно прямой (AB). Так как точка P на дуге $\smile ApB$ выбрана произвольно, мы получим, что в *соответствии с О12* дуга $\smile ApB$ меньше полуокружности.

Обратно, пусть дуга $\smile ApB$ меньше полуокружности в соответствии с О12, $\angle AOB$ — центральный угол. В соответствии с замечанием после определения 14 дуга $\smile ApB$ меньше дуги-полуокружности $\smile AnC$, поэтому точка B находится в той же полуплоскости относительно прямой (AC), в которой находятся все внутренние точки дуги $\smile AnC$. Следовательно, в силу У20 п. 2.3.0 в этой же полуплоскости будет находиться и луч OB, а потому центральный угол $\angle AOB$ будет меньше развернутого угла $\angle AOC$, во внутренней области которого находятся все внутренние точки дуги-полуокружности $\smile AnC$. Следовательно, центральный угол $\angle AOB$ — угол первого типа. Если провести через произвольную внутреннюю точку M дуги $\smile ApB$ луч OM, то в силу О12 он *пересечет* хорду AB в некоторой ее внутренней точке M', а потому этот луч (согласно У26 п. 2.3.0) будет проходить во внутренней области $\angle AOB$. Следовательно, в указанной внутренней области угла $\angle AOB$ будет находиться точка M, а в силу ее произвольности все внутренние точки дуги $\smile ApB$ будут в этой области. Согласно О17 это и означает, что центральный угол $\angle AOB$ соответствует дуге $\smile ApB$. В случае А) утверждение 7 доказано.

Б) См. рис. 59 е). Пусть центральный $\angle AOC$ — развернутый, где A и C — точки окружности $(O; R)$, поскольку точки A и C лежат на *разных лучах* с началом в точке O, то AC — диаметр окружности. Следовательно, множество всех точек окружности, находящихся в одной полуплоскости относительно прямой AC (внутренней области центрального угла $\angle AOC$),

и будет представлять собой (согласно О12) дугу-полуокружность, соответствующую этому центральному углу.

Обратно, пусть $\smile AnC$ — дуга-полуокружность, тогда хорда AC — диаметр окружности $(O;R)$, следовательно, стороны центрального угла $\angle AOC$ представляют собой взаимно дополнительные лучи. Поэтому $\angle AOC$ — развернутый угол, в качестве внутренней области которого берется полуплоскость, содержащая все внутренние точки дуги-полуокружности $\smile AnC$. Теперь и в случае Б) утверждение 7 доказано.

В) См. рис. 59 е). Пусть центральный $\angle AOD$ — угол третьего типа. Проведем диаметр AC , тогда луч OC, согласно У20 п. 2.3.0 и определению внутренней области такого угла, окажется во внутренней области этого угла. $\angle DOA$ — угол первого типа, дополняющий до полного угла угол $\angle AOD$ третьего типа. По доказанному в А) углу $\angle DOA$ соответствует дуга $\smile DnA$, меньшая полуокружности. Тогда, согласно выводам из О10 и О12, дополнительная ей дуга $\smile AmD$ будет больше полуокружности, причем множества внутренних точек этих дуг не имеют общих точек. Последнее означает, что всякая внутренняя точка M дуги $\smile AmD$ *не будет лежать* во внутренней области угла $\angle DOA$ (первого типа), следовательно, поскольку эта точка еще и отлична от точек A и D — концов дуги (они лежат на сторонах $\angle AOD$), она будет находиться *во внешней области* угла первого типа $\angle DOA$ и потому (см. О15 А) — Г) п. 2.3.0) она принедлежит *внутренней области* угла третьего типа $\angle AOD$. Полученный вывод означает, что, в соответствии с О17, дуга $\smile AmD$ больше полуокружности (причем в соответствии с О12) соответствует центральному углу $\angle AOD$ третьего типа.

Обратно, пусть дуга $\smile AmD$ больше полуокружности в соответствии с О12, $\angle AOD$ — соответствующий ей центральный угол. Тогда дуга $\smile AnD$, дополнительная по отношению к дуге $\smile AmD$, меньше полуокружности. По доказанному в А) ей соответствует центральный угол $\angle DOA$ первого типа. Так как множества внутренних точек дуг $\smile AmD$ и $\smile AnD$ не имеют общих точек, то в силу О17 дуге $\smile AnD$ может соответствовать центральный угол $\angle DOA$, *дополняющий до полного угла* центральный угол $\angle AOD$, и только он. Поскольку этот угол — первого типа, то $\angle AOD$ — угол третьего типа. Таким образом, доказан случай В) утверждения 7, а вместе с ним полностью — оно само.

Пусть имеются два центральных угла одной окружности или равных окружностей, а также пусть имеются две дуги одной окружности или равных окружностей.

Утверждение 8.

А) *Равным центральным углам соответствуют равные дуги. Равным дугам соответствуют равные центральные углы.*

Б) *Большему центральному углу соответствует большая дуга. Большей дуге соответствует больший центральный угол.*

В) *Меньшему центральному углу соответствует меньшая дуга. Меньшей дуге соответствует меньший центральный угол.*

Г) *Сумме (разности) центральных углов соответствует сумма (разность) дуг. Сумме (разности) дуг соответствует сумма (разность) центральных углов.*

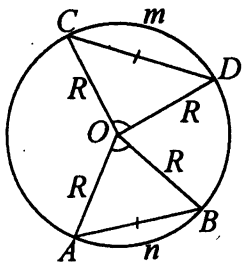


рис. 59 ж)

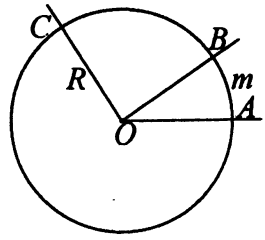


рис. 59 з)

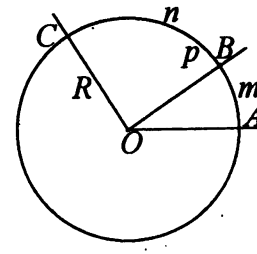


рис. 59 и)

Доказательства

Сначала проведем его для случая дуг одной окружности.

А) Если центральные углы — развернутые, то отвечающие им дуги — полуокружности или одной окружности, или равных окружностей. В силу У6 эти дуги равны. Если равные центральные углы — ненулевые и меньше развернутых углов (то есть — углы первого типа), например, $\angle AOB = \angle COD$, то (см. рис. 59 ж) $\triangle AOB = \triangle COD$ (по двум сторонам и заключенному между ними углу), так как $|OA| = |OC| = R$ и $|OB| = |OD| = R$. Следовательно, $AB = CD$ и в силу У6 $\smile AnB = \smile CmD$. Если центральные углы — нулевые (такие углы равны), то и соответствующие им дуги также нулевые и потому равны. Если центральные углы — полные (такие углы равны), то и соответствующие им дуги также полные и потому равны.

Обратно, если равные дуги — полуокружности, то соответствующие им центральные углы — развернутые, следовательно, они равны. Если равные дуги — нулевые то соответствующие им центральные углы — нулевые, следовательно, они равны. Если равные дуги — полные то соответствующие им центральные углы — полные, следовательно, они равны. Если равные дуги — ненулевые и меньше полуокружности, то в силу У6 равны стягивающие из хорды. См. выше рис. 59 в). Пусть D — конец одной из этих дуг, тогда по доказанному в замечании после О14 другой конец этой

дуги, точка C будет находиться в одной из полуплоскостей относительно прямой (OD), стало быть — во внутренней области развернутого угла $\angle DOD'$, точка D' — диаметрально противоположная точке D. Следовательно, в этой же полуплоскости будет находиться луч OC, а потому $\angle DOC$ — угол первого типа. Аналогично устанавливается, что $\angle AOB$ — угол первого типа. Следовательно, $\triangle AOB = \triangle COD$ (по трем сторонам), так как $AB = CD$ по условию и $|OA| = |OC| = R$ и $|OB| = |OD| = R$. Следовательно, $\angle AOB = \angle COD$. Б) доказано.

Справедливость утверждений 8 А) для центральных углов третьего типа и соответствующих им дуг, больших полуокружности следует из того, что два угла третьего типа равны тогда и только тогда, когда равны дополняющие их до полных углов — углы первого типа, которые по доказанному для них У8 А) и Б) равны тогда и только тогда, когда равны соответствующие им дуги — меньшие (в силу У7) полуокружности. Они в свою очередь (в силу У2) равны тогда и только тогда, когда равны дополнительные им дуги, большие полуокружности, которые (в силу У7) и соответствуют указанным углам третьего типа. Утверждение 8 для случая А) доказано.

Б) См. рис. 59 з). Пусть из двух центральных углов $\angle AOC$ и $\angle AOB$ $\angle AOC > \angle AOB$, $\smile AmC$ и $\smile AmB$ — дуги, отвечающие соответственно $\angle AOC$ и $\angle AOB$. Тогда согласно О22 п. 2.3.0 луч OB проходит во внутренней области $\angle AOC$, а потому он пересечет дугу $\smile AmC$, соответствующую центральному углу $\angle AOC$, в некоторой ее *внутренней точке* B, следовательно, согласно сформулированному выше О14 $\smile AmC > \smile AmB$.

Обратно, пусть из двух дуг $\smile AmC$ и $\smile AmB$ $\smile AmC > \smile AmB$, $\angle AmC$ и $\angle AmB$ — центральные углы, отвечающие соответственно дугам $\smile AOC$ и $\smile AOB$. Тогда согласно сформулированному выше О14 точка B является внутренней точкой дуги $\smile AmC$. Поэтому согласно О17 п. 2.3.0 точка B будет находиться во внутренней области соответствующего дуге $\smile AmC$ центрального угла $\angle AOC$. В силу У20 и У25 п. 2.3.0 луч OB будет находиться во внутренней области центрального угла $\angle AOC$. Согласно О22 п. 2.3.0 это означает, что $\angle AOC > \angle AOB$.

В) Доказательство для этого случая проводится на основе доказанного в случае Б) вследствие того, что в соответствии с определением соотношений $>$ и $<$ для углов и дуг имеем:

$\angle AOB < \angle AOC \Leftrightarrow \angle AOC > \angle AOB \Leftrightarrow \smile AmC > \smile AmB \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \smile AmB < \smile AmC$.

Г) См. рис. 59 и). Пусть $\angle AOB$ и $\angle BOC$ — два центральных угла,

$\angle AOC$ — их сумма, * $\smile AmB$, $\smile BnC$ и $\smile ApC$ — дуги, отвечающие соответственно $\angle AOB$, $\angle BOC$ и $\angle AOC$. Тогда, согласно определению суммы углов (см. О23 п. 2.3.0), луч OB проходит во внутренней области $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$, а потому он пересечет дугу $\smile ApC$, соответствующую центральному углу $\angle AOC$, в некоторой ее *внутренней точке* B, следовательно, согласно сформулированному выше О15 $\smile AmB + \smile BnC = \smile ApC$.

Обратно, пусть $\smile AmB$ и $\smile BnC$ — две дуги, $\smile ApC = \smile AmB + \smile BnC$, $\angle AOB$, $\angle BOC$ и $\angle AOC$ — центральные углы, отвечающие соответственно дугам $\smile AmB$, $\smile BnC$ и $\smile ApC$. Тогда, согласно сформулированному выше О14 точка B является внутренней точкой дуги $\smile ApC$. Поэтому согласно О17 п. 2.3.0 точка B будет находиться во внутренней области соответствующего дуге $\smile ApC$ центрального угла $\angle AOC$. В силу У20 и У25 п. 2.3.0 луч OB будет находиться во внутренней области центрального угла $\angle AOC$. Согласно О23 п. 2.3.0 это означает, что $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$.

Так как, согласно определению разности углов и дуг, например, $\angle AOB = \angle AOC - \angle BOC$, $\smile AmB = \smile ApC - \smile BnC$, из доказанных соответствий для сумм центральных углов и отвечающих им дуг непосредственно получаются соответствующие соответствия и для разностей центральных углов и отвечающих им дуг.

Если среди сравниваемых, слагаемых, вычитаемых или разностей (соответственно в случаях Б) и В) есть *нулевые* углы и соответствующие им дуги, то утверждения этих случаев вытекают из соответствующих определений сравнений, суммы и разности и случая А).

Итак, для случая дуг одной окружности утверждение 8 доказано.

Замечание. На основе доказанного в утверждении 8, случай А) и А15 п. 2.3.0 можно утверждать, что *для любой точки A на окружности $(O; R)$ в данной полуплоскости относительно прямой (OA) существует единственная точка B на этой окружности, такая, что дуга $\smile AmB$ равна заданной ненулевой дуге $\smile MpN$ радиуса R, меньшей полуокружности.*

Для этого согласно указанной А15 надо от луча OA в указанную полуплоскость относительно прямой (OA) отложить центральный угол, равный центральному углу, соответствующему дуге MpN. Сторона этого построенного угла пересечет окружность $(O; R)$ в указанной точке B.

Указанное утверждение легко распространяется и на случай дуги $\smile MpN$, большей полуокружности, если оговорить, в какой из полуплоскостей относительно прямой OA должна быть точка B. Для этого надо

* Предполагается, что эта сумма не превосходит полный угол.

применить это утверждение для дополнительной по отношению к ней дуге (которая меньше полуокружности) так, как это только что сказано.

Теперь утверждения 8 А), Б), В) уже легко могут быть перенесены и на случай дуг окружностей равных радиусов. Для этого необходимо предварительно *на одной* из этих окружностей построить дуги, равные соответствующим дугам на другой окружности так, чтобы можно было сравнивать, складывать или вычитать полученные дуги в соответствии с введенными определениями этих операций для дуг одной окружности.

Теперь утверждение 8 можно считать полностью доказанным.

Отметим, что в силу доказанных утверждений 8 А), Б), В) можно *для дуг одной окружности или равных окружностей* ввести: сравнение произвольных дуг сумму любого конечного количества совершенно произвольных дуг, сводя это к соответствующим операциям над отвечающим им центральным углам точно так же, как это делалось в п. 2.3.0. См. там соответствующие: О23А и следующие за ним рассуждения, О21Б, О23Б и следующие за ними рассуждения. Для дуг справедливы: аналоги У27, 28, 29 (для точек дуг) и следствий из них, аналоги У31А, 32, 35, 36 (для точек дуг и их внутренних областей), замечаний к ним и следствий из них.

Теперь, наконец, введем такое важное понятие, как *мера* дуги окружности. Выше, в п. 2.3.0 перед материалом об аксиоме параллельности прямых говорилось о градусной и радианной мерах угла, в частности, о единице измерения углов в градусной мере. Введем определение.

Определение 18. **Градусной мерой (величиной)** *дуги окружности мы будем называть градусную меру соответствующего ей центрального угла.*

В силу доказанного выше У8 для этой меры справедливы все ее свойства, фигурирующие в определении меры угла и вытекающие из него (см. О28 п. 2.3.0 и следствие из него).

Следует отметить, что из О18 непосредственно вытекает *независимость меры дуги окружности от ее радиуса.*

Замечание. Мы ввели таким образом меру дуги окружности по той причине, что мера угла нами введена была раньше. Таким же образом, *мера дуги окружности через меру соответствующего ей центрального угла* вводится в учебниках [5], [6], [7] и в книге [10]. Однако в учебнике [8] обратная картина: сначала вводится дуговой градус (1/360 часть полной дуги окружности), затем угловым градусом называют меру соответствующего такой дуге центрального угла. Следует отметить, что *радианная* мера центрального угла вводится через *длину дуги окружности, соответствующей этому углу, и ее радиус.* Однако длина дуги окружности зависит от ее радиуса и *градусной меры* соответствующего ей центрального угла

(см. [10], ¡ 17). О радианной мере угла пойдет речь ниже, в п. 2.3.2.

Рассмотрим еще и понятия таких *частей круга*, как *круговой сектор* и *круговой сегмент*.

Пусть задана окружность $(O; R)$ и ее дуга $\smile AmB$, $\angle AOB$ — соответствующий ей центральный угол.

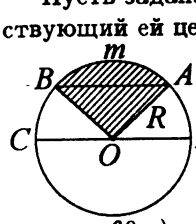


рис. 60 а)

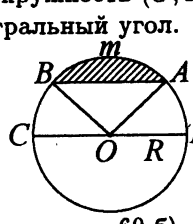


рис. 60 б)

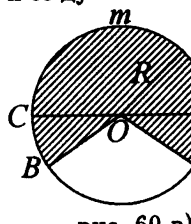


рис. 60 в)

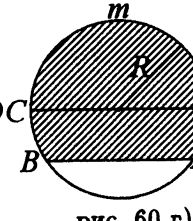


рис. 60 г)

Определение 19. **Круговым сектором**, *соответствующим центральному углу $\angle AOB$ или дуге $\smile AmB$, называется* **часть круга** *с центром в точке O радиуса R, состоящая из всех точек, лежащих во внутренней области угла $\angle AOB$.*

Определение 20. **Круговым сегментом**, *соответствующим дуге $\smile AmB$, называется* **часть круга** *с центром в точке O радиуса R, состоящая из всех точек, лежащих в той же полуплоскости относительно прямой AB , что и внутренние точки дуги $\smile AmB$.*

Замечание. Определения 19 и 20 означают, что введенные таким образом фигуры *не включают в себя* соответственно радиусы OA , OB круга и дугу $\smile AmB$ и — хорду AB и дугу $\smile AmB$, которые естественно назвать **границей**, а все их внутренние точки и концы — **граничными точками** этих фигур. Однако в принципе и эти точки можно относить к круговому сектору или сегменту, изменив соответствующим образом их определения.

На рис. 60 а) изображен круговой сектор, соответствующий центральному углу первого типа или дуге, меньшей полуокружности, его естественно считать круговым сектором, *содержащимся в полукруге или меньше полукруга.*

На рис. 60 б) изображен круговой сегмент, соответствующий дуге, меньшей полуокружности, его естественно считать круговым сегментом, *содержащимся в полукруге или меньше полукруга.*

На рис. 60 в) изображен круговой сектор, соответствующий центральному углу третьего типа или дуге, большей полуокружности, его естественно считать круговым сектором, *содержащим полукруг или больше полукруга.*

На рис. 60 г) изображен круговой сегмент, соответствующий дуге, большей полуокружности, его естественно считать круговым сегментом, *содержащим полукруг или больше полукруга.*

Отметим, что круговые сектор и сегмент, соответствующие полуокружности, естественно считать **равными полукругу**. Если они отвечают од-

ной и той же полуокружности, точек плоскости *они совпадают* (см. рис. 60 д).

Круговые сектор и сегмент, соответствующие полной дуге окружности, естественно считать **равными** соответствующему **кругу** (см. рис. 60 е).

Круговые сектор и сегмент, соответствующие нулевой дуге окружности, естественно считать *вырождающимися* соответственно в отрезок — радиус круга и в точку — нулевую дугу (см. рис. 60 ж).

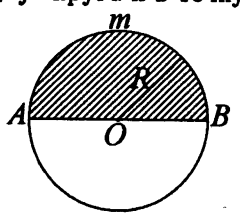


рис. 60 д)

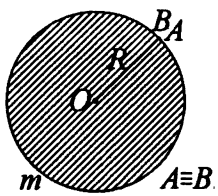


рис. 60 е)

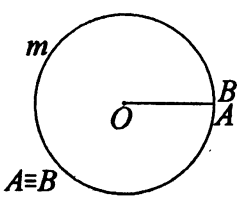


рис. 60 ж)

Завершая раздел об окружности, круге, их элементах и свойствах, остановимся еще на вопросе о равенстве двух круговых секторов и равенстве двух круговых сегментов.

Если определить *равными* два круговых сектора и *равными* два круговых сегмента как *совпадающие при наложении одного сектора на другой* и соответственно как *совпадающие при наложении одного сегмента на другой*, то по аналогии с О11 равенства двух дуг окружности предполагается, что в равных секторах одного круга совмещаются соответственно граничные радиусы и граничные дуги, в равных сегментах одного круга совмещаются соответственно граничные радиусы и граничные хорды. В равных кругах помимо только что указанных совмещений совмещаются еще и *центры* кругов.

Утверждение 9. Два круговых сектора или два круговых сегмента равны тогда и только тогда, когда равны ограничивающие их дуги или равны соответствующие им центральные углы при условии равенства радиусов соответствующих окружностей.

Доказательство

Для обоснования этого утверждения следует воспользоваться У8 А) и У6, на основании которых происходит совмещение граничных точек секторов или сегментов. Совмещение внутренних точек этих фигур происходит в силу следствия из У31А п. 2.3.0 о совмещении внутренних областей равных углов: первого типа (откуда вытекает соответствующее утверждение для равных углов третьего типа), развернутых углов и совмещения внутренних точек кругов (см. выше У4) и внутренних точек равных треугольников с вершинами в центре окружности и на концах равных дуг.

Вопрос 16. Теоремы о вписанных углах. Теорема об угле, образованном касательной и хордой. Свойство четырехугольника, вписанного в окружность

Вводная часть

См. выше в материале после вопроса 15 определение окружности, ее центра и радиуса (О1 и О2 п. 2.3.1). Там же см. О10 дуги окружности и связянных с ней понятий и выводов (до О11), из которых следует, что две различные точки окружности разбивают окружность на *две* дуги, не имеющие общих точек, кроме указанных двух точек — концов дуг.

Если, например, это точки A и B , то дуга окружности обозначается так: $\smile AB$, а конкретнее — $\smile AnB$ или $\smile AmB$, где символы n и m ставятся около соответствующей части окружности.

Определение 1. Угол с вершиной в центре окружности, стороны которого содержат точки этой окружности, * *называется ее* **центральным углом.**

Замечание. Если центральный угол развернутый, то эти точки разбивают эту окружность на две дуги, каждая из которых равна полуокружности. Если центральный угол меньше (больше) развернутого, то соответствующая ему дуга окружности, лежащая между ограничивающими ее точками, (по определению) меньше (больше) полуокружности (см. выше О12 п. 2.3.1 в материале после вопроса 15).

Выше, в О18 п. 2.3.1 (материала после вопроса 15) и после него говорилось о градусной и радианной мерах дуги окружности. Напомним, что *градусная мера дуги окружности, соответствующей центральному углу* (эта дуга расположена в его внутренней области), по определению *равна градусной мере этого угла.*

Единица измерения углов в градусной мере — угол, равный $1/90$ части прямого угла.

Определение 2. **Радианной мерой** *центрального угла и соответствующей ей дуги окружности называется отношение длины этой дуги к радиусу окружности.*

Единица измерения углов в радианной мере — это такой центральный угол, соответствующая дуга которого имеет длину равную радиусу этой окружности.

Из формулы для длины дуги окружности радиуса R , соответствующей центральному углу в n°, $l = \dfrac{\pi R}{180} \cdot n \;\Rightarrow\; \dfrac{l}{R} = \dfrac{\pi}{180} \cdot n$.

* Требование, чтобы стороны угла содержали бы точки окружности вызвано тем, чтобы стороны этого угла лежали в плоскости, содержащей окружность (см. А6 п. 2.3.0).

Мера дуги $\smile AB$ или $\smile AnB$ соответственно обозначается так: $\overset{\smile}{AB}$ или $\overset{\smile}{AnB}$.

Основная часть

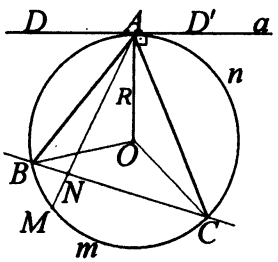


рис. 61 а)

Определение 3. Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется **вписанным в окружность.**

На рис. 61 а) $\angle BAC$ — вписанный в окружность $(O; R)$.

Из этого определения и У3 п. 2.3.1 (см. выше материал после вопроса 15) вытекает, что у ненулевого вписанного угла существуют только *три* общие точки с окружностью. Одна из них — его вершина, две другие — вторые точки пересечения каждой из его сторон с окружностью. Таким образом, эти три различные точки окружности разбивают ее на три дуги.

Определение 4. Дуга окружности с концами, отличными от вершины вписанного угла и не содержащая эту вершину, называется **дугой, соответствующей вписанному углу.**

Замечание. Про эту дугу еще говорят, что "на нее опирается вписанный угол".

На рис. 61 а) $\smile BmC$ — дуга, соответствующая вписанному углу $\angle BAC$.

Определение 5. Центральный угол, отвечающий той из дуг окружности, которая соответствует вписанному углу, называется **центральным углом, соответствующим этому вписанному углу.**

На рис. 61 а) центральный угол $\angle BOC$, соответствующий вписанному углу $\angle BAC$.

Замечание. Важно отметить, что поскольку дуга окружности, отвечающая центральному углу с вершиной в центре этой окружности (согласно введенному выше О17 материала перед вопросом 16), расположена во внутренней области этого угла, и согласно определению 4 этого вопроса эта дуга не содержит вершину вписанного (опирающегося на нее угла), эта вершина (будучи отличной от концов дуги) лежит *во внешней области* указанного центрального угла.

Следующие две теоремы следует отнести к дополнительной части этого вопроса, то есть знание их доказательств не является обязательным на экзаменах.

Теорема 1. Всякий угол, вписанный в окружность, является неразвернутым углом первого типа (см. О15А п. 2.3.0).

Доказательство.

См. рис. 61 а). Пусть A — вершина вписанного угла. Проведем радиус OA и через точку A (в плоскости окружности) проведем прямую $a \perp (OA)$. В силу доказанного выше У3 (в материале после вопроса 15) поскольку в этом случае $\rho(O;a) = R$, прямая a *имеет с окружностью единственную общую точку* A . После доказательства У5 указанного в скобках материала было получено, что все точки окружности (кроме точки A) лежат в одной полуплоскости относительно прямой a. Следовательно, в силу У20 п. 2.3.0 лучи AB и AC — стороны вписанного угла $\angle BAC$ будут в той же самой полуплоскости. В силу У27 и У29 п. 2.3.0 один и только один из лучей AB или AC будет проходить, например, между лучом $AD \in a$ и другим из них. Пусть это будет луч AB , тогда поскольку согласно О22 п. 2.3.0 $\angle DAC < \angle DAD'$ — развернутого и $\angle CAB < \angle DAC$ в силу следствия 1 из У36 п. 2.3.0 $\angle CAB < \angle DAD'$ — развернутого. Поскольку $\angle CAB$ — ненулевой угол, то он — угол первого типа. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Всякая внутренняя точка дуги BmC *, соответствующей вписанному углу* $\angle BAC$ *лежит во внутренней области этого угла. Обратно, всякая точка внутренней области вписанного угла* $\angle BAC$ *, лежащая на окружности (в которую вписан* $\angle BAC$*) является внутренней точкой дуги* $\smile BmC$ *этой окружности, соответствующей этому углу.*

Доказательство

См. рис. 61 а). Пусть M — произвольная внутренняя точка дуги $\smile BmC$. Так как точка A — вершина центрального угла не является внутренней точкой дуги $\smile BmC$, то согласно О10 п. 2.3.1 (см. материал после вопроса 15) точка M лежит в разных с точкой A полуплоскостях относительно прямой (BC) . Следовательно, отрезок AM пересечет прямую (BC) в некоторой точке N . В силу У5 п. 2.3.1 $\rho(O;N) < R$ (так как N — внутренняя точка отрезка AM — хорды окружности $(O;R)$) , а потому N — внутренняя точка отрезка BC — хорды окружности $(O;R)$. В силу У26 п. 2.3.0 так как луч AM пересекает отрезок BC в его внутренней точке N и согласно теореме 1 $\angle BAC$ — угол первого типа, луч AM , а стало быть, и точка M проходит во внутренней области вписанного угла $\angle BAC$.

Обратно, пусть M — произвольная точка окружности, в которую вписан угол $\angle BAC$, лежащая в его внутренней области. Предположим, что эта точка не является внутренней точкой дуги $\smile BmC$, соответствую-

щей углу $\angle BAC$. Поскольку точка M не лежит ни на какой из сторон угла $\angle BAC$, она будет отлична от точек B и C , следовательно, она будет внутренней точкой дополнительной дуги $\smile BnC$. Последнее означает, что точка M *лежит в одной полуплоскости* с точкой A относительно прямой (BC) . Стало быть, отрезок AM *не пересекает* прямую (BC) . В то же время луч AM , проходя во внутренней области угла $\angle BAC$, *пересечет* (в силу У26 п. 2.3.0) хорду BC (а потому и прямую (BC)) в некоторой ее внутренней точке N . Следовательно, *точка N не лежит между точками A и M*. С другой стороны, так как точка N — внутренняя точка хорды BC, то в силу доказанного выше У5 п. 2.3.1 (см. материал после вопроса 15) *она будет лежать внутри окружности* $(O; R)$, а потому в силу того же У5 *точка N будет внутренней точкой хорды AM , то есть она будет лежать между точками A и M*. Пришли к противоречию со следствием из У5 п. 2.3.0 (о существовании одной и только одной из трех точек прямой, лежащих между двумя другими). Таким образом, точка M — внутренняя точка дуги $\smile BmC$. Теорема 2 полностью доказана.

Замечание. Доказанная теорема 2 означает, что *все внутренние точки дуги окружности, на которую опирается вписанный в окружность угол, и только они лежат в его внутренней области.*

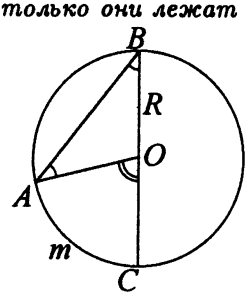


рис. 61 б)

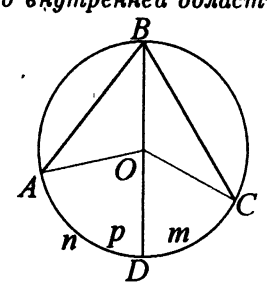


рис. 61 в)

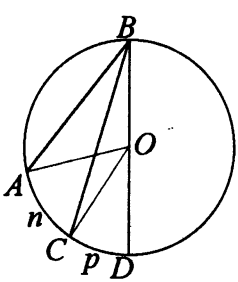


рис. 61 г)

Теорема 3. Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего ему центрального угла.

Доказательство

Рассмотрим три случая:

а) одна из сторон вписанного угла — диаметр;

б) центр окружности лежит во внутренней области угла;

в) центр окружности лежит во внешней области угла.

А) См. рис. 61 б). Пусть $\angle ABC$ — вписанный, $\angle AOC$ — соответствующий ему центральный, $\smile AmC$ — соответствующая этим углам дуга, BC — диаметр окружности. Тогда точка A , отличная от точек B и C будет внутренней точкой одной из полуокружностей BmC . Рассмотрим $\triangle AOB$,

он равнобедренный, так как $OB = OA$ как радиусы одной окружности. В силу свойств равнобедренного треугольника (см. теорему 1 вопроса 3) $\angle ABO = \angle OAB$, $\angle AOC$ — внешний угол $\triangle AOB$ (поскольку он смежный с $\angle AOB$). В силу теоремы 2 вопроса 5 $\angle AOC = \angle ABO + \angle BAO =$ $= 2\angle ABO$, откуда $\angle ABC = \angle AOC/2$. Для случая 1) теорема 3 доказана.

Б) См. рис. 61 в). Проведем диаметр BD . Тогда (в силу У20 п. 2.3.0) луч BD , а стало быть, и точка D будут во внутренней области вписанного угла $\angle ABC$. Дуга $\smile AnD$ — соответствующая вписанному углу $\angle ABD$, дуга $\smile CpD$ — соответствующая вписанному углу $\angle CBD$, дуга $\smile AmC$ — соответствующая вписанному углу $\angle ABC$. По доказанному в теореме 2 точка D — внутренняя точка дуги $\smile BmC$, соответствующей вписанному углу $\angle ABC$. Согласно определениям суммы дуг и суммы углов $\smile BmC = \smile BnD + \smile DpC$ и $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$, а также в силу У8 Г) п. 2.3.1 (см. материал после вопроса 15) $\angle AOC = \angle AOD + \angle DOA$. По доказанному в случае 1) $\angle ABD = \angle AOD/2$, $\angle CBD = \angle COD/2$. В силу свойств арифметических операций над углами (см. замечание после У46 п. 2.3.0) $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \angle AOD/2 + \angle DOC/2 = \angle AOC/2$. Для случая 2) теорема 3 доказана.

В) См. рис. 61 г). Проведем диаметр BD . Тогда (в силу У27 и У29 п. 2.3.0) или луч B пройдет между лучами BD и BA , или луч BA пройдет между лучами BD и BC . Для определенности пусть луч B пройдет между лучами BD , следовательно, луч B (а потому и точка C) будет во внутренней области вписанного угла $\angle DBA$. Дуга $\smile AnD$ соответствует вписанному углу $\angle ABD$, дуга $\smile CpD$ соответствует вписанному углу $\angle CBD$, дуга $\smile AnC$ соответствует вписанному углу $\angle ABC$. По доказанному в теореме 2 точка C — внутренняя точка дуги $\smile AnD$, соответствующей вписанному углу $\angle ABC$. Согласно определениям разности дуг и разности углов $\smile AnC = \smile AnD - \smile CpD$ и $\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD$, а также в силу У8 Г) п. 2.3.1 (см. материал после вопроса 15) $\angle AOC = \angle AOD - \angle COD$. По доказанному в случае 1) $\angle ABD = \angle AOD/2$, $\angle CBD = \angle COD/2$. В силу свойств арифметических операций над углами (см. замечание после У46 п. 2.3.0) $\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD = \angle AOD/2 - \angle COD/2 = \angle AOC/2$. Для случая 3) теорема 3 также доказана. Следовательно, она доказана полностью.

Замечание 1. Утверждение этой теоремы легко распространяется на случай, когда вписанный угол — нулевой. Тогда соответствующая ему дуга и центральный угол — нулевые.

Замечание 2. По такой же схеме (используя теорему 2) можно доказать, что сумма произвольного конечного количества вписанных в одну окружность углов, причем как имеющих общую вершину, так и не имеющих ее

(в последнем случае надо заменить очередной слагаемый вписанный угол на равный ему вписанный угол, имеющий фиксированную вершину) равна полусумме соответствующих им центральных углов. Аналогичное утверждение можно доказать и для разности вписанных в одну окружность углов.

Замечание 3. Согласно этой теореме мера вписанного угла равна мере соответствующего ему центрального угла, деленной на 2, что равно половине меры дуги окружности между точками, в которых стороны вписанного угла пересекают окружность. Поэтому часто эта теорема формулируется так: *угол, вписанный в окружность, измеряется половиной дуги, на которую он опирается.* Согласно замечанию 2 аналогичное утверждение будет иметь место и для суммы произвольного конечного количества вписанных в одну окружность углов, и для разности таких углов.

Следствие 1. Из теоремы 2 и на основе У8 п. 2.3.1 (см. материал после вопроса 15) вытекает, что:

а) *равным вписанным углам соответствуют равные центральные углы и дуги, на которые они опираются, и наоборот, вписанные углы, опирающиеся на одну дугу или равные дуги одной окружности или равных окружностей равны, в частности, вписанный угол — прямой тогда и только тогда, когда он опирается на полуокружность* или (как часто говорят) *опирается на диаметр* ;

б) *большему (меньшему) вписанному углу соответствует больший (меньший) центральный угол, а, стало быть, большая (меньшая) дуга, на которые они опираются, и наоборот, из двух вписанных в одну окружность или равные окружности углов больше (меньше) тот из них, который опирается на большую (меньшую) дугу, в частности, вписанный в окружность угол — острый (тупой) тогда и только тогда, когда дуга, на которую он опирается меньше (больше) полуокружности.*

Определение 6. Прямая, лежащая с окружностью в одной плоскости и имеющая с ней **одну и только одну (единственную)** *общую точку, называется* **касательной** *к окружности, а их общая точка —* **точкой касания.**

Ниже, в вопросе будет доказано, что *прямая, лежащая с окружностью в одной плоскости, будет касательной к этой окружности тогда и только тогда, когда она перпендикулярна к радиусу окружности, проведенному в точку касания.*

Определение 7. Угол с вершиной в точке касания, одна из сторон которого является частью касательной к окружности, а вторая содержит хорду окружности (является секущей), называется **углом между касательной и секущей** *(или* **углом, образованным касательной и хордой***).*

Теорема 4. Угол, образованный касательной и хордой, равен половине центрального угла, соответствующего стягиваемой этой хордой дуге (измеряется половиной дуги, заключенной внутри него), см. рис. 61 д), е), ж).

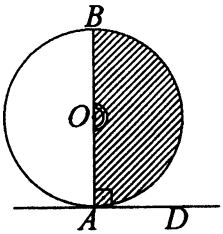


рис. 61 д)

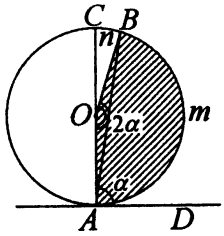


рис. 61 е)

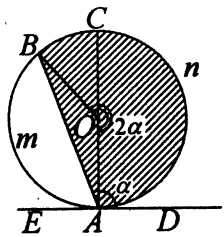


рис. 61 ж)

Доказательство

Пусть прямая (AD) — касательная к окружности с центром O, A — точка касания. Рассмотрим следующие случаи.

1) AB — хорда, являющаяся диаметром (см. рис. 61 д). Тогда, согласно теореме о касательной $AB \perp (AD)$, а потому $\angle DAB$ — прямой, а центральный угол $\angle AOB$ — развернутый. Так как прямой угол равен половине развернутого угла, то для этого случая теорема доказана.

2) $\angle DAB$ — острый, AC — диаметр (см. рис. 61 е), следовательно, $AC \perp (AD)$. Согласно определению острого угла (как меньшего прямого), луч AB проходит во внутренней области прямого угла $\angle DAC$. Следовательно, согласно определению разности углов $\angle DAB = \angle DAC - \angle BAC$. Поскольку по условию AB — хорда окружности, то $\angle CAB$ — вписанный в указанную окружность угол. Точка B — внутренняя точка той полуокружности $\smile AmC$, все внутренние точки которой лежат во внутренней области прямого угла $\angle DAC$. Пусть точка A не является внутренней точкой дуги $\smile CnB$, тогда на эту дугу опирается вписанный угол $\angle CAB$ и $\angle COB$ — соответствующий ему центральный угол. Так как лучи OA и OB — взаимно дополнительные, то углы $\angle COB$ и $\angle AOB$ — смежные, а потому $\angle AOB = \angle AOC - \angle BOC$ ($\angle AOC$ — развернутый). В силу теоремы 3 $\angle BAC = \angle BOC/2$, а в силу полученного в случае 1) $\angle DAC = \angle AOC/2$, следовательно $\angle DAB = \angle DAC - \angle BAC = \angle AOC/2 - \angle BOC/2 =$
$= (\angle AOC - \angle BOC)/2 = \angle AOB/2$.

Для случая 2 теорема доказана.

Замечание. В силу доказанной выше теоремы 2 все внутренние точки дуги $\smile AnB$ и только они находятся во внутренней области вписанного угла $\angle BAC$. Дуги $\smile AnB$ и $\smile AmB$ не имеют общих внутренних точек, так как они находятся (согласно О17 п. 2.3.1) в *не пересекающихся* внутренних областях соответствующих им *смежных* центральных углов

$\angle COB$ и $\angle BOA$. Следовательно, все внутренние точки дуги $\smile AmB$ и только они, находясь во внутренней области прямого угла $\angle DAB$ и не находясь во внутренней области вписанного угла $\angle AB$ и на луче AB , будут находиться во внутренней области $\angle DAB$ (о чем говорилось в скобках при формулировке этой теоремы).

3) $\angle DAB$ — тупой, AC — диаметр (см. рис. 61 ж), следовательно, $AC \perp (AD)$. Согласно определению тупого угла (как большего прямого), луч AC проходит во внутренней области тупого угла $\angle DAB$. $\angle EAB$ — смежный с углом $\angle DAB$ является острым. По доказанному в случае 2) $\angle EAB = \angle AOB/2$, где $\angle AOB$ — тот центральный угол, который соответствует дуге $\smile AnB$. Этот центральный угол равен разности *полного* центрального угла $\angle AOA$ и центрального угла $\angle AOB$, соответствующего $\smile AmB$. Поскольку $\angle DAB = \angle DAE - \angle EAB$ ($\angle DAE$ — развернутый и потому равный половине полного угла), то мы и получаем справедливость утверждения теоремы 4 и для этого случая.

Замечание. Так как дуги $\smile AmB$ и $\smile AnB$ являются взаимно дополнительными, то они не имеют общих внутренних точек. Все внутренние точки дуги $\smile AnB$ и только они (согласно предыдущему замечанию) находятся во внутренней области угла $\angle EAB$. Поскольку внутренние области смежных углов $\angle EAB$ и $\angle DAB$, обе находясь в одной полуплоскости относительно прямой (DE) (в которой находятся все точки окружности, кроме точки A) *не имеют общих точек*, Следовательно, все внутренние точки дуги $\smile AmB$ и только они, находясь во внутренней области развернутого угла $\angle DAB$ и не находясь во внутренней области угла $\angle EAB$ и на луче AB будут находиться во внутренней области $\angle DAB$ (о чем говорилось в скобках при формулировке этой теоремы).

Теперь теорему 4 можно считать полностью доказанной.

Определение 8. Если все вершины четырехугольника лежат на окружности, то он называется **вписанным** *в окружность, а окружность называется* **описанной** *около этого четырехугольника.*

Мы будем рассматривать только *выпуклые* вписанные четырехугольники.

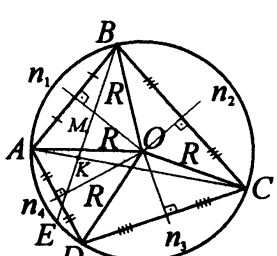


рис. 62 а)

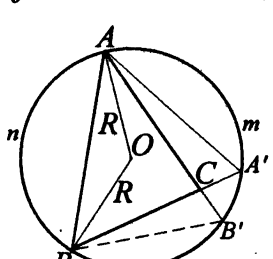


рис. 62 б)

Теорема 5. В любом вписанном в окружность выпуклом четырехугольнике сумма градусных (радианных) мер противолежащих углов равна $180°$ *(числу* π*).*

Доказательство

См. рис. 62 а). Рассмотрим пару противолежащих углов вписанного в окружность $(O;R)$ четырехугольника $ABCD$: $\angle ABC$ и $\angle ADC$. Каждый из них является вписанным в эту окружность, $\angle ABC$ опирается на дугу $\smile ADC$, а $\angle ADC$ опирается на дугу $\smile ABC$. Указанные дуги не имеют общих точек (об этом подробнее в дополнительной части вопроса) и их сумма равна полной дуге окружности, стало быть, полусумма этих дуг равна полуокружности, которой измеряется развернутый угол. Согласно замечаниям 2 и 3 к доказанной теореме 3 следует, что $\angle ABC + \angle ADC$ равна развернутому углу. Утверждение относительно суммы градусных (радианных) мер этих углов вытекает из определения меры угла (см. О28 п. 2.3.0) и того, что градусная (радианная) мера развернутого угла равна $180°$ (π). Доказательство для случая суммы другой пары противолежащих углов четырехугольника $ABCD$ проводится аналогично. Можно также, используя доказанное для углов $\angle ABC$ и $\angle ADC$, применить теорему о равенстве полному (удвоенному развернутому) углу суммы всех внутренних углов четырехугольника $ABCD$. Теорема 5 доказана.

Дополнительная часть

Имеет место и теорема, обратная теореме 5. Однако для ее доказательства нам потребуется теорема, обратная теореме 3.

Теорема 6 (обратная теореме 3). *Пусть стороны угла проходят через концы дуги окружности* $\smile AnB$*, вершина его лежит в полуплоскости относительно прямой* (AB) *, в которой расположена дополнительная дуга* $\smile AmB$ *. Тогда если этот угол равен половине центрального угла, отвечающего дуге* $\smile AnB$ *, то его вершина лежит на дуге* $\smile AmB$*.*

Другими словами, если угол измеряется половиной дуги окружности $\smile AnB$ и его вершина расположена в полуплоскости, содержащей дополнительную ей дугу $\smile AmB$, то он является вписанным в окружность, опирающимся на дугу $\smile AnB$.

Доказательство

Доказательство будет использовать теоремы следующих вопросов, доказательство которых можно провести до обоснования утверждения этой теоремы.

Пусть O — центр окружности, R — ее радиус, C — вершина указанного в условии теоремы угла. Предположим, что она не лежит на дуге $\smile AmB$. Тогда пусть она лежит внутри окружности, см. рис. 62 б). Проведем прямые через точки A и C и через точки B и C , поскольку точка C (по условию) не лежит на прямой (AB) , она является точкой пересечения

прямых (BC) и (AC) и $\rho(O;(BC)) \leqslant |OC| < R$, $\rho(O;(AC)) \leqslant |OC| < R$. В силу У5 п. 2.3.1 (см. материал после вопроса 15) прямая AC кроме точки A пересечет окружность $(O;R)$ еще в одной точке B' , прямая BC кроме точки B пересечет окружность $(O;R)$ еще в одной точке A' . В силу У5 п. 2.3.1 C — внутренняя точка обеих хорд AB' и BA' (стало быть она является их точкой пересечения, откуда следует, что точки B' и A' различные). В силу У20 п. 2.3.0 точки B' и A' будут в той же полуплоскости относительно прямой (AB) , что и точка C , а потому они будут *внутренними точками* дуги $\smile AmB$, дополнительной дуге $\smile AnB$. Соединим отрезком, например, точки A и A' . По доказанному в теореме 3 $\angle AA'B = \angle AOB/2$. Поскольку точка C является внутренней точкой хорды BA' , лучи CB и CA' являются взаимно дополнительными, поэтому $\angle BCA$ — смежный с углом $\angle ACA'$ $\triangle ACA'$ является внешним углом $\triangle ACA'$. В силу теоремы 4 вопроса 2 $\angle BCA > \angle BA'A$, что противоречит равенству $\angle BCA = \angle AOB/2$. Поэтому этот случай не возможен. Отметим, что доказательство можно было проводить, соединяя отрезком точки B и B' .

Рассмотрим случаи, когда точка C лежит вне окружности. Соединим ее отрезками с точками A и B . Возможны следующие варианты. Один из отрезков CA или CB и дуга $\smile AmB$ будут иметь общую внутреннюю точку (см. рис. 62 в), г), д), для определенности пусть это будет отрезок CA (для отрезка CB все рассматривается аналогично).

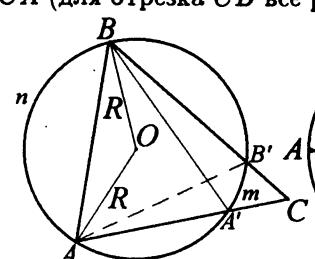


рис. 62 в)

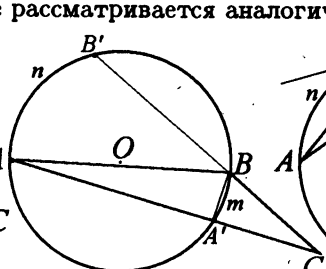


рис. 62 г)

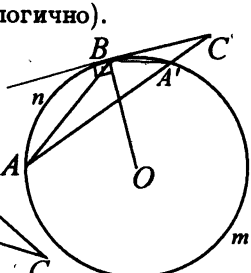


рис. 62 д)

Соединим отрезком точки B и A' , где A' — общая внутренняя точка отрезка CA и дуги $\smile AmB$. Аналогично случаю, когда точка C была внутри окружности, $\angle BA'A$ — вписанный в окружность угол, опирающийся на дугу $\smile AnB$, который является внешним углом $\triangle BA'C$, не смежным с углом $\angle BCA$, следовательно, в силу теоремы 4 вопроса 2 и теоремы 3 этого вопроса $\angle BCA < \angle BA'A = \angle AOB/2$, что противоречит равенству $\angle BCA = \angle AOB/2$. Поэтому эти случи невозможны.

Никакой из отрезков CA или CB и дуга $\smile AmB$ не имеют общих внутренних точек (см. рис. 62 е), ж), з).

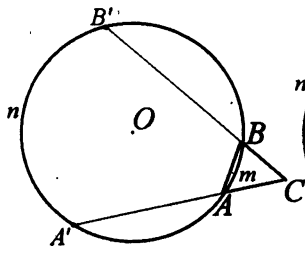


рис. 62 е)

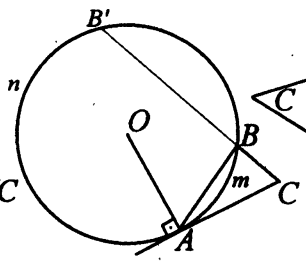


рис. 62 ж)

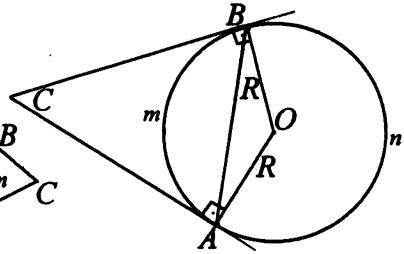


рис. 62 з)

Будем использовать меры углов и дуг.

В силу теоремы 2 вопроса 17 (см. рис. 62 е)

$\widehat{ACB} = (\overset{\smile}{A'nB'} - \overset{\smile}{AmB})/2 < (\overset{\smile}{AnB} - \overset{\smile}{AmB})/2 < \overset{\smile}{AnB}/2$, что противоречит равенству $\widehat{ACB} = \overset{\smile}{AnB}/2$;

в силу теоремы 3 вопроса 17 (см. рис. 62 ж)

$\widehat{ACB} = (\overset{\smile}{AnB'} - \overset{\smile}{AmB})/2 < (\overset{\smile}{AnB} - \overset{\smile}{AmB})/2 < \overset{\smile}{AnB}/2$, что противоречит равенству $\widehat{ACB} = \overset{\smile}{AnB}/2$;

в силу теоремы 4 вопроса 17 (см. рис. 62 з)

$\widehat{ACB} = (\overset{\smile}{AnB} - \overset{\smile}{AmB})/2 < \overset{\smile}{AnB}/2$, что также противоречит равенству $\widehat{ACB} = \overset{\smile}{AnB}/2$.

Следовательно, и эти случи невозможны. А потому точка C может лежать только на дуге окружности $\overset{\smile}{AmB}$. Теорема 6 доказана.

Теорема 7 (обратная теореме 5). ***Если суммы пар противолежащих внутренних углов выпуклого четырехугольника равны, то около него можно описать единственную окружность.***

Доказательство

Прежде всего отметим, что в силу теоремы о равенстве полному (удвоенному развернутому) углу суммы всех внутренних углов четырехугольника $ABCD$ из условий теоремы вытекает, что сумма каждой пары противоположных внутренних углов четырехугольника $ABCD$ будет равна развернутому углу (сумма их градусных и радианных мер соответственно равны $180°$ и π).

В силу теоремы об окружности, описанной около треугольника, (см. ниже вопрос 19) существует единственная окружность, проходящая, например, через вершины A, B, D четырехугольника $ABCD$. Требуется доказать, что она пройдет и через четвертую вершину C этого четырехугольника. Пусть O — центр этой окружности, R — радиус.

См. выше рис. 62 а). Так как диагонали выпуклого четырехугольника пересекаются как отрезки, (см. теорему 1 вопроса 7), то точки C и A находятся в разных полуплоскостях относительно прямой (BD) . Поскольку $\angle BAD$ — вписанный в окружность, опирающийся на дугу $\smile AmB$, то в силу теоремы 3 этого вопроса $\widehat{BAD} = \smile BnD\ /2$. По условию $\widehat{BCD} =$ $= 180° - \widehat{BAD} = (360° - \smile BnD)/2 = \smile BnD)/2$, дуга $\smile AnB$ — дополнительная по отношению к дуге $\smile AmB$, следовательно, в силу теоремы 6 точка C является внутренней точкой дуги $\smile AmB$, то есть построенная окружность пройдет и через точку C . Итак, существование описанной окружности около четырехугольника $ABCD$ доказано. Предполагая, существование еще одной окружности, проходящей через вершины A , B , C и D , мы придем к противоречию с единственностью окружности, описанной около, например, $\triangle ABC$. Теорема 7 доказана.

Следствие. Из рассмотренных выше четырехугольников *окружность можно описать около: квадрата, прямоугольника* (см. вопрос 7), *и равнобедренной трапеции* (в силу теоремы 2 вопроса 12 у равнобедренной трапеции сумма противолежащих углов равна развернутому углу).

Доказанные теоремы 5 и 7 позволяют утверждать о том, что *около выпуклолого четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противолежащих внутренних углов равны.*

Поскольку наличие описанной около четырехугольника окружности означает наличие равноудаленной от всех его вершин точки (центра окрудности), то согласно теоремам 4 и 6 *около четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда существует общая точка у всех серединных перпендикуляров к его сторонам.*

Если все эти серединные перпендикуляры различные, то они пересекаются в одной точке (см. рис. 62 а). Однако некоторые из них могут лежать на одной прямой, например, в случае прямоугольника и равнобедренной трапеции.

Отметим некоторые особенности четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность $(O; R)$, изображенного выше, на рис. 62 а).

Каждая из его сторон является хордой описанной около него окружности. Порядок вершин этого четырехугольника A , B , C , D такой, что: точки C и D являются внутренними точками дуги, дополнительной дуге $\smile An_1B$; точки D и A являются внутренними точками дуги, дополнительной дуге $\smile Bn_2C$; точки A и B являются внутренними точками дуги, дополнительной дуге $\smile Cn_3D$; точки B и C являются внутренними точками дуги, дополнительной дуге $\smile Dn_4A$. Его внутренние углы: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ и $\angle D$ являются вписанными в эту окружность. Стало быть, в силу

теоремы 1 они являются углами первого типа, а потому четырехугольник $ABCD$ является выпуклым.

Обратно, пусть вписанный четырехугольник $ABCD$ является выпуклым, все его стороны (как стороны любого вписанного в окружность четырехугольника) будут хордами этой окружности. Проводя прямую, содержащую какую-либо из его сторон (например AB), мы получим, что вершины четырехугольника C и D будут в одной полуплоскости относительно прямой (AB) . Следовательно, на одной из дуг $\smile An_1B$ (не лежащей в этой полуплоскости) не будет находиться ни одной из этих вершин. Аналогично обосновывается существование такого же рода дуг $\smile Bn_2C$, $\smile Cn_3D$ и $\smile Cn_4D$. Отметим, что так как все внутренние точки дуги, например, $\smile An_1B$ лежат в разных полуплоскостях относительно прямой (AB) со всеми внутренними точками и вершинами C и D , и аналогичная ситуация имеет место и относительно любой другой из этих дуг, то каждая точка окружности, отличная от вершин вписанного четырехугольника, является внутренней точкой одной и только одной из дуг $\smile An_1B$, $\smile Bn_2C$, $\smile Cn_3D$, $\smile Dn_4A$. Сумма всех этих дуг равна полной дуге окружности. Следовательно, аналогичная ситуация имеет место и для пары взаимно дополнительных дуг $\smile ABC$ и $\smile ADC$, и пары взаимно дополнительных дуг $\smile DAB$ и $\smile DCB$.

Далее поскольку точки C и D лежат в одной полуплоскости со всеми внутренними точками четырехугольника $ABCD$, то все внутренние точки дуги $\smile An_1B$ *не лежат* в этой полуплоскости. Следовательно, эти точки, а потому и все точки соответствующего кругового сегмента An_1B *лежат во внешней области* этого четырехугольника. Аналогичный вывод можно сделать относительно внутренних точек дуг $\smile Bn_2C$, $\smile Cn_3D$, $\smile Cn_4D$ и соответствующих круговых сегментов Bn_2C , Cn_3D , Dn_4A .

Если выбрать произвольную точку M во внутренней области четырехугольника $ABCD$, то как отмечалось в вопросе 6, это означает, что она будет находиться во внутренней области любого из его внутренних углов. При этом она может быть внутренней точкой одной из его диагоналей (поскольку в силу теоремы 1 вопроса 7 все внутренние точки диагонали выпуклого четырехугольника находятся в его внутренней области), например, диагонали AC , являющейся хордой окружности, тогда она будет находиться (в силу У5 п. 2.3.1) внутри окружности. Если точка M не лежит на диагонали AC , она будет находиться в одной из полуплоскостей относительно прямой (AC) , для определенности пусть она будет *в той же полуплоскости, что и точка* B . Это означает (см. определение 2 вопроса 1 и там же замечание после определения 6), что она будет во внутренней области $\triangle ABC$. Если провести луч BM , то в силу У26 п. 2.3.0 он пересечет

диагональ AC в некоторой ее внутренней точке K . Так как отрезок BM не пересекает прямую (AC) , точка M лежит между точками B и K. Точка K — внутренняя точка хорды AC , в силу У5 п. 2.3.1 она будет внутри окружности. Вследствие этого (как уже неоднократно ранее отмечалось) прямая (BM) пересечет окружность еще в одной точке E (кроме точки B), причем в силу У5 п. 2.3.1 точка K будет внутренней точкой хорды BE. Итак, точка M лежит между точками B и K , точка K лежит между точками B и E , поэтому в силу У8 п. 2.3.0 точка M лежит между точками B и E, следовательно, M — внутренняя точка хорды BE , а потому в силу У5 п. 2.3.1 она будет внутри окружности. Аналогично рассматривается случай принадлежности точки M внутренней области $\triangle ADC$. Таким образом, *всякая внутренняя точка четырехугольника, вписанного в окружность, является внутренней точкой этой окружности.*

Замечание. Ниже, в п. 2.3.2 будет рассмотрен вопрос о вписанном в окружность выпуклом многоугольнике с произвольным количеством сторон n $(n \geqslant 5)$.

Вопрос 17. Теоремы об угле между двумя пересекающимися хордами и об угле между двумя секущими, выходящими из одной точки

Вводная часть

См. выше, в материале после вопроса 15 определение окружности, ее центра и радиуса, хорды, секущей (О1, О2, О4, О5 п. 2.3.1). Там же см. О10 дуги окружности, связянных с ней понятий и выводов (до О11), обозначения для дуг, см. также О18 и определение 2 вопроса 16 соответственно градусной и радианной меры дуги окружности и как обозначается мера дуги.

Основная часть

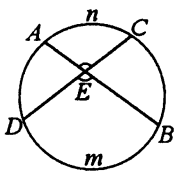


рис. 63 а)

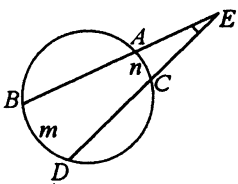


рис. 63 б)

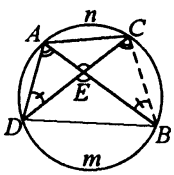


рис. 63 в)

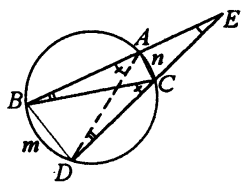


рис. 63 г)

Пусть AB и CD — две хорды в окружности, пересекающиеся в точке E. При пересечении сторон углов $\angle AEC$ и $\angle BED$ окружностью образуются соответственно ее дуги $\smile AC$ и $\smile BD$ (см. рис. 63 а).

Теорема 1. Мера каждого из углов $\angle AEC$ и $\angle BED$ равна полусумме мер дуг $\smile AnC$ и $\smile BmD$, то есть

$$\widehat{AEC} = \widehat{BED} = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{AnC} + \overset{\smile}{BmD}\right) .$$

Другими словами, *каждый из углов* $\angle AEC$ *и* $\angle BED$ *измеряется полусуммой дуг* $\smile AnC$ *и* $\smile BmD$.

Доказательство

См. рис. 63 в). Так как E — точка пересечения отрезков AB и CD, она является внутренней точкой каждого из них. Поэтому лучи EA и EB — взаимно дополнительные, и также лучи EC и ED — взаимно дополнительные, поэтому углы $\angle AEC$ и $\angle BED$ — вертикальные (поэтому равные). Соединим отрезком точки D и A , а также соединим отрезком точки A и C . $\angle AEC$ — смежный с углом $\angle DEA$, а потому он является внешним углом треугольника $\triangle AED$. В силу теоремы 1 вопроса 6 $\angle AEC = \angle ADC + \angle DAB$. Так как угол $\angle ADC$ — вписанный в окружность, опирающийся на дугу $\smile AnC$, $\angle DAB$ — также вписанный в окружность, опирающийся на дугу $\smile BmD$, то в силу теоремы 3 вопроса 16:

$\widehat{ADC} = \dfrac{\smile AnC}{2}$, $\widehat{DAB} = \dfrac{\smile BmD}{2}$, а в силу замечания 3 к этой теореме

$\widehat{AEC} = \widehat{BED} = \dfrac{1}{2}\left(\smile AnC + \smile BmD\right)$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Доказательство этой теоремы можно было провести, например, соединяя отрезками точки B и C , а также A и C , при этом $\angle ADC = \angle ABC$ (как опирающиеся на одну дугу $\smile AnC$) , а $\angle DAB =$ $= \angle DCB$ (как опирающиеся на одну дугу $\smile BmD$, см. рис. 63 в).

Пусть из точки E , лежащей вне окружности, проведены к ней две секущие. Одна из них пересекает окружность в точках A и B , другая пересекает ее в точках C и D (см. рис. 63 б).

Теорема 2. Мера угла между секущими, выходящими из точки E *, равна полуразности мер дуг окружности, заключенных между ними, то есть*

$$\widehat{AEC} = \widehat{BED} = \frac{1}{2}\left(\smile BmD - \smile AnC\right) .$$

Другими словами, *каждый угол между секущими, выходящими из одной точки, лежащей вне окружности, измеряется полуразностью дуг этой окружности, заключенных между ними.*

Доказательство

См. рис. 63 г). Точка E лежит *вне окружности*, поэтому, согласно У5 п. 2.3.1, она *не может быть внутренней точкой ни одной из хорд* AB и CD . Пусть A и B — точки пересечения секущей (EB) , проведенной из точки E с окружностью, причем для определенности точка A лежит между точками E и B , а также пусть и D — точки пересечения секущей (ED) , проведенной из точки E с окружностью, причем для определенности точка C лежит между точками E и D . Соединим отрезком точки B и C. Поскольку лучи CD и CE взаимно дополнительные, $\angle BCD$ — внешний

угол $\triangle BCE$, следовательно (см. выше теорему 1 вопроса 6), $\angle BCD = \angle EBC + \angle BED$, а потому $\angle BED = \angle BCD - \angle EBC$. Так как угол $\angle ABC$ — вписанный в окружность, опирающийся на дугу $\smile AnC$, $\angle BCD$ — также вписанный в окружность, опирающийся на дугу $\smile BmD$, то в силу теоремы 3 вопроса 16:

$\widehat{ABC} = \frac{\smile AnC}{2}$, $\widehat{DAB} = \frac{\smile BmD}{2}$, а в силу замечания 3 к этой теореме $\widehat{AEC} = \widehat{BED} = \frac{1}{2}\left(\smile BmD - \smile AnC\right)$. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Так как $\angle BCD > \angle ABC$ (поскольку внешний угол треугольника больше любого его внутреннего угла, не смежного ним), то в силу следствия 1 б) теоремы 3 вопроса 16 $\smile BmD > \smile AnC$.

Замечание 2. Доказательство этой теоремы можно было провести, соединяя отрезками точки A и D, при этом $\angle ADC = \angle ABC$ (как опирающиеся на одну дугу $\smile AnC$), а $\angle ABC = \angle ADC$ (как опирающиеся на одну дугу $\smile BmD$, см. рис. 63 г).

Дополнительная часть

Замечание 2. (к теореме 1, см. рис. 63 в). В силу того, что E — внутренняя точка отрезков AB и CD, точка A не лежит между точками E и B, точка не лежит между точками E и D, поэтому точки B и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой (AC). Следовательно, эти точки являются внутренними точками дуги $\smile AmC$ (дополнительной по отношению к дуге $\smile AnC$), а потому (см. рассуждения после доказательства У8 п. 2.3.1), все внутренние точки дуги $\smile BmD$ (стало быть, вся эта дуга) лежит внутри дуги $\smile AmC$. Аналогично в силу того, что E — внутренняя точка отрезков AB и CD, точка B не лежит между точками E и A, точка D не лежит между точками E и C, поэтому точки A и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой (BD). Следовательно, эти точки являются внутренними точками дуги $\smile BnD$ (дополнительной по отношению к дуге $\smile BmD$), а потому все внутренние точки дуги $\smile AnC$ (стало быть, вся эта дуга) лежит внутри дуги $\smile BnD$. Таким образом, дуги $\smile AnC$ и $\smile BmD$ *не имеют как общих концов, так и внутренних точек.*

Замечание 3. (к теореме 2, см. рис. 63 г). В силу того, что точка A лежит между точками E и B и точка лежит между точками E и D, точка B не лежит между точками E и A и точка D не лежит между точками E и C, поэтому точки B и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой (AC) (в которой не лежит точка E), поэтому эти точки являются внутренними точками дуги $\smile AmC$ (дополнительной по отношению к дуге $\smile AnC$), следовательно, все внутренние точки дуги $\smile BmD$ (стало быть,

вся эта дуга) лежит внутри дуги $\smile AmC$. Аналогичным образом точки A и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой (BD) (в которой лежит точка E), поэтому эти точки являются внутренними точками дуги $\smile BnD$ (дополнительной по отношению к дуге $\smile BmD$), следовательно, все внутренние точки дуги $\smile AnC$ (стало быть, вся эта дуга) лежит внутри дуги $\smile BnD$. Таким образом, дуги $\smile AnC$ и $\smile BmD$ *не имеют общих как концов, так и внутренних точек.*

Рассмотрим некоторые обобщения теоремы 2.

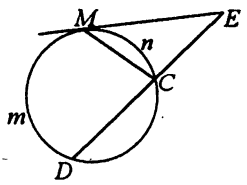


рис. 63 д)

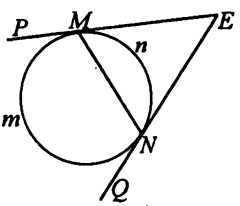


рис. 63 е)

Пусть из точки E , лежащей вне окружности, проведены к ней касательная EM (M — точка касания) и секущая, пересекающая окружность в точках C и D (см. рис. 63 д).

Теорема 3. Мера угла между касательной и секущей, выходящими из точки E , равна полуразности мер дуг окружности, заключенных между ними, то есть

$$\widehat{MEC} = \widehat{MED} = \frac{1}{2}\left(\breve{MmD} - \breve{MnC}\right) .$$

Другими словами, *каждый угол между касательной и секущей, выходящими из одной точки, лежащей вне окружности, измеряется полуразностью дуг этой окружности, заключенных между ними.*

Доказательство

См. рис. 63 д). Точка E лежит *вне окружности*, поэтому согласно У5 п. 2.3.1 она *не может быть внутренней точкой хорды* CD . Пусть C и D — точки пересечения секущей (ED) , проведенной из точки E с окружностью, причем для определенности точка C лежит между точками E и D, а также M — точка касания прямой (EM) с окружностью (единственная их общая точка). Соединим отрезком точки M и C . Поскольку лучи CD и CE взаимно дополнительные, $\angle MCD$ — внешний угол $\triangle MCE$, следовательно (см. выше теорему 1 вопроса 6), $\angle MCD = \angle MEC + \angle CME$, а потому $\angle MED = \angle MCD - \angle CME$. Так как угол $\angle MCD$ — вписанный в окружность, опирающийся на дугу $\smile MmD$, $\angle MCE$ — угол, образованный касательной и хордой, стягивающий дугу $\smile MnC$, то в силу теорем 3 и 4 вопроса 16:

$\widehat{MCD} = \dfrac{\overset{\smile}{MmD}}{2}$, $\widehat{CME} = \dfrac{\overset{\smile}{MnC}}{2}$, поэтому

$\widehat{MEC} = \widehat{MED} = \dfrac{1}{2}\left(\overset{\smile}{MmD} - \overset{\smile}{MnC}\right)$. Теорема 3 доказана.

Имеют место аналоги замечаний 1 (оно таким же образом доказывается) и 3 к теореме 2: $\smile MmD > \smile MnC$, дуги $\smile MmD$ и $\smile MnC$ *не имеют общих концов (кроме точки M), и общих внутренних точек.*

Пусть из точки E , лежащей вне окружности, проведены к ней касательные EM и EN (M и N — точки касания) (см. рис. 63 е).

Теорема 4. Мера угла между касательными, выходящими из точки E, равна полуразности мер дуг окружности, заключенных между ними, то есть

$$\widehat{MEN} = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{MmN} - \overset{\smile}{MnN}\right) .$$

Другими словами, *каждый угол между касательными, выходящими из одной точки, лежащей вне окружности, измеряется полуразностью дуг этой окружности, заключенных между ними.*

Доказательство

См. рис. 63 е). Точка E лежит *вне окружности*, M и N — точки касания прямых (EM) и (EN) с окружностью (больше касательных, проведенных к окружности из точки N нет, об этом см. ниже, вопрос 21). Соединим отрезком точки M и N . Поскольку лучи NQ и NE взаимно дополнительные, $\angle MNQ$ — внешний угол $\triangle MNE$, следовательно (см. выше теорему 1 вопроса 6), $\angle MNQ = \angle MEN + \angle NME$, а потому $\angle MEN = \angle MNQ - \angle NME$. $\angle NME$ и $\angle MNE$ — углы, образованные соответственно касательными (EM) и (EN) и хордой MN , стягивающий дугу $\smile MnC$, $\angle NMP$ и $\angle MNQ$ — углы, образованные соответственно касательными (EM) и (EN) и хордой MN , стягивающий дугу $\smile MmC$, в силу теоремы 4 п. 2.3.1 $\widehat{MNQ} = \dfrac{\overset{\smile}{MmN}}{2}$, $\widehat{NME} = \dfrac{\overset{\smile}{MnN}}{2}$, поэтому

$\widehat{MEN} = \dfrac{1}{2}\left(\overset{\smile}{MmN} - \overset{\smile}{MnM}\right)$. Теорема 4 доказана.

Имеют место аналоги замечаний 1 (оно таким же образом доказывается) и 3 к теореме 2: $\smile MmN > \smile MnN$, дуги $\smile MmN$ и $\smile MnN$ *имеют общие концы (точки M и N), и не имеют общих внутренних точек.*

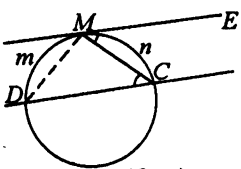


рис. 63 ж)

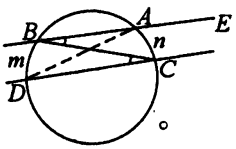


рис. 63 з)

Теорема 5. Пусть из точки E , лежащей вне окружности, проведена к ней касательная EM (M — точка касания), секущая (CD) , пересекающая окружность в точках C и D , причем $(CD) \parallel (EM)$, тогда $\smile DmM = \smile MnC$.

Доказательство

См. рис. 63 ж). Соединим отрезком точки M и C , при этом точки E и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой (MD) . Следовательно, если точка E лежит в одной полуплоскости с точками дуги окружности $\smile MnC$, то точка D будет лежать в полуплоскости, содержащей точки дуги $\smile MmC$, дополнительной по отношению к дуге $\smile MnC$, а потому точка D — внутренняя точка дуги $\smile MnC$. $\angle MCD$ — вписанный в окружность, опирающийся на дугу $\smile MmD$, $\angle CME$ — угол, образованный лучом ME (полукасательной) и хордой MC , с другой стороны, $\angle MCD$ и $\angle CME$ — внутренние накрест лежащие при $(CD) \parallel (ME)$ и секущей (MC) , следовательно, $\angle MCD = \angle CME$, а потому (в силу теорем 3 и 4 вопроса 16) $\smile DmM = \smile MmC$. Отметим, что поскольку D — внутренняя точка дуги $\smile MmC$, дуга $\smile MmD < \smile MmC \Rightarrow \smile MnC < \smile MmD$, что означает: дуга $\smile MnC$ меньше полуокружности, дуга $\smile MmC$ больше полуокружности. Теорема 5 доказана.

Замечание 1. Поскольку угол между параллельными прямыми можно считать нулевым, а $\smile MmD - \smile MnC = 0$, то и в этом случае получаем справедливость утверждения теоремы 3.

Замечание 2. Доказательство теоремы 5 можно было провести и путем соединининения отрезком точек M и D , далее аналогичными рассуждениями (см. рис. 63 ж).

Теорема 6. Пусть проведены две секущие к окружности: секущая (CD) параллельна секущей (AB), пересекающие окружность соответственно в точках C и D , и в точках A и B , тогда $\smile DmB = \smile CnA$.

Доказательство

См. рис. 63 з). Пусть для определенности точки A , B , C и D выбраны так, что если соединить отрезком точки B и C , то при этом точки A и D будут лежать в разных полуплоскостях относительно прямой (BC). Следовательно, точки D и A лежат на взаимно дополнительных дугах $D \in \smile BmC$ и $A \in \smile CnA$. $\angle BCD$ и $\angle CBE$ — внутренние накрест лежащие при $(CD) \parallel (AB)$ и секущей (BC) , следовательно, $\angle BCD = \angle CBA$, а потому (в силу теоремы 3 вопроса 16) $\smile DmB = \smile CnA$. Отметим, что поскольку D — внутренняя точка дуги $\smile BmC$, A — внутренняя точка дуги $\smile BnC$, причем одна из этих дуг заведомо не превосходит полуокружности, каждая из дуг $\smile BmD$ и $\smile AnC$ меньше полуокружности. Теорема 6 доказана.

Замечание 1. Поскольку угол между параллельными прямыми можно считать нулевым, а $\overset{\smile}{BmD} - \overset{\smile}{AnC} = 0$, то и в этом случае получаем справедливость утверждения теоремы 3.

Замечание 2. Если соединить отрезками точки B и D, а также точки A и C (в силу У20 п. 2.3.0 внутренние точки отрезков BD и CA будут находиться в разных полуплоскостях относительно прямой (BC), а потому ввиду различия всех четырех точек A, B, C и D хорды BD и AC *не имеют общих точек*), то в силу У6 п. 2.3.1 (см. материал после вопроса 15) $BD = AC$, а потому вписанный в окружность четырехугольник $DBAC$ — равнобедренная трапеция (при $CD \neq AB$) и — прямоугольник при $BD = AC$ (см. определения 1 вопроса 12 и определение 7 вопроса 7).

Замечание 3. Доказательство теоремы 6 можно было провести и путем соедининения отрезком точек A и D, далее аналогичными рассуждениями (см. рис. 63 з).

Вопрос 18. Равенство произведений длин отрезков двух пересекающихся хорд. Равенство квадрата длины отрезка касательной произведению длины отрезка секущей на длину ее внешней части

Вводная часть

См. выше, в материале после вопроса 15 определение окружности, ее центра и радиуса (О1, О2 п. 2.3.1). Помимо этого будут использованы понятия хорды, секущей (О4, О5 п. 2.3.1), отрезка секущей, внешней части секущей, каяательной, которые мы приведем в основной части этого вопроса.

Основная часть

Определение 1. **Хордой окружности** *называется отрезок, соединяющий ее две точки. Хорда, проходящая через центр, называется* **диаметром.**

По длине диаметр в два раза больше радиуса.

Определение 2. Прямая, пересекающая окружность (то есть имеющая с ней две общие точки), называется **секущей.**

Определение 3. Прямая, лежащая с окружностью в одной плоскости и имеющая с ней единственную общую точку, называется **касательной.** *Указанная общая точка называется* **точкой касания** *прямой и окружности.*

Пусть из точки E, лежащей вне окружности $(O; R)$, к ней проведена секущая, пересекающая ее в точках A и B, где точка A лежит между точками E и B.

Определение 4. Отрезок EB называется **отрезком секущей,** *отрезок EA называется* **внешней частью секущей (отрезка секущей).**

Пусть из точки E , лежащей вне окружности $(O;R)$, к ней проведена касательная, M — точка касания.

Определение 5. Отрезок EM называется **отрезком касательной**.

Отметим, что в силу У13 п. 2.3.0 всякая внутренняя точка P отрезка секущей EB , отличная от точки A , лежит или во внутренней области отрезка AB (тогда в силу У5 п. 2.3.1 она лежит и внутри окружности), или — во внутренней области отрезка EA (тогда в силу У5 п. 2.3.1 она лежит вне окружности). В этом и заключается смысл названия "внешняя часть секущей (отрезка секущей)".

Также отметим, что в силу У3 (обоснование случая 2) п. 2.3.1 всякая точка P касательной к окружности (в том числе и всякая внутренняя точка отрезка касательной EM), отличная от точки касания M , лежит вне окружности.

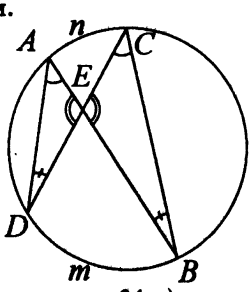


рис. 64 а)

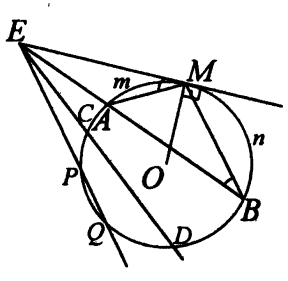


рис. 64 б)

Теорема 1. Пусть в окружности проведены две хорды AB и CD, причем $AB \cap CD = E$. Тогда $|AE| \cdot |BE| = |CE| \cdot |DE|$.

Доказательство

Прежде всего отметим, что так как точкой пересечения отрезков, *лежащих на разных прямых*, считается их общая *внутренняя точка*, то точкой пересечения двух хорд AB и CD будет *их общая внутренняя точка E* . Поскольку точки A и B лежат на разных полупрямых прямой (AB) относительно точки E , точки C и D лежат на разных полупрямых прямой (CD) относительно точки E ; $A, B \notin (CD)$, $C, D \notin (AB)$, то A, B, C и D — *четыре различные точки* одной окружности и $\angle AED$, $\angle CEB$ — вертикальные (см. рис. 64 а). Рассмотрим треугольники: $\triangle AED$ и $\triangle CEB$, у них $\angle AED = \angle CEB$ как вертикальные, $\angle DAB = \angle DCB$ как вписанные в окружность, опирающиеся на одну дугу $\smile BmD$. Следовательно, $\triangle AED \sim \triangle CEB$ (по двум углам), а потому:

$$\frac{|DE|}{|BE|} = \frac{|AE|}{|CE|} \Leftrightarrow |AE| \cdot |BE| = |CE| \cdot |DE| .$$ Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если из одной точки E к окружности проведены касательная EM (M — точка касания) и секущая (EB) , где A и B точки

ее пересечения с окружностью, точка A лежит между точками E и B, то $|EM|^2 = |EA| \cdot |EB|$.

Доказательство

Прежде всего отметим, что так как прямая (EM) — касательная, а прямая (EB) — секущая, то в силу УЗ п. 2.3.1 это *различные прямые*, а потому M, A, B и E — *четыре различные точки*, первые три из них расположены на окружности, точка E — вне окружности (см. рис. 64 б). Соединим отрезком точки A и M , а также — точки B и M . Рассмотрим треугольники: $\triangle EMA$ и $\triangle EMB$. Точки A и B *лежат на одном луче* с началом в точке E , поэтому у этих треугольников внутренний угол $\angle MEA$ — общий, $\angle AME$ — угол, образованный касательной ME и хордой MA, стягивающей дугу $\smile AmM$, $\angle MBE$ — угол, вписанный в окружность, опирающийся на ту же дугу $\smile AmM$. В силу теорем 3 и 4 вопроса 16 $\widehat{AME} = \widehat{MBE} = \smile AmM \,/2$, следовательно, $\triangle MEA \sim \triangle BEM$ (по двум углам), а потому:

$$\frac{|EA|}{|EM|} = \frac{|EM|}{|EB|} \Leftrightarrow |EA| \cdot |EB| = |EM|^2 .$$ Теорема 2 доказана.

Следствие. Произведение длин отрезков любой проведенной из точки E секущей и ее внешней части, постоянно и равно квадрату длины касательной, проведенной из этой же точки.

См. рис. 64 б) $|EA| \cdot |EB| = |EC| \cdot |ED| = |EP| \cdot |EQ| = |EM|^2$.

Дополнительная часть

Замечание 1 (к теореме 2). Существование касательной и секущей, проведенных из точки E , лежащей вне окружности $(O; R)$, к этой окружности вытекает из возможности построить такую касательную (об этом см. ниже, в вопросе 21). Затем если выбрать произвольную внутреннюю точку на радиусе OM и провести через нее и точку E прямую, то поскольку расстояние от центра окружности до этой прямой будет заведомо меньше R , в силу УЗ п. 2.3.1 она пересечет окружность в двух точках (то есть будет секущей).

Замечание 2 (к теореме 2). Ниже, в вопросе 21 о свойствах касательной к окружности будет показано, что из точек фигурирующей в ней окружности внутренние точки дуг $\smile AmM$ и $\smile BnM$ (см. рис. 64 б) и только они лежат во внутренней области угла $\angle MEB$.

Справедливы утверждения, обратные к утверждениям теорем 1 и 2.

Теорема 3. Пусть прямые (AB) и (CD) пересекаются в точке E , причем точка E является или внутренней точкой каждого из отрезков AB и CD , или она является внешней точкой каждого из этих отрезков, тогда точки A , B , C , D лежат на одной окружности.

Доказательство

Из условий теоремы вытекает, что точки A , B и C не лежат на одной прямой, а потому (см. ниже вопрос 19) через них можно провести единственную окружность. Если E — точка пересечения отрезков AB и CD , то будучи внутренней точкой отрезка AB она будет (в силу У5 п. 2.3.1) внутренней точкой построенной окружности, а потому прямая (CE) пересечет окружность в точке D' , причем такой, что E — внутренняя точка отрезка CD' , стало быть (в силу У15 п. 2.3.0) точки D и D' лежат на *одном луче* ED с началом в точке E . В силу теоремы 1 с одной стороны, $|ED'| = |EA| \cdot |EB|/|EC|$, с другой стороны, по условию $|ED| = |EA| \cdot |EB|/|EC|$, следовательно $|ED'| = |ED|$, а потому согласно У40 п. 2.3.0 точки D и D' совпадают. Если E — внешняя точка каждого из отрезков AB и CD (для определенности предположим, что точка C лежит между точками E и D , точки C и D лежат на одном луче с началом в точке E), то, проводя окружность через точки A , B и C , мы получим, что она или будет пересекать прямую (CD) еще в одной точке D'' или будет касаться окружности в точке C (то есть $D'' \equiv C$). В силу теоремы 2, с одной стороны, $|ED''| = |EA| \cdot |EB|/|EC|$. С другой стороны, по условию $|ED| = |EA| \cdot |EB|/|EC|$, следовательно, $|ED''| = |ED|$. В силу У5 п. 2.3.1 так как точка E является внешней точкой отрезка AB , то она лежит вне построенной окружности. Пусть точки C и D'' — различные. Точка D'' не может быть на луче, дополнительном по отношению к лучу EC . Если это так, то точка E — внутренняя точка отрезка CD , а потому в силу У5 п. 2.3.1 она будет лежать внутри окружности, что неверно. Итак, точка D'' лежит на том же луче с началом в точке E , а потому согласно У40 п. 2.3.0 точки D и D'' совпадают. Если $D'' \equiv C$, то так как тогда $|EC| = |ED''| = |ED|$, при том, что C и D — точки одного луча с началом в точке E , будет следовать совпадение точек C и D . Если по условию это не так, то случай $D'' \equiv C$ не возможен. Если же $D \equiv C$, то C — точка касания построенной окружности. Теорема 3 доказана.

Вопрос 19. Теорема об окружности, описанной около треугольника

Вводная часть

См. выше, в вопросе 1 определение треугольника, в материале после вопроса 15 определение окружности, ее центра и радиуса (см. О1, О2 п. 2.3.1). Помимо этого будет использовано понятие хорды (см. О4 п. 2.3.1).

Основная часть

Определение. Окружность называется **описанной около треугольника**, *если она проходит через все его вершины. При этом треугольник называется* **вписанным в окружность**.

Теорема. Около любого треугольника можно описать окружность, причем единственную, центр этой окружности является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Доказательство

Существование точки пересечения серединных перпендикуляров сначала к двум сторонам треугольника, а затем — к трем сторонам было доказано выше (см. теорему 1 вопроса 14). Это доказательство надо провести. Пусть это точка O . Так как эта точка, находясь на каждом из серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, будет (в силу теоремы 4 вопроса 4) равноудалена (на некоторое расстояние $R > 0$), то окружность с центром в точке O радиуса R будет проходить через все три вершины треугольника, то есть будет описана около него. Предположим, что существует еще одна описанная около треугольника окружность $(O'; R')$. Ее центр O' будет точкой, равноудаленной от всех сторон треугольника, следовательно (в силу теоремы 6 вопроса 4), эта точка будет совпадать с точкой пересечения трех серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Ввиду единственности такой точки $O' \equiv O$. Так как расстояние от точки O до любой из вершин треугольника определено однозначно, то $R' = R$, откуда вытекает единственность описанной около треугольника окружности. Теорема доказана.

Дополнительная часть

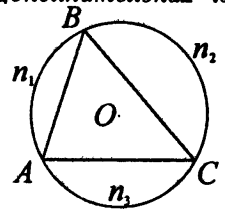


рис. 65 а)

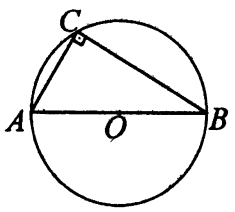


рис. 65 б)

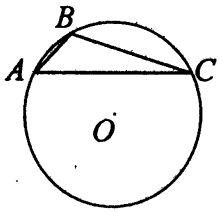


рис. 65 в)

Рассмотрим вопрос о местоположении центра описанной около треугольника окружности. Каждая из сторон треугольника является его хордой, а каждый внутренний угол — углом, вписанным в окружность.

Если треугольник остроугольный (то есть все его внутренние углы острые, см. рис. 65 а), то в силу следствия 1 б) теоремы 3 вопроса 16 дуги, на которые опираются эти углы, меньше полуокружности. Согласно О12 п. 2.3.1 (см. материал после вопроса 15) это означает, что центр O описанной около него окружности лежит *в одной полуплоскости* с точкой A относительно прямой (BC) , лежит *в одной полуплоскости* с точкой B относительно прямой (AC) и лежит *в одной полуплоскости* с точкой C относительно прямой (AB) , то есть согласно определению 2 вопроса 1 центр O *лежит во внутренней области* треугольника.

Если треугольник прямоугольный (то есть у него есть прямой внутренний угол, см. рис. 65 б), то в силу теоремы 4, случай 1) вопроса 16 дуга, на которую опирается прямой угол, равна полуокружности. А потому сторона треугольника, противолежащая прямому углу (то есть гипотенуза), которая стягивает полуокружность, является диаметр описанной около треугольника окружности. Следовательно, центр этой окружности *O совпадает с серединой гипотенузы.*

Если треугольник тупоугольный (то есть у него есть тупой внутренний угол, см. рис. 65 в), то в силу следствия 1 б) теоремы 3 вопроса 16 дуга, на которую опирается тупой угол, больше полуокружности. Согласно О12 п. 2.3.1 (см. материал после вопроса 15) это означает, что центр O описанной около него окружности и вершина тупого угла A лежат *в разных полуплоскостях* относительно прямой (BC) . Согласно определению 2 вопроса 1 это означает, что центр *O лежит во внешней области* треугольника.

Поскольку каждый из видов треугольников: остроугольный, тупоугольный, прямоугольный исключает два других вида, то легко от противного доказать обратные утверждения полученным выводам о местоположении центра описанной около треугольника окружности.

Отметим еще некоторые особенности $\triangle ABC$, вписанного в окружность $(O;R)$ на примере изображенного на рис. 65 а).

Вершина A этого треугольника является внутренней точкой дуги, дополнительной по отношению к дуге $\smile Bn_2C$; вершина B является внутренней точкой дуги, дополнительной по отношению к дуге $\smile An_3C$; вершина C является внутренней точкой дуги, дополнительной по отношению к дуге $\smile An_1B$. Следовательно, на каждой из дуг $\smile An_1B$, $\smile Bn_2C$, $\smile Cn_3A$ не лежит ни одной из вершин $\triangle ABC$. Так как все внутренние точки дуги $\smile An_1B$ лежат в разных полуплоскостях относительно прямой (AB) с вершиной C , в одной полуплоскости относительно прямой (BC) с точкой A и в одной полуплоскости относительно прямой (AC) с точкой B (поскольку как отмечалось в вопросе 16 все эти точки окружности и только они лежат во внутренней области угла $\angle BCA$), аналогично все внутренние точки дуги $\smile Bn_2C$ лежат в разных полуплоскостях относительно прямой (BC) с вершиной A , в одной полуплоскости относительно прямой (AC) с точкой B и в одной полуплоскости относительно прямой (AB) с точкой C , все внутренние точки дуги $\smile Cn_3A$ лежат в разных полуплоскостях относительно прямой (CA) с вершиной B , в одной полуплоскости относительно прямой (BC) с точкой A и в одной полуплоскости относительно прямой (AB) с точкой C , то каждая точка окружности, отличная от вершин вписанного треугольника, является внутренней точкой одной и только одной из дуг $\smile An_1B$, $\smile Bn_2C$, $\smile Cn_3A$. Сумма всех этих дуг

равна полной дуге окружности. Таким образом, все внутренние точки дуги $\smile An_1B$ *лежат во внешней области* угла $\angle BAC$ и *лежат во внешней области* угла $\angle ABC$, тем самым эти точки, а потому и все точки соответствующего кругового сегмента An_1B *лежат во внешней области* $\triangle ABC$. Аналогичный вывод можно сделать относительно внутренних точек дуг $\smile Bn_2C$, $\smile Cn_3D$ и соответствующих круговых сегментов Bn_2C, Cn_3D.

Если выбрать произвольную точку M во внутренней области $\triangle ABC$, то как отмечалось в вопросе 1, это означает, что она будет находиться, например, в одной из полуплоскостей относительно прямой (AC) с точкой B, а также — во внутренней области угла $\angle ABC$. Если провести луч BM, то в силу У26 п. 2.3.0 он пересечет сторону AC в некоторой ее внутренней точке K. Так как отрезок BM не пересекает прямую (AC), точка M лежит между точками B и K. Точка K — внутренняя точка хорды AC, в силу У5 п. 2.3.1 она будет внутри окружности. Вследствие этого (как уже неоднократно ранее отмечалось) прямая (BM) пересечет окружность еще в одной точке E (кроме точки B), причем в силу У5 п. 2.3.1 точка K будет внутренней точкой хорды BE. Итак, точка M лежит между точками B и K, точка K лежит между точками B и E, поэтому в силу У8 п. 2.3.0 точка M лежит между точками B и E, следовательно, M — внутренняя точка хорды BE, а потому в силу У5 п. 2.3.1 она будет внутри окружности. Таким образом, *всякая внутренняя точка треугольника, вписанного в окружность, является внутренней точкой этой окружности.*

Вопрос 20. Теорема синусов для треугольника

Вводная часть

См. выше, в вопросе 1 определение треугольника, в материале после вопроса 15 определение окружности, ее центра и радиуса (см. О1, О2 п. 2.3.1). В вопросе 9 см. о синусе величины угла треугольника.

Основная часть

Теорема. Стороны треугольника пропорциональны синусам величин противолежащих углов, причем отношение длины стороны треугольника к синусу величины противолежащего ей угла есть величина постоянная, равная длине диаметра описанной около треугольника окружности,

то есть если a, b, c *— длины сторон треугольника,*

α, β, γ *— величины противолежащих им углов, то*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

где R *— радиус (длина радиуса) описанной около треугольника окружности.*

Доказательство

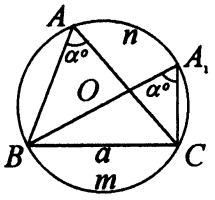


рис. 66 а)

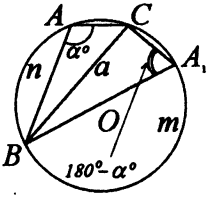


рис. 66 б)

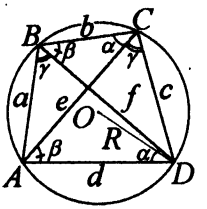


рис. 66 в)

Опишем окружность $(O; R)$ около треугольника ABC . Рассмотрим случаи.

$\angle BAC$ — острый (см. рис. 66 а), тогда (см. выше вопрос 16) дуга $\smile BmC$, на которую опирается угол $\angle BAC$, меньше полуокружности, следовательно, центр O и вершина A лежат в одной полуплоскости относительно прямой (BC) . Поэтому, если провести диаметр BA_1 , то (в силу У20 п. 2.3.0) все его точки (кроме точки B), в том числе и конец A_1 окажутся в той же полуплоскости относительно прямой (BC) , что и точка A , стало быть, точки A и A_1 будут внутренними точками одной дуги $\smile BnC$, дополнительной по отношению к дуге $\smile CmB$. Таким образом, $\angle BAC$ и $\angle BA_1C$ — вписанные в окружность углы, опирающиеся на одну дугу $\angle BmC$, а потому (см. вопрос 16) $\angle BAC = \angle BA_1C$, откуда $\widehat{BA_1C} = \widehat{BAC} = \alpha^\circ$. В треугольнике BA_1C $\angle A_1CB$ прямой, так как опирается на диаметр BA_1 . Согласно определению синуса величины острого угла прямоугольного треугольника (см. вопрос 9) $a = |BC| =$
$= |BA_1| \sin\alpha^\circ = 2R\sin\alpha^\circ$.

$\angle BAC$ — тупой (см. рис. 66 б), тогда (см. выше вопрос 16) дуга $\smile BmC$, на которую опирается угол $\angle BAC$, больше полуокружности, следовательно, центр O и вершина A лежат в разных полуплоскостях относительно прямой (BC) . Поэтому, если провести диаметр BA_1 , то (в силу У20 п. 2.3.0) все его точки (кроме точки B), в том числе и конец A_1 окажутся в той же полуплоскости относительно прямой (BC) , что и центр O , стало быть, точки A и A_1 будут внутренними точками взаимно дополнительных дуг $\smile CmB$ и $\smile CnB$. Таким образом, $\angle BAC$ и $\angle BA_1C$ — вписанные в окружность углы, опирающиеся взаимно дополнительные дуги $\angle BmC$ и $\angle BnC$, а потому (см. вопрос 16) если $\widehat{BAC} = \alpha^\circ$, то $\widehat{BA_1C} = 180^\circ - \alpha^\circ$. В треугольнике BA_1C $\angle A_1CB$ прямой, так как опирается на диаметр BA_1 . Согласно определению синуса величины острого угла прямоугольного треугольника и равенству $\sin(180^\circ - \alpha^\circ) = \sin\alpha^\circ$ (см. вопрос 9) $a = |BC| = |BA_1| \sin(180^\circ - \alpha^\circ) = 2R\sin\alpha^\circ$.

Если $\angle BAC$ — прямой, то BC — диаметр описанной окружности,

$\widehat{BAC} = \alpha^\circ = 90^\circ$. Так как $|BC| = 2R$ и $\sin 90^\circ = 1$ (см. вопрос 9), то равенство $a = |BC| = 2R\sin\alpha^\circ$ верно и в этом случае.

Равенства $b = |AC| = 2R\sin\beta^\circ$, $c = |AB| = 2R\sin\gamma^\circ$ доказываются аналогично. Теорема синусов доказана.

Дополнительная часть

На основе теоремы синусов можно доказать, что в треугольнике против большей (меньшей) стороны лежит больший (меньший) угол, откуда, в частности, вытекает, что в прямоугольном треугольнике гипотенуза — наибольшая сторона, а в тупоугольном треугольнике наибольшая сторона лежит против тупого угла. Об этом см. в учебнике [5], § 12, п. 111 и разобранную в тексте учебника задачу 17.

Читателям предлагается самостоятельно сформулировать и доказать теорему, обратную теореме синусов.

С применением теоремы синусов докажем еще одну теорему о соотношении между сторонами и диагоналями вписанного в окружность четырехугольника.

Теорема (Птолемея). *У всякого вписанного в окружность выпуклого четырехугольника произведение длин диагоналей равно сумме произведений длин противоположных сторон.*

Доказательство

Пусть $ABCD$ — вписанный в окружность выпуклый четырехугольник, AB , BC , CD и DA — его стороны, AC и BD — его диагонали, $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$, $|AC| = e$, $|BD| = f$. Требуется доказать, что $ac + bd = ef$.

Согласно свойствам выпуклого четырехугольника его диагонали проходят в его внутренней области, а стало быть, они проходят во внутренних областях его внутренних углов. См. рис. 66 в), $\angle ABD = \angle ACD$ как опирающиеся на одну дугу $\smile AD$, $\angle DBC = \angle DAC$ как опирающиеся на одну дугу $\smile CD$, $\angle BDA = \angle BCA$ как опирающиеся на одну дугу $\smile AB$, $\angle BAC = \angle BDC$ как опирающиеся на одну дугу $\smile BC$, $\angle ABD + \angle DBC = \angle ABC$, $\angle BCA + \angle ACD = \angle BCD$. Согласно определению меры угла (см. О28 п. 2.3.0) пусть $\widehat{BDA} = \widehat{BCA} = \alpha$, $\widehat{DAC} = \widehat{DBC} = \beta$, $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = \gamma$, тогда $\widehat{ABC} = \beta + \gamma$, $\widehat{BCD} = \alpha + \gamma$. Для определенности считаем , что α , β , γ — радианные меры соответствующих углов. В силу теоремы о сумме радианных мер внутренних углов треугольника $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$. Пусть R — длина радиуса окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$, тогда эта окружность будет описана около каждого из четырех треугольников: $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$. По теореме синусов для $\triangle BCD$ и $\triangle ABD$ $f = 2R\sin(\alpha + \gamma)$, $e = 2R\sin(\beta + \gamma)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow\ ef = 4R^2 \cdot \sin(\alpha+\gamma) \cdot \sin(\beta+\gamma) = 2R^2 \cdot (\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta+2\gamma))$.

По теореме синусов для $\triangle ABC$ и $\triangle BCD$ $a = 2R\sin\alpha$, $c = 2R\sin\beta$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow\ ac = 4R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta = 2R^2 \cdot (\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$.

По теореме синусов для $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ $b = 2R\sin(\pi - (\alpha+\beta+\gamma)) =$

$= 2R\sin(\alpha+\beta+\gamma)$, $d = 2R\sin\gamma$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow\ bd = 4R^2 \cdot \sin(\alpha+\beta+\gamma) \cdot \sin\gamma = 2R^2 \cdot (\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha+\beta+2\gamma))$.

Складывая полученные выражения для ac и bd , получим: $ac + bd =$

$= 2R^2 \cdot (\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta+2\gamma)) = ef$. Теорема Птолемея доказана.

Вопрос 21. Свойство касательной к окружности. Равенство касательных, проведенных из одной точки к окружности. Свойство четырехугольника, описанного около окружности

Основная часть

Напомним еще раз определение окружности и связанных с ней понятий, определение касательной.

Определение 1. **Окружностью** *называется фигура, состоящая из всех точек* **плоскости**, *расположенных на равном положительном расстоянии от некоторой фиксированной точки этой плоскости. Указанная точка называется* **центром окружности**.

Радиусом *окружности называется любой отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром, а также* **радиусом** *(точнее длиной радиуса) называется* **расстояние** *(длина отрезка) от любой точки окружности до ее центра.*

Определение 2. Прямая, лежащая с окружностью в одной плоскости и имеющая с ней **одну и только одну** *(единственную) общую точку, называется* **касательной** *к окружности, а их общая точка —* **точкой касания**.

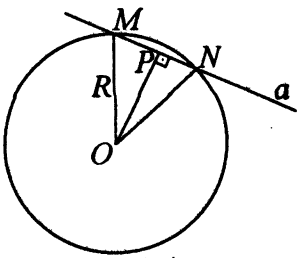


рис. 67 а)

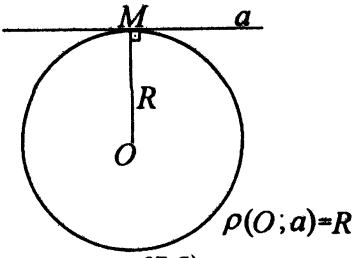


рис. 67 б)

Теорема 1 (свойство касательной к окружности). *Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.*

Доказательство

Пусть $(O; R)$ — окружность, прямая a — касательная к ней M — точка касания. Предположим, что радиус OM не перпендикулярен к касательной

a , тогда прямая (OM) — наклонная к прямой a , точка M — основание этой наклонной. Если из точки O опустить перпендикуляр OP на прямую a , точка P — основание этого перпендикуляра, то согласно теореме 1 вопроса 9 и определению расстояния от точки до прямой $\rho(O;a) = |OP| < |OM| = R$. В силу У3 п. 2.3.1 (см. материал после вопроса 15) это означает, что прямая a имеет *две* общие точки с окружностью M и N (см. рис. 67 а), что противоречит определению касательной к окружности. Полученное противоречие доказывает перпендикулярность радиуса OM и касательной a . Теорема 1 доказана.

Имеет место обратная теорема, выражающая признак касательной к окружности.

Теорема 2. Прямая, проходящая через точку окружности перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту точку, и расположенная с окружностью в одной плоскости, является касательной к этой окружности. Указанная точка является точкой касания.

Доказательство

Пусть прямая a , лежащая в плоскости окружности $(O;R)$, перпендикулярна радиусу OM этой окружности, точка $M \in a$. Тогда $\rho(O;a) = |OM| = R$. В силу У3 п. 2.3.1 (см. материал после вопроса 15) это означает, что прямая a имеет *единственную* общую точку с окружностью, этой точкой и является точка M (см. рис. 67 б). Следовательно, согласно определению касательной (см. выше определение 2) прямая a — касательная к окружности $(O;R)$, M — точка касания. Теорема 2 доказана.

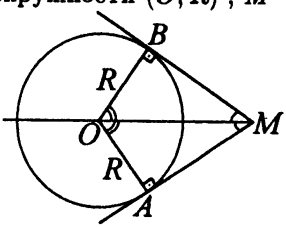


рис. 68 а)

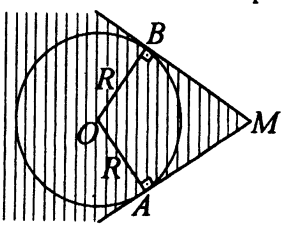


рис. 68 б)

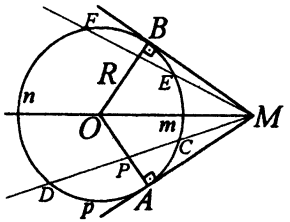


рис. 68 в)

Теорема 3. Если из одной точки проведены к окружности две касательные, то их отрезки, соединяющие данную точку с точками касания, равны.

Доказательство

В дополнительной части этого вопроса будет доказано, что *из всякой точки, лежащей в плоскости окружности и вне окружности, можно провести к ней две и только две касательные.*

См. рис. 68 а). Пусть из точки M , лежащей вне окружности $(O;R)$, проведены к ней касательные (MA) и (MB) , A и B — точки касания. Тре-

буется доказать, что отрезки MA и MB равны. Поскольку в силу теоремы 1 $(OA) \perp (MA)$ и $(OB) \perp (MB)$, точки O и A, O и B, O и M, очевидно, различные, то точки O, A, M *не лежат на одной прямой* и точки O, B, M *не лежат на одной прямой*. Поэтому можно рассмотреть треугольники $\triangle OAM$ и $\triangle OBM$, они прямоугольные, имеющие общую гипотенузу OM и соответственно равные катеты $OA = OB$ как радиусы одной окружности. Следовательно, $\triangle OAM = \triangle OBM$ (по катету и гипотенузе), откуда $MA = MB$. Теорема 3 доказана.

Следствие 1. Отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Следствие 2. Если из одной точки проведены к окружности две касательные, проведены также радиусы этой окружности с концами в точках их касания, то эти радиусы составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

См. рис. 68 а). Справедливость утверждений этих следствий сразу вытекает из равенства $\triangle OAM = \triangle OBM$, в силу которого соответствующие углы: $\angle OMA = \angle OMB$, $\angle AOM = \angle BOM$.

Определение 3. Если все стороны четырехугольника касаются окружности, то такой четырехугольник называется **описанным** *около окружности, а окружность —* **вписанной** *в этот четырехугольник.*

Замечание. В этом определении подразумевается, что прямая, содержащая любую из сторон описанного около окружности четырехугольника, касается этой окружности, причем точка ее касания с окружностью *является внутренней точкой* соответствующей стороны.

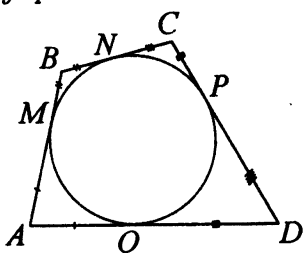


рис. 69 а)

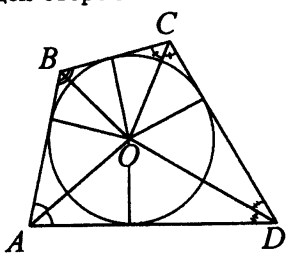


рис. 69 б)

Теорема 4. В любом описанном около окружности четырехугольнике суммы (суммы длин) противоположных сторон равны.

Доказательство

См. рис. 69 а). Пусть $ABCD$ — описанный около окружности четырехугольник, AD, BC и AB, CD — пары его противоположных сторон, M, N, P, Q — точки касания соответственно сторон AB, BC, CD, DA

с этой окружностью (в дополнительной части этого вопроса будет доказано, что такой четырехугольник всегда выпуклый и окружность, вписанная в него, вместе со всеми ее внутренними точками, кроме точек ее касания с его сторонами, лежит в его внутренней области). Отрезки AM и AQ являются отрезками касательных, проведенных из одной точки A к окружности, в силу теоремы 3 $AM = AQ$. Аналогичным образом получаем: $BM = BN$, $CN = CP$, $DP = DQ$. Поскольку M , N , P , Q — внутренние точки отрезков AB , BC , CD , DA соответственно, то (см. О21 п. 2.3.0 суммы отрезков) $AD + BC = (AQ + QD) + (BN + NC) =$
$= (AM+DP)+(MB+PC) = (AM+MB)+(DP+PC) = AB+DC$, то есть $AD + BC = AB + DC$. Согласно определению длины отрезка (см. О24 п. 2.3.0), равные отрезки имеют равные длины и длина суммы отрезков равна суммы длин этих отрезков, поэтому и $|AD| + |BC| = |AB| + |DC|$.

Замечание. Над суммой отрезков $AD + BC$ были произведены следующие действия: замена каждого из них на сумму, соответственно $AQ + QD$ и $BN + NC$, затем каждый из этих слагаемых отрезков был заменен на соответственно равный ему отрезок и после этого была произведена перегруппировка слагаемых отрезков. Все это было можно провести на основе замечания к У39 п. 2.3.0 Теорема 4 доказана.

Следствие 1. Если в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, то существует общая точка биссектрис всех его внутренних углов — центр этой окружности.

См. рис. 69 б). Справедливость этого утверждения следует из того, что центр O окружности, вписанной в четырехугольник, есть такая точка, расстояния от которой до его сторон (прямых, содержащих его стороны) согласно теореме 2 равны длине радиуса этой окружности. Таким образом, точка O , находясь во внутренней области четырехугольника $ABCD$ (это означает, что она находится во внутренней области каждого из его внутренних углов), будучи равноудаленной от его сторон, будет равноудалена от сторон каждого из его внутренних углов. Согласно теореме 7 вопроса 4 это и означает, что точка O лежит на биссектрисе каждого из его внутренних углов. Следствие 1 доказано.

Замечание. Если все прямые, содержащие биссектрисы этих углов *различные*, то точка O является *точкой их пересечения.* Однако возможны ситуации, когда какая либо из диагоналей четырехугольника делит на два равных угла каждый из его внутренних углов, вершины которых она соединяет.

Справедливо и обратное утверждение. Об этом в дополнительной части вопроса.

Следствие 2. Если в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность, то она единственна.

Предполагая существование еще одной вписанной в четырехугольник $ABCD$ окружности, мы таким же образом, как в следствии 1 получим, что ее центр является точкой пересечения биссектрис его внутренних углов, которая будет точкой пересечения биссектрис любых двух его углов и радиус этой окружности равен расстоянию от точки пересечения этих биссектрис до каждой из сторон четырехугольника $ABCD$. Ввиду единственности биссектрисы угла и точки пересечения двух прямых мы получим совпадение центров предполагаемых двух вписанных окружностей. Вследствие единственности перпендикуляра, опущенного из точки на прямую, а потому и единственности расстояния от точки до прямой мы получаем и равенство радиусов предполагаемых двух вписанных окружностей. Стало быть, эти окружности совпадают.

Замечание. Из этого следствия вытекает *единственность общей точки у биссектрис внутренних углов четырехугольника, в который можно вписать окружность.*

Следствие 3. Из рассмотренных выше четырехугольников *окружность можно вписать в квадрат, в ромб* (см. вопрос 7), *в трапецию, у которой сумма оснований равна сумме боковых сторон.*

Дополнительная часть

Выше, в материале после вопроса 15 перед определением дуги отмечалось, что если окружность касается прямой, то все ее точки (кроме точки касания), а также все ее внутренние точки располагаются *в одной полуплоскости* относительно этой прямой. Следовательно, (см. рис. 68) если из точки M проведены к окружности $(O;R)$ две касательные, A и B — точки касания окружности и этих прямых, то все точки *круга* $(O;R)$ (кроме точек A и B) будут расположены *во внутренней области* угла $\angle BMA$ с вершиной M , сторонами которого являются лучи MA и MB . Согласно тому, как определяется в п. 2.3.0 (см. после О15) внутренняя область угла первого типа, мы приходим к тому, что угол между двумя касательными, проведенными к окружности из одной точки с вершиной в этой точке, внутренняя область которого содержит точки соответствующего круга, является углом первого типа.

Введем следующее определение.

Определение 4. Окружность называется **вписанной в угол**, *если его стороны* **касаются** *окружности и все точки этой окружности (кроме точек ее касания со сторонами угла) лежат во внутренней области этого угла.*

На рис. 68 б) проиллюстрирована окружность $(O;R)$, вписанная у угол

$\angle AMB$, содержащаяся в его заштрихованной внутренней области.

Из определения 4 вытекает, что точки касания сторон угла вписанной в него окружности лежат на *лучах* с началами в вершине угла. Этих точек *две* (этот факт будет вытекать из рассматриваемого ниже вопроса о взаимном расположении двух окружностей на плоскости), одна из них лежит на одной полукасательной с началом в точке M , другая — на другой такой касательной.

Поскольку центр окружности O , вписанной в угол $\angle AMB$, лежит в его внутренней области, то согласно У20 и У25 п. 2.3.0 весь луч MO лежит в этой области. Согласно следствию 1 из теоремы 3 $\angle OMA = \angle OMB$, потому *луч MO — биссектриса угла между касательными, проведенными из точки M к окружности*, эта окружность вписана в угол с вершиной M . Поскольку углы $\angle OMA$ и $\angle OMB$ — острые (как не являющиеся прямыми углами прямоугольных треугольников OAM и OBM), то $\angle AMB = \angle OMA + \angle OMB$ меньше развернутого (то есть угол первого типа). Получили, что *если окружность вписана в угол, то это угол первого типа, центр вписанной в угол окружности лежит на биссектрисе этого угла.*

Исследуем вопрос о взаимном расположении вписанной в угол $\angle BMA$ окружности $(O; R)$ и луча с началом в вершине M этого угла в зависимости от его прохождения или во внутренней, или во внешней области этого угла (см. рис. 68 в).

Пусть этот луч является биссектрисой угла. В силу единственности биссектрисы угла и того, что центр вписанной в угол окружности лежит на ней, она *пересечет вписанную окружность в двух диаметрально противоположных точках.* При этом она разобьет окружность на две полуокружности следующим образом: каждая из них лежит в одной полуплоскости относительно прямой (MD) , одна лежит в полуплоскости, содержащей сторону MA и содержит в качестве внутренней точки (поскольку $A \notin (MD)$) точку касания A другая лежит в полуплоскости, содержащей сторону MB и содержит в качестве внутренней точки (поскольку $B \notin (MD)$) точку касания B . Поскольку каждая из этих дуг еще лежит и во внутренней области угла $\angle BMA$, то *все ее внутренние точки (кроме точек касания) лежат во внутренней области соответствующего угла*: точки первой дуги — во внутренней области угла $\angle AMD$, точки второй дуги — во внутренней области угла $\angle BMD$.

Пусть луч MD проходит внутри угла $\angle BMA$ и не является биссектрисой этого угла, тогда в силу следствия 4 из У28 п. 2.3.0 этот луч проходит или внутри угла $\angle OMA$, или внутри угла $\angle OMB$. Для определенности пусть он проходит внутри угла $\angle OMA$, тогда в силу У26 п. 2.3.0

он пересечет *во внутренней точке* радиус OA . Из этого вытекает, что $\rho(O;(MD)) \leqslant |OP| < R$, а потому луч MD пересечет окружность $(O;R)$ в двух точках C и D . Эти точки разбивают точки окружности на две дуги, лежащие в разных полуплоскостях относительно прямой (MD) . Поскольку согласно замечанию после следствия 4 из У28 п. 2.3.0 луч MD разбивает внутреннюю область угла $\angle BMA$ на две части, являющиеся внутренними областями углов $\angle DMA$ и $\angle DMB$ и не имеющими общих внутренних точек (поскольку эти области также лежат в разных полуплоскостях относительно прямой (MD)), то *все внутренние точки дуги* $\smile CpD$ *, кроме точки* A *, и внутренние точки кругового сегмента* CpD *(внутренние точки дуги* $\smile CnD$ *, кроме точки* B *, и внутренние точки кругового сегмента* CnD*) лежат во внутренней области угла* $\angle DMA$ *(угла* $\angle DMB$*) и не лежат во внутренней области угла* $\angle DMB$ *(угла* $\angle DMA$*)* . Совершенно аналогичный результат можно получить и относительно луча MF , который, в частности, пересекает окружность $(O;R)$ в двух точках E и F . Если для определенности предположить, что луч MF проходит внутри угла $\angle AMB$, а луч MD проходит внутри угла $\angle AMF$, то в силу следствия 4 из У28 п. 2.3.0 внутренняя область угла $\angle DMF$ — пересечение внутренних областей углов $\angle DMB$ и $\angle FMA$, следовательно *из точек окружности* $(O;R)$ *во внутренней области угла* $\angle FMD$ *содержатся внутренние точки дуг* $\smile CmE$ *и* $\smile DnF$ *и только они, которые являются общими точками дуг* $\smile FpE$ *и* $\smile CnD$. Таким образом, нами обосновано утверждение, сформулированное в замечании 2 к теореме 2 вопроса 18.

Замечание. Если провести луч MT , лежащий в плоскости угла и не лежащий во внутренней области угла $\angle BMA$, то согласно У25 п. 2.3.0 он будет лежать в его внешней области. Следовательно, он *не будет иметь ни одной общей точки с вписанной в угол окружностью.* В противном случае он или касался бы этой окружности (тогда совпадал бы с одной из сторон угла $\angle BMA$), или пересекал бы это окружность, причем в точках, отличных от точек касания вписанной в этот угол окружности. Так как по доказанному эти точки находятся во внутренней области угла $\angle BMA$, то в силу У25 п. 2.3.0 весь луч должен был бы в ней находиться, что неверно.

Теорема 5. Если окружность можно вписать в четырехугольник, то он выпуклый.

Доказательство

См. выше рис. 69 а). Пусть в четырехугольник $ABCD$ вписана окружность. В материале после вопроса 15 перед О10 п. 2.3.1 дуги окружности говорилось, что касающаяся прямой окружность лежит в одной полуплоскости относительно этой прямой (кроме точки ее касания с прямой). Поэтому она будет находиться в одной полуплоскости относительно прямой

(AD) с лучом AB (так как он содержит точку M своего касания с этой окружностью) и по аналогичной причине будет находиться в одной полуплоскости относительно прямой (AD) с лучом DC . Точка M касания окружности с лучом AB лежит между точками A и B , поэтому точки M и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой (AD) , в которой находятся точки вписанной в четырехугольник окружности и внутренние точки стороны AB. Аналогично точки P и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой (AD) , в которой находятся точки вписанной в четырехугольник окружности и внутренние точки стороны DC. Таким образом, поскольку точки B и C оказались в этой же полуплоскости, отрезок BC вместе со всеми своими внутренними точками оказался в этой же полуплоскости. Следовательно, все точки четырехугольника $ABCD$ оказались в одной полуплоскости относительно прямой (AD) (если считать и эту прямую принадлежащей этой же полуплоскости). Аналогично доказывается расположение всех точек четырехугольника относительно прямой, содержащей любую из его сторон, что и означает выпуклость четырехугольника $ABCD$. Теорема 5 доказана.

Следствие. Все внутренние углы вписанного в окружность четырехугольника — углы первого типа.

Это вытекает из доказанной выпуклости этого четырехугольника.

Замечание. Пусть в четырехугольник $ABCD$ вписана окружность. Тогда она, касаясь, например, сторон AD и AB , будет касаться сторон угла $\angle BAD$. Так как этот угол — угол первого типа, то окружность будет *вписана* в этот угол. Аналогично получается, что окружность будет вписана в любой из внутренних углов, стало быть, все точки окружности и соответствующего круга (кроме точек касания вписанной в четырехугольник окружности с его сторонами) будут *во внутренней области* этого четырехугольника.

Теорема 6 (обратная теореме 3). *Если в выпуклом четырехугольнике суммы (суммы длин) противоположных сторон равны, то в него можно вписать окружность.*

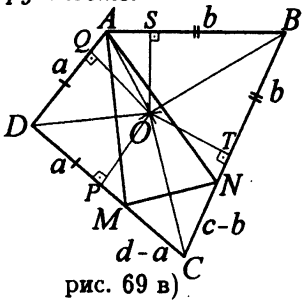


рис. 69 в)

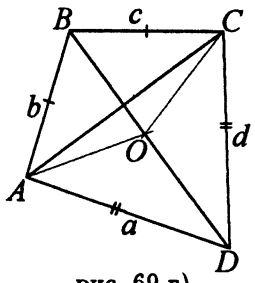


рис. 69 г)

Доказательство

См. также [21], гл. XIV,§ 4, ниже приведено более подробное доказательство.

См. рис. 69 в) и г). Пусть у выпуклого четырехугольника $ABCD$ AD, BC и AB, CD — пары противоположных сторон. По условию $AD+BC = AB+CD$. Обозначим $a = |DA|$, $b = |AB|$, $c = |BC|$, $d = |CD|$, тогда $a+c = b+d \Leftrightarrow d-a = b-c$. Докажем, что существует единственная точка O, равноудаленная от всех сторон четырехугольника $ABCD$, которая и будет центром окружности, вписанной в этот четырехугольник. Рассмотрим случаи: $d > a$ (случай $d < a$ рассматривается аналогично) и $d = a$.

1. $d > a \Rightarrow b > c$ (см. рис. 69 в). Отложим на луче DC от точки D отрезок $DM = DA$ (согласно А14 п. 2.3.0), $d > a \Leftrightarrow DC > DM$, а потому точка M является внутренней точкой отрезка DC, точно также отложим на луче BC от точки B отрезок $BN = BA$, $b > c \Leftrightarrow BC > BN$, а потому точка N является внутренней точкой отрезка BC, следовательно, $|CM| = |DC| - |DM| = d-a = b-c = |BC| - |BN| = |CN|$. Таким образом, получились три равнобедренных треугольника: $\triangle DAM$ $(DM = DA)$, $\triangle BAN$ $(BN = BA)$ и $\triangle CNM$ $(CM = CN)$. В равнобедренном треугольнике биссектриса его внутреннего угла, противолежащего основанию является его медианой и высотой. Поэтому, проводя биссектрисы внутренних углов четырехугольника: $\angle ADC$, $\angle ABC$, $\angle BCD$, мы получим, что они будут *серединными перпендикулярами* к сторонам $\triangle AMN$, а они (согласно теореме 1 вопроса 14) пересекаются в одной точке O.

2. $d = a \Rightarrow b = c$ (см. рис. 69 г). Пусть $d > b \Rightarrow a > c$ (случай $d < b$ рассматривается аналогично). Проводя точно такие же рассуждения, что и в 1), мы получим, что биссектрисы углов: $\angle BAD$, $\angle BCD$ и $\angle ADC$ пересекутся в одной точке O.

3. $d = a = b = c$, в этом случае $ABCD$ — ромб, у которого точка пересечения диагоналей, являющихся биссектрисами его внутренних углов, будет точкой, равноудаленной от всех его сторон (об этом см. выше, вопрос 7).

Итак, существование и единственность общей точки биссектрис внутренних углов четырехугольника $ABCD$ доказано.

Докажем, что эта точка является центром окружности, вписанной в этот четырехугольник.

Если провести биссектрисы внутренних углов $\angle ADC$ и $\angle DCB$ четырехугольника $ABCD$, то поскольку в силу выпуклости $ABCD$ углы $\angle ADC$ и $\angle DCB$ меньше развернутого. Поэтому биссектрисы этих углов (они проходят в их внутренних областях и находятся в той полуплоскости относи-

тельно прямой (CD) , в которой лежат все внутренние точки сторон DA, CB , вершины A и B) будут составлять *острые углы* соответственно с лучами DC и CD . Стало быть, сумма последних углов *меньше развернутого угла*, поэтому (см. теоремы 3 и 4 вопроса 5) прямые, содержащие указанные биссектрисы, *пересекутся в некоторой точке* O . Эта точка будет расположена в той же полуплоскости относительно прямой (CD) , что и четырехугольник $ABCD$. Если бы она находилась в другой полуплоскости относительно прямой (CD) , то в треугольнике COD было бы два внутренних тупых угла (они являлись бы смежными с острыми углами, составляемыми построенными биссектрисами углов $\angle ADC$ и $\angle DCB$ со стороной DC), что невозможно. В силу теоремы 5 вопроса 4 эта точка O будет равноудалена от сторон DC , AD и BC четырехугольника $ABCD$. Это означает, что проводя из точки O перпендикуляры на прямые, содержащие эти стороны, они будут равны. В силу теоремы 3 вопроса 4 ввиду того, что углы $\angle ADO$, $\angle ODC$, $\angle OCD$ и $\angle OCB$ — острые, мы получим, что основания этих перпендикуляров, точки P , Q , T окажутся соответственно *на лучах* CD , DC (стало быть, точка P окажется *на стороне* CD) , AD , BC. Рассуждая аналогично относительно биссектрис углов $\angle DCB$ и $\angle CBA$, мы получим, что точка их пересечения (которая по уже доказанному совпадает с точкой O) будет расположена в той же полуплоскости относительно прямой (BC) , что и четырехугольник $ABCD$ и основание перпендикуляра, проведенного из точки O на прямую (BC) , точка T окажется *на стороне* BC. Точка O , находясь на биссектрисе внутреннего угла $\angle CBA$, будет (в силу У20 и У25 п. 2.3.0) находиться *во внутренней области* этого угла, стало быть, она будет в одной полуплоскости относительно прямой (AB) , что и четырехугольник $ABCD$. Аналогичным образом точка O , находясь на биссектрисе внутреннего угла $\angle ADC$, будет (в силу У20 и У25 п. 2.3.0) находиться *во внутренней области* этого угла, стало быть, она будет в одной полуплоскости относительно прямой (DA) , что и четырехугольник $ABCD$. Таким образом, нами получено, что точка O находится *во внутренней области четырехугольника* $ABCD$, а стало быть, она будет и во *внутренней области угла* $\angle DAB$. Если провести луч AO , то в силу У20 и У25 п. 2.3.0 он также будет проходить во внутренней области угла $\angle DAB$. Точка O , будучи равноудаленной от прямых (DC) и (DA) , (CB) и (CD) , (BC) и (BA) будет равноудалена и от прямых (AD) и (AB) , а потому — и от лучей AD и AB . В силу теоремы 7 вопроса 4 точка O будет *лежать на биссектрисе* и внутреннего угла $\angle DAB$ четырехугольника $ABCD$. Если из точки O опустить перпендикуляры на прямые (AD) и (AB) , то так же, как и для точек P и T доказывается, что основания этих перпендикуляров, точки Q и S будут соответственно *лежать на сторонах* AD *и* AB.

Проведем из точки O радиусом r , равным длине этих перпендикуляров ($|OP| = |OQ| = |OS| = |OT| = r$) окружность, которая в силу теоремы 2 этого вопроса будет *касаться всех сторон* четырехугольника $ABCD$, тем самым эта окружность будет *вписана* в четырехугольник $ABCD$. Теорема 6 полностью доказана.

Следствие 1. (утверждение, обратное следствию 1 из теоремы 4). ***Если у выпуклого четырехугольника существует общая точка биссектрис всех его внутренних углов, то она единственна и в такой четырехугольник можно вписать окружность, эта точка — центр указанной окружности.***

Справедливость этого утверждения вытекает из проведенных рассуждений в доказательстве теоремы 6. Согласно этим рассуждениям указанная точка равноудалена от каждой из прямой, содержащей сторону четырехугольника. Если из нее опустить перпендикуляры на указанные прямые, то каждое из оснований этих перпендикуляров окажется *на соответствующей стороне* четырехугольника. Далее надо повторить все рассуждения конца доказательства теоремы 6 с момента построения окружности с центром в указанной точке радиусом, равным расстоянию от нее до сторон четырехугольника. Единственность этой точки следует из следствия 2 из теоремы 4 и замечания к нему.

Следствие 2. Объединяя результаты теорем 4 и 6, получаем, что ***в выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы (суммы длин) его противоположных сторон равны.***

Следствие 3. Из рассмотренных выше четырехугольников ***окружность нельзя вписать в параллелограмм, не являющийся ромбом и в прямоугольник, не являющийся квадратом*** (см. вопрос 7), ***в трапецию, у которой сумма оснований,*** **не равна** ***сумме боковых сторон.***

Замечание. Ниже, в п. 2.3.2, будет рассмотрен вопрос об описанном около окружности многоугольнике с произвольным количеством сторон n ($n \geqslant 5$) . В том числе будет показано, что такой многоугольник всегда выпуклый.

О взаимном расположении двух окружностей на плоскости

В основной части этого вопроса говорилось о том, что из любой точки, лежащей в плоскости окружности и вне окружности, можно провести к ней только *две* касательные. Для доказательства этого факта нам потребуется использовать утверждения доказываемых ниже теорем о взаимном расположении двух окружностей на плоскости. При этом по сути дела будет указан и *способ проведения* из точки, лежащей в плоскости окружности и вне ее, двух касательных. Помимо этого будут рассмотрены и некоторые

вопросы о взаимном расположении двух окружностей и прямых на плоскости. Большая часть рассматриваемого материала под этим заголовком не имеет прямого отношения к вопросу 21, но может быть использована при решении конкурсных задач, например, см. задачи 5 п. 3.1.11, 3.1.12 и задачи 6 п. 3.1.13, 3.1.14 раздела III.

Пусть на плоскости имеются две окружности $(O_1; R_1)$ и $(O_2; R_2)$, $R_1 \leqslant R_2$, $d = |O_1O_2| = \rho(O_1; O_2)$, $O_1 \not\equiv O_2$.

Определение 5. Прямая, проходящая через центры окружностей O_1O_2, называется **линией центров** *этих окружностей.*

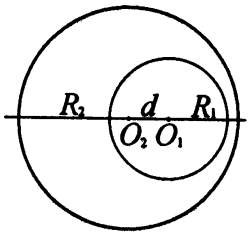


рис. 70 а)

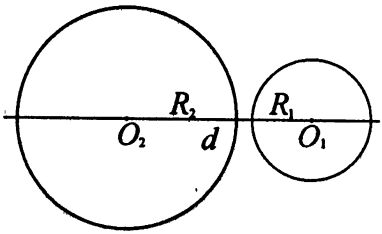


рис. 70 б)

Определение 6. Две окружности называются **непересекающимися**, *если они не имеют общих точек* (см. рис. 70 а), б).

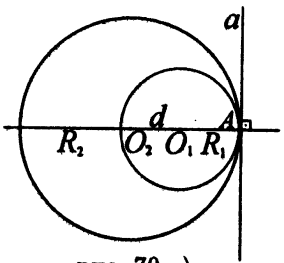


рис. 70 в)

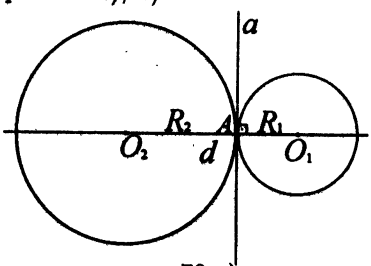


рис. 70 г)

Определение 7. Две окружности называются **касающимися**, *если они имеют* **одну и только одну (единственную)** *общую точку* (см. рис. 70 в), г). *Общая точка двух касающихся окружностей называется их* **точкой касания.**

Окружности, изображенные на рис. 70 в), называются **касающимися внутренним образом**, *а окружности, изображенные на рис. 70 г), называются* **касающимися внешним образом.**

Определение 8. Прямая, лежащая в одной плоскости с касающимися окружностями, называется их **общей касательной**, *если она имеет с этими окружностями* **одну и только одну (единственную)** *общую точку, которая является их точкой касания.*

Прямая a, изображенная на рис. 70 в) и г), является общей касательной к касающимся окружностям.

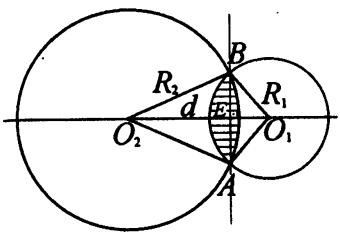


рис. 70 д)

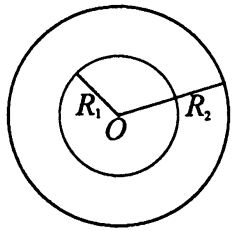


рис. 70 е)

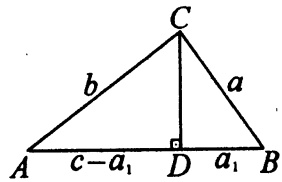


рис. 70 ж)

Определение 9. Две окружности называются **пересекающимися**, *если они имеют* **две** *общие точки* (см. рис. 70 д). *Общие точки двух пересекающихся окружностей называются их* **точками пересечения**.

Определение 10. Две окружности называются **концентрическими**, если они имеют **общий центр** *и* **различные** *радиусы* (см. рис. 70 е).

Из определения 10 и У40 п. 2.3.0 вытекает, что *концентрические окружности не имеют общих точек. Расстояние между центрами концентрических окружностей равно нулю.*

Докажем теорему о возможных вариантах взаимного расположения двух окружностей на плоскости. Для этого нам потребуется вспомогательная лемма, представляющая собой обратное неравенству треугольника утверждение.

Лемма. Если a, b и c — три положительных числа (для определенности пусть $a \leqslant b \leqslant c$) и $a+b>c$, то существует треугольник, длины сторон которого равны a, b и c (см. также [10], теорема 13.4).

Доказательство

Обозначим $a_1 = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2c}$. Так как $c \geqslant b$, то $a_1 > 0$. Докажем, что $a_1 < a$.

$$a - a_1 = a - \frac{c^2+a^2-b^2}{2c} = \frac{2ac-c^2-a^2+b^2}{2c} = \frac{b^2-(c-a)^2}{2c}.$$

Так как $a+b>c$, то $b>c-a>0$, следовательно, $b^2>(c-a)^2$, откуда $a>a_1$.

Построение треугольника ABC с длинами сторон a, b и c проведем следующим образом. На некоторой прямой l выберем точку B, на одной из полупрямых с началом в точке B отложим отрезок BA такой, что $|BA|=c$, затем на луче BA отложим отрезок BD такой, что $|BD|=a_1$ (это возможно на основании У40 п. 2.3.0). Поскольку $c \geqslant a > a_1$, то $c > a_1$, точка D лежит между точками B и A на прямой (AB) а потому $|AD| = |AB| - |BD| =$

$= c - a_1$. Из точки D в одну из полуплоскостей относительно прямой (AB) восставим перпендикуляр к этой прямой (это возможно согласно следствию их У43 п. 2.3.0). На этом перпендикуляре отложим отрезок DC такой, что $|DC| = \sqrt{a^2 - a_1^2}$, соединим отрезками точки A и C , а также — точки B и C . По построению точки A , B и C не лежат на одной прямой (см. рис. 70 ж). Докажем, что $\triangle ACB$ — искомый. $|AB| = c$ по построению, по теореме Пифагора для прямоугольных $\triangle DCB$ и $\triangle ACD$ соответственно

$$|BC| = \sqrt{|BD|^2 + |DC|^2} = \sqrt{a_1^2 + a^2 - a_1^2} = \sqrt{a^2} = a \ ,$$

$$|AC| = \sqrt{|AD|^2 + |DC|^2} = \sqrt{(c - a_1)^2 + a^2 - a_1^2} =$$

$$= \sqrt{c^2 - 2ca_1 + a_1^2 + a^2 - a_1^2} = \sqrt{c^2 + a^2 - 2ca_1} = \sqrt{b^2} = b \ .$$

Лемма доказана.

Пусть на плоскости имеются две окружности $(O_1; R_1)$ и $(O_2; R_2)$, $R_1 \leqslant R_2$, $0 < d = \rho(O_1; O_2) = |O_1O_2|$, $O_1 \not\equiv O_2$.

Теорема 7.

А) *Если $R_2 - R_1 > d$ или $R_2 + R_1 < d$, то окружности не пересекаются (не имеют общих точек).*

Б) *Если $R_2 - R_1 = d$ или $R_2 + R_1 = d$, то окружности касаются, (имеют единственную общую точку), причем эти окружности имеют и общую касательную, касающуюся каждой из них в их точке касания.*

В) *Если $R_2 - R_1 < d < R_2 + R_1$, то окружности пересекаются (имеют две общие точки).*

Доказательства

См. также [10], теорема 13.6, ниже приведены более подробные доказательства всех этих утверждений.

А) Предположим противное, что окружности $(O; R_1)$ и $(O; R_2)$ имеют по крайней мере одну точку A . В случае, если точка A не лежит на прямой (O_1O_2) — линии центров этих окружностей, в силу неравенства треугольника (см. теоремы 8, 9 и 10 вопроса 3 и того, что соотношения между отрезками точно такие, как и соотношения между их длинами) получаем, что $|O_2A| - |O_1A| = R_2 - R_1 < d = |O_1O_2| < |O_1A| + |O_2A| =$ $= R_1 + R_2$, пришли к противоречию с условиями А). Если точка A лежит на прямой (O_1O_2) , то в случае, когда она лежит между точками O_1 и O_2 $d = |O_1O_2| = |O_1A| + |O_2A| = R_1 + R_2$, опять противоречие с условиями А). Если точка O_1 лежит между точками A и O_2 , то $R_2 = |AO_2| = |O_1A| + |O_2O_1| = R_1 + d \Leftrightarrow R_2 - R_1 = d$, снова противоречие с условиями А). Если точка O_2 лежит между точками A и O_1 , то $R_1 = |AO_1| = |O_2A| + |O_1O_2| = R_2 + d \Rightarrow R_1 > R_2$, а это противоречит условию $R_1 \leqslant R_2$. Следовательно, в случаях А) окружности не имеют общих точек. А) доказано.

Замечание 1. Если $R_2 - R_1 > d$, то $R_2 > R_1$. Если взять произвольную точку M *круга* $(O_1; R_1)$, то в силу неравенства треугольника имеем: $|O_2M| \leqslant |O_2O_1| + |O_1M| \leqslant d + R_1 < R_2$. Получили, что *весь круг* $(O_1; R_1)$ *целиком лежит внутри окружности* $(O; R_2)$ (см. рис. 70 а). Пусть $R_2 + R_1 < d$, если взять произвольную точку M *круга* $(O_1; R_1)$, то в силу неравенства треугольника имеем: $|O_2M| \geqslant |O_2O_1| - |O_1M| \geqslant d - R_1 > R_2$. Получили, что *весь круг* $(O_1; R_1)$ *целиком лежит вне окружности* $(O; R_2)$, точно так же получаем, что *весь круг* $(O_2; R_2)$ *целиком лежит вне окружности* $(O; R_1)$ (см. рис. 70 б).

Б) Предположим, что окружности $(O_1; R_1)$ и $(O_2; R_2)$ имеют общую точку A, не лежащую на прямой (O_1O_2), тогда точно так же, как в случае А) получаем, что $R_2 - R_1 < d < R_1 + R_2$, что противоречит равенствам $R_2 - R_1 = d$ или $R_2 + R_1 = d$. Следовательно, окружности не имеют общих точек, лежащих *вне* их линии центров.

Пусть $R_2 - R_1 = d \Leftrightarrow R_2 = R_1 + d$. На прямой (O_1O_2) существует общая точка A этих окружностей. Для обоснования ее существования отложим (на основании У40 п. 2.3.0) на луче с началом в точке O_1, не содержащем точку O_2, отрезок длины R_1 с одним концом в точке O_1, другой конец и будет указанной точкой A, так как, с одной стороны, эта точка является точкой окружности $(O_1; R_1)$, с другой стороны, точка O_1 лежит между точками O_2 и A, поэтому $|O_2A| = |O_2O_1| + |O_1A| = d + R_1 = R_2$, следовательно, точка A является точкой окружности $(O_2; R_2)$. Докажем единственность этой точки. Предположим, что существует еще одна общая точка окружностей. Тогда по доказанному она лежит на прямой (O_1O_2), в силу У40 п. 2.3.0 она может лежать только на дополнительном по отношению к лучу O_2O_1 луче на расстоянии R_2 от точки O_2. Следовательно, точка O_2 будет лежать между точками A и O_1, а потому $R_1 = |O_1A| = |O_2A| + |O_2O_1| = R_2 + d$, в то же время $R_1 = R_2 - d$, что возможно только при $d = 0$, а это противоречит тому, что $d > 0$ (см. рис. 70 в).

Пусть $R_2 + R_1 = d \Rightarrow R_1 < d$. На прямой (O_1O_2) существует общая точка A этих окружностей. Для обоснования ее существования отложим (на основании У40 п. 2.3.0) на луче с началом в точке O_1, содержащем точку O_2, отрезок длины R_1 с одним концом в точке O_1, другой конец и будет указанной точкой A, так как, с одной стороны, эта точка является точкой окружности $(O_1; R_1)$, с другой стороны, точка A будет лежать между точками O_2 и O_1 (так как $R_1 < d$), поэтому $|O_2A| = |O_2O_1| - |O_1A| = d - R_1 = R_2$, следовательно, точка A является точкой окружности $(O_2; R_2)$. Докажем единственность этой точки. Предположим, что существует еще одна общая точка окружностей. Тогда по доказанному она лежит на прямой (O_1O_2), в силу У40 п. 2.3.0 она может

лежать только на дополнительном по отношению к лучу O_2O_1 луче на расстоянии R_2 от точки O_2 . Следовательно, точка O_2 будет лежать между точками A и O_1 , а потому $R_1 = |O_1A| = |O_2A| + |O_2O_1| = R_2 + d$, в то же время $R_1 = d - R_2$, что возможно только при $R_2 = 0$, а это противоречит тому, что $R_2 > 0$ (см. выше определение окружности, а также рис. 70 г).

Замечание 2. Если $R_2 - R_1 = d$, то $R_2 > R_1$. Если взять произвольную точку M *круга* $(O_1; R_1)$, отличную от точки A , то в силу неравенства треугольника имеем: $|O_2M| < |O_2O_1| + |O_1M| \leqslant d + R_1 = R_2 \Rightarrow |O_2M| < R_2$. Получили, что *весь круг* $(O_1; R_1)$ *(кроме точки A) целиком лежит внутри окружности* $(O; R_2)$ (см. рис. 70 в). Пусть $R_2 + R_1 = d$, если взять произвольную точку M *круга* $(O_1; R_1)$, отличную от точки A , то в силу неравенства треугольника имеем: $|O_2M| > |O_2O_1| - |O_1M| \geqslant d - R_1 = R_2$. Получили, что *весь круг* $(O_1; R_1)$ *(кроме точки A) целиком лежит вне окружности* $(O; R_2)$, точно так же получаем, что *весь круг* $(O_2; R_2)$ *(кроме точки A) целиком лежит вне окружности* $(O; R_1)$ (см. рис. 70 г).

Так как общая точка A окружностей $(O_1; R_1)$ и $(O_2; R_2)$ лежит на линии центров (O_1O_2) , то в силу теорем 1 и 2 этого вопроса прямая — касающаяся одной из этих окружностей в точке A , будет перпендикулярна линии центров (O_1O_2) , а потому она будет касаться другой окружности в той же точке A . Б) полностью доказано.

Замечание 3. Выше отмечалось, что если через точку окружности провести касательную, то все точки соответствующего круга (кроме точки касания) лежат в одной полуплоскости относительно этой касательной. Поэтому в случае, когда окружности касаются внутренним (внешним образом) ввиду того, что их центры расположены в одной полуплоскости (в разных полуплоскостях) относительно их общей касательной, эти окружности вместе со своими внутренними точками (кроме точки их касания) также *расположены в одной полуплоскости (в разных полуплоскостях) относительно их общей касательной.*

В) Пусть теперь $R_2 - R_1 < d < R_2 + R_1$, докажем, что окружности имеют *две и только две* общие точки. Покажем, что существует треугольник с длинами сторон d , R_2 и R_1 . Так как $R_2 - R_1 < d$, то $R_1 + d > R_2$; из $R_2 \geqslant R_1$ следует $R_2 + d > R_1$; $R_2 + R_1 > d$ по условию, в силу доказанной выше леммы вытекает существование указанного треугольника. Построение этого треугольника мы проведем следующим образом. Одна из его сторон будет отрезком O_1O_2 , $|O_1O_2| = d$, третьей из его вершин будет такая точка A , что $|O_1A| = R_1$, $|O_2A| = R_2$, следовательно, точка A будет общей точкой окружностей $(O_1; R_1)$ и $(O_2; R_2)$. При этом так как $R_2 \geqslant R_1$, то в треугольнике $\triangle O_1AO_2$ $\angle AO_2O_1$ или угол при основании равнобедренного треугольника (при $R_1 = R_2$) а потому он — острый, или

$\angle AO_2O_1 < \angle AO_1O_2$ (при $R_1 < R_2$), следовательно, он и в этом случае острый.

Поскольку точка A не лежит на прямой O_1O_2 , то из нее можно опустить (согласно теореме 2 вопроса 4) единственный перпендикуляр на прямую (O_1O_2) , пусть точка E — основание этого перпендикуляра. В силу того, что $\angle AO_2O_1$ — острый, точка E *отлична от точки* O_2 . На дополнительном луче по отношению к лучу EA отложим отрезок EB такой, что $|EB| = |EA|$, точка E будет лежать между точками A и B . У прямоугольных треугольников $\triangle O_2AE$ и $\triangle O_2BE$ O_2E — общий катет, катеты EA и EB равны по построению. Следовательно, $\triangle O_2AE = \triangle O_2BE$ (по двум катетам), а потому $|O_2B| = |O_2A| = R_2$, стало быть точка B лежит на окружности $(O_2; R_2)$. Далее, если точка $E \not\equiv O_1$, то равенство $|O_1B| = |O_1A| = R_1$ (откуда вытекает принадлежность точки B окружности $(O_1; R_1)$) доказывается аналогично, если $E \equiv O_1$, то точка B — диаметрально противоположная точке A в окружности $(O_1; R_1)$. Итак, существование *двух различных общих точек* у окружностей $(O_2; R_2)$ и $(O_1; R_1)$ доказано.

Осталось доказать, что больше общих точек, кроме A и B эти окружности не имеют. Предположим, что существует точка $C \not\equiv A$ и $C \not\equiv B$, являющаяся общей точкой окружностей $(O_2; R_2)$ и $(O_1; R_1)$. Тогда, предполагая, что $C \in (O_1O_2)$, в случае, когда лежит между точками A и B, имеем: $d = |O_1O_2| = |O_1C| + |CO_2| = R_1 + R_2$, это противоречит неравенству $d < R_1 + R_2$, если точка O_1 лежит между точками C и O_2 , то $|CO_1| + |O_1O_2| = |CO_2| \Leftrightarrow d = |O_1O_2| = |CO_2| - |CO_1| = R_2 - R_1$, это противоречит неравенству $d > R_2 - R_1$, если точка O_2 лежит между точками C и O_1 , то $|CO_2| + |O_2O_1| = |CO_1| \Leftrightarrow d = |O_2O_1| = |CO_1| - |CO_2| =$ $= R_1 - R_2 \Leftrightarrow d \leqslant 0$, это противоречит неравенству $d > 0$. Совпадение точки C с какой-либо из точек O_1 или O_2 невозможно, поскольку любая точка окружности всегда отлична от ее центра. Таким образом, доказана невозможность принадлежности точки C линии центров (O_1O_2) .

Пусть $C \not\equiv (O_1O_2)$, тогда точки O_1 , C и O_2 могут быть вершинами треугольника $\triangle O_1CO_2$. Рассмотрим $\triangle O_1CO_2$ и $\triangle O_1AO_2$. У них $|O_1C| = |O_1A| = R_1$, $|O_2C| = |O_2A| = R_2$, сторона O_1O_2 — общая, следовательно, эти треугольники равны (по трем сторонам). Аналогично доказывается равенство треугольников $\triangle O_1CO_2$ и $\triangle O_1BO_2$ Из равенств указанных треугольников, в частности, следует: $\angle CO_2O_1 = \angle AO_2O_1$, $\angle CO_2O_1 = \angle BO_2O_1$. Предполагая (для определенности), что точка C лежит в одной полуплоскости относительно прямой $(O_1; O_2)$ с точкой A, согласно равенству $\angle CO_2O_1 = \angle AO_2O_1$ получим (в силу А16 п. 2.3.0) совпадение лучей O_2A и O_2C , откуда в силу равенств $|O_2C| = |O_2A| = R_2$

и У40 п. 2.3.0 получаем *совпадение* точек A и C. Аналогично, предполагая, что точка C оказалась в другой полуплоскости относительно прямой $(O_1;O_2)$, получим, что она окажется в одной полуплоскости относительно этой прямой с точкой B, а потому она *совпадет* с точкой B. Пришли к противоречию с предположением $C \not\equiv A$ и $C \not\equiv B$, которое и доказывает отсутствие других общих точек у окружностей $(O;R_1)$ и $(O;R_2)$, кроме точек A и B.

Итак, теорема 7 полностью доказана.

Замечание 4. При условиях В) теоремы 7 окружности $(O_1;R_1)$ и $(O_2;R_2)$ имеют *общую хорду* AB, а потому согласно У5 п. 2.3.1 (см. материал после вопроса 15) все ее внутренние точки лежат во внутренних областях каждой из этих окружностей. При этом прямая (AB), разделяя все точки плоскости на две полуплоскости, разделяет и точки каждой из окружностей $(O_1;R_1)$ и $(O_2;R_2)$ на две части (дуги). Поэтому *в каждой из полуплоскостей относительно прямой* (AB) *находятся внутренние точки дуг двух пересекающихся окружностей и соответствующих им круговых сегментов.* При этом *общей частью пересекающихся кругов* $(O_1;R_1)$ *и* $(O_2;R_2)$ *будет объединение внутренних точек круговых сегментов вместе с их границами, лежащих в каждом из этих кругов* (см. на рис. 70 д) заштрихованную область).

Замечание 5. В процессе доказательства случая В) теоремы 7 нами получено, что *прямая, содержащая общую хорду двух пересекающихся окружностей и их линия центров взаимно перпендикулярны, при этом линия центров пересекающихся окружностей делит их общую хорду пополам (на два равных отрезка).*

Следствие. Поскольку каждое из соотношений между $d>0$, R_1 и R_2, которые определяются условиями: или А), или Б), или В) теоремы 7 исключает другое из них, то от противного легко доказать и обратное утверждение к каждому из утверждений теоремы 7: А), Б) и В). Тем самым получаем, что если на плоскости имеются две окружности $(O_1;R_1)$ и $(O_2;R_2)$, $R_1 \leqslant R_2$, $0<d=\rho(O_1;O_2)=|O_1O_2|$, $O_1 \not\equiv O_2$, то

а) *окружности не пересекаются (не имеют общих точек) тогда и только тогда, когда или* $R_2-R_1>d$, *или* $R_2+R_1<d$, *причем взаимоотношение между окружностями* на рис. 70 а) (70 б) *имеет место тогда и только тогда, когда* $R_2-R_1>d$ $(R_2+R_1<d)$;

б) *окружности касаются (имеют единственную общую точку) тогда и только тогда, когда или* $R_2-R_1=d$, *или* $R_2+R_1=d$, *причем взаимоотношение между окружностями* на рис. 70 в) (70 г) *имеет место тогда и только тогда, когда* $R_2-R_1=d$ $(R_2+R_1=d)$;

в) *окружности пересекаются (имеют две общие точки) тогда и только тогда, когда* $R_2 - R_1 < d < R_2 + R_1 = d$.

Замечание 6. В учебной и справочной литературе рассматриваются вопросы и о количестве общих касательных к двум окружностям на плоскости в зависимости от взаимного расположения этих окружностей. В частности, рассматриваются и задачи на построение таких касательных.

Об этом см. учебник [8], п. 117 — 122, 128 — 129, а также [13], [16].

Переходим, наконец, к вопросу о числе касательных, которые можно провести к окружности через точку, лежащей вне ее.

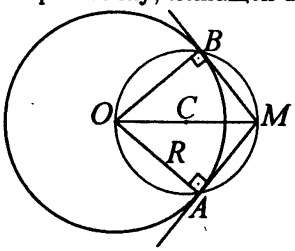


рис. 70 з)

Теорема 8. Через всякую точку в плоскости окружности можно провести к ней **две и только две** *касательные.*

Доказательство

См. рис. 70 з). Проведем через точку M , лежащую вне окружности $(O;R)$ и центр O прямую, пусть C — середина отрезка OM (существование и единственность середины отрезка вытекает из У37 п. 2.3.0). Так как середина отрезка OM — это такая точка C , лежащая на прямой (OC) между точками A и C , что $OC = CM$. Проведем окружность с центром в точке C радиуса $r = |OC| = |OM|/2$, O и M будут ее диаметрально противоположными точками. Исследуем соотношение между $d = |OC| = r$, $R+r$ и $|R-r|$. Неравенство $d = |OC| = r < r+R$ очевидно. Если $R \geqslant r$, то $|R-r| = R-r$, а так как $|OM| = 2r > R$, то $R-r < 2r-r = r = d < R+r$; если $R < r$, то $|R-r| = r-R < r = d < R+r$. Таким образом, в силу теоремы 7, случай В) окружности $(O;R)$ и $(C;r)$ *имеют две и только две общие точки* A *и* B *, которые не лежат на прямой* (OM). Если соединить отрезками точки O и A , O и B , M и A , M и B , то углы $\angle OAM$ и $\angle OBM$ — прямые, так являются вписанными в окружность $(C;r)$ и опираются на ее диаметр. В силу теоремы 2 этого вопроса прямые (MA) и (MB) — касательные к окружности $(O;R)$, A и B — точки касания. Попутно еще раз на основе равенства (по общей гипотенузе OC и равным катетам $|OA| = |OB| = R$) прямоугольных треугольников $\triangle OAM$ и $\triangle OBM$ устанавливается равенство отрезков касательных, проведенных из точки M к окружности $(O;R)$, $MA = MB$.

Остается доказать отсутствие других касательных, проведенных из точки M к окружности $(O;R)$, отличных от касательных (MA) и (MB). Предположим, что существует еще одна касательная (MD) к окружности $(O;R)$, отличная от (MA) и (MB), D — точка ее касания с окружностью $(O;R)$. Эта точка не лежит на прямой (OM), поскольку эта прямая, проходя через центр окружности O, удалена от центра этой окружности на расстояние $\rho = 0$. Стало быть, в силу У3 п. 2.3.1 (см. материал после вопроса 15) она *является секущей* для этой окружности (которая пересекает окружность в двух диаметрально противоположных точках, точка D была бы одной из них). Пусть точка D лежит в той полуплоскости относительно линии центров (OC), в которой лежит точка A, тогда в силу теоремы 1 $MD \perp OD$. Прямоугольные треугольники $\triangle ODM$ и $\triangle OAM$ равны (по гипотенузе и катету), так как гипотенуза OM у них общая, $OA = OD$ как радиусы одной окружности. Следовательно, $\angle AOM = \angle DOM$, а потому получим (в силу А16 п. 2.3.0) совпадение лучей OA и OD, откуда в силу равенств $|OA| = |OD| = R$ и У40 п. 2.3.0 получаем *совпадение* точек A и D. Аналогично, предполагая, что точка D оказалась в другой полуплоскости относительно прямой $(O;C)$, получим, что она окажется в одной полуплоскости относительно этой прямой с точкой B, а потому она *совпадет* с точкой B. Таким образом, или (MD) совпадает с (MA), или (MD) совпадает с (MA), пришли к противоречию с предположением существования отличной от (MA) и (MB) касательной к окружности $(O;R)$, которое и доказывает наличие только двух касательных (MA) и (MB) к этой окружности. Теорема 8 полностью доказана.

Вопрос 22. Теорема об окружности, вписанной в треугольник

Вводная часть

См. выше, в вопросе 1 определение треугольника, в предыдущем вопросе приводились определение окружности и связанных с ней понятий, определение касательной. См. также определение 4 вопроса 3 — биссектрисы угла треугольника.

Основная часть

Определение. Если все стороны треугольника касаются окружности, то такой треугольник называется **описанным** *около окружности, а окружность* — **вписанной** *в этот треугольник.*

Замечание. В этом определении подразумевается, что прямая, содержащая любую из сторон описанного около окружности треугольника, касается этой окружности, причем точка ее касания с окружностью *является внутренней точкой* соответствующей стороны.

Теорема. В любой треугольник можно вписать и притом единственную окружность, центр этой окружности является точкой пересечения биссектрис треугольника.

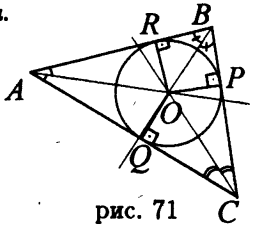


рис. 71

Доказательство

В теоремах 3 и 5 вопроса 14 было доказано сначала пересечение биссектрис двух углов треугольника как отрезков, а потом и биссектрис всех трех углов этого треугольника, причем точка их пересечения находится во внутренней области треугольника.

См. рис. 71. В треугольнике $\triangle ABC$ проведем биссектрисы $\angle BAC$, $\angle BCA$ и $\angle ABC$, пусть O — точка их пересечения. Поскольку половины внутренних углов треугольника (как углов первого типа) всегда острые углы (об этом см. теорему 1 вопроса 4), то если опустить перпендикуляры из точки O на прямые, содержащие его стороны, в силу теоремы 3 вопроса 4 основание перпендикуляра Q , проведенного из точки O на прямую (AC), будет на луче AC и на луче CA , то есть *на отрезке* AC ; основание перпендикуляра R , проведенного из точки O на прямую (AB) , будет на луче AB и на луче BA , то есть *на отрезке* AB ; основание перпендикуляра P, проведенного из точки O на прямую (BC), будет на луче BC и на луче CB, то есть *на отрезке* BC . Проведем из точки O радиусом r , равным длине этих перпендикуляров ($|OP| = |OQ| = |OR| = r$) окружность, которая в силу теоремы 2 вопроса 21 будет *касаться всех сторон* треугольника ABC , тем самым эта окружность будет *вписана* в треугольник ABC . Существование вписанной в треугольник окружности доказано.

Докажем единственность вписанной в треугольник окружности. Предположим существование еще одной вписанной в треугольник ABC окружности. Тогда ее центр равноудален от всех его сторон, откуда следует равноудаленность этого центра от сторон каждого из его внутренних углов. Следовательно, ее центр является точкой пересечения биссектрис внутренних углов треугольника, ввиду единственности этой точки этот центр совпадет с центром первой вписанной в треугольник окружности. Вследствие единственности перпендикуляра, опущенного из точки на прямую, а потому и единственности расстояния от точки до прямой мы получаем и равенство радиусов предполагаемых двух вписанных окружностей. Стало быть, эти окружности совпадают. Теорема полностью доказана.

Дополнительная часть

Замечание 1. Пусть в треугольник ABC вписана окружность. Тогда она, касаясь, например, сторон AB и AC , будет касаться сторон угла $\angle BAC$. Так как этот угол — угол первого типа, то эта окружность будет *вписана* в этот угол. Аналогично получается, что эта окружность будет вписана в любой из его внутренних углов, стало быть, все точки окружности и соответствующего круга (кроме точек касания вписанной в треугольник окружности с его сторонами) будут *во внутренней области* этого треугольника.

Замечание 2. Можно рассматривать и так называемые *вневписанные* в треугольник окружности. Окружность называется *вневписанной* в треугольник, если она касается одной из его сторон и продолжений двух других сторон.

Это определение означает, что окружность касается сторон одного из его внутренних углов, противолежащей ему стороны, точки ее касания со сторонами указанного угла являются внешними точками двух других его сторон. Стало быть, вся эта окружность (кроме точки ее касания со стороной треугольника) лежит в полуплоскости относительно содержащей указанную сторону прямой, которая *не содержит внутренней области указанного треугольника.* Тем самым все точки этой окружность и ее центр, а также ее внутренние точки лежат *во внешней области* треугольника. Отсюда и название "вневписанная".

О таких окружностях см. учебник [8], п. 138, а также [16].

Вопрос 23. Теоремы о параллельных прямых в пространстве. Признак параллельности прямой и плоскости. Признак параллельности плоскостей .

Вводная часть

В начале вводной части раздела "Геометрия" (п. 2.3.0) говорилось о таких первичных понятиях геометрии, как "точка", "прямая", "плоскость" и о пространстве как совокупности всех точек, прямых и плоскостей.

Напомним, что под терминами "две, три и т.д. точки", "две, три и т.д. прямые", "две, три и т.д. плоскости" соответственно понимаются: все *различные* точки, все *различные* прямые, все *различные* плоскости. Для них используются обозначения *разными* буквами: A , B , C для точек; a , b , c для прямых, α , β , γ для плоскостей.

В случае совпадения точек, прямых и плоскостей мы будем считать их соответственно одной точкой, одной прямой, одной плоскостью, и соответственно обозначать $A \equiv B$, $b \equiv c$, $\alpha \equiv \beta$, причем каждый раз, когда эта ситуация имеет место, это будет специально оговариваться.

Если точки A и B , прямые b и c , плоскости α и β — различные, то это соответственно обозначается $A \neq B$, $b \neq c$, $\alpha \neq \beta$.

Напомним, что на основе аксиом принадлежности (А1 — А8) можно доказать теорему о наличии или отсутствии общих точек у двух прямых, у двух плоскостей, у плоскости и не лежащей в ней прямой (см. У1 А), Б), В) п. 2.3.0).

В соответствии с этим утверждением можно ввести определения пересекающихся прямых, пересекающихся прямой и плоскости, пересекающихся плоскостей, а также — параллельных прямых, параллельных прямой и плоскости, параллельных плоскостей.

Определение 1. Две прямые в пространстве называются **пересекающимися**, *если они имеют общую точку.*

Лемма 1. Если у двух различных прямых существует общая точка, то она единственна.

Доказательство

Это утверждение легко доказывается от противного. Предположим, что существует по крайней мере еще одна общая точка у двух прямых. Из А3 п. 2.3.0, утверждающей существование одной и только одной (единственной) прямой, проходящей через две различные точки, вытекает, что эти прямые совпадают. Пришли к противоречию, которое и доказывает единственность общей точки у двух различных прямых (в случае ее существования). Лемма 1 доказана.

Определение 2. Плоскость и не лежащая в ней прямая называются **пересекающимися**, *если они имеют общую точку.*

Лемма 2. Если плоскость и не лежащая в ней прямая имеют общую точку, то эта точка единственна.

Доказательство

Это утверждение легко доказывается от противного. Предположим, что существует по крайней мере еще одна общая точка у плоскости и не лежащей в ней прямой. Так как согласно А6 п. 2.3.0, если две точки принадлежат плоскости, то и вся прямая, проходящая через них принадлежит этой плоскости, получаем противоречие, которое доказывает единственность общей точки у плоскости и не лежащей в ней прямой (в случае ее существования). Лемма 2 доказана.

Определение 3. Две не совпадающие плоскости называются **пересекающимися**, *если они имеют общую точку.*

Лемма 3. Если две не совпадающие плоскости имеют общую точку, то они имеют единственную общую прямую, содержащую все их общие точки.

Доказательство

Согласно А7 при наличии хотя бы одной общей точки у двух плоскостей имеется по крайней мере еще одна их общая точка. Тогда согласно А6 все

точки прямой, проходящей через указанные общие точки двух плоскостей, будут лежать в каждой из этих плоскостей. Предположим, что существует еще одна общая прямая у этих плоскостей. Тогда выбирая на ней точку, не лежащую на первой прямой, и другие две точки, лежащие на первой прямой, получим, что через указанные три точки, не лежащие на одной прямой, проходят указанные две различные плоскости, что противоречит А5 п. 2.3.0. Полученное противоречие доказывает единственность общей прямой у двух плоскостей в случае наличия у них общей точки. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Через прямую и не лежащую на ней точку, так же как и через две пересекающиеся прямые проходит одна и только одна (единственная) плоскость (см. также У2 п. 2.3.0).

Доказательство

Пусть имеются прямая a и точка M, не лежащая на ней. Согласно А1 п. 2.3.0 существуют по крайней мере две точки A и B на прямой a. Согласно А2 п. 2.3.0 существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой, откуда следует существование точки M, не лежащей на прямой a. В силу А5 п. 2.3.0 существует единственная плоскость α, проходящая через точки (A, B и M), не лежащие на одной прямой. В силу А6 прямая a лежит а плоскости α. Таким образом, плоскость α содержит прямую a и точку M, не лежащую на a. Предполагая существование еще одной плоскости α', содержащей прямую a и точку M, мы получим, что она содержит точки A, B и M, не лежащие на одной прямой, что противоречит А5 п. 2.3.0 Полученное противоречие доказывает единственность плоскости α.

Пусть имеются прямые a и b, M — точка их пересечения (их общая точка). Согласно А1 п. 2.3.0 существует по крайней еще одна точка A на прямой a, отличная от точки M и существует по крайней еще одна точка B на прямой b, отличная от точки M. Точки A, B и M не лежат на одной прямой, так как в противном случае получалось бы, что через две различные точки A и M или через две различные точки B и M проходят две различные прямые a и b, а это противоречит А3 п. 2.3.0. В силу А5 через точки A, B и M проходит единственная плоскость α, в которой согласно А6 лежат прямые a и b. Единственность этой плоскости доказывается точно так же, как и в предыдущем случае (прямая и не лежащая на ней точка). Лемма 4 доказана.

Основная часть

Определение 4. Две прямые в пространстве называются **параллельными**, *если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек (не пересекаются).*

Из этого определения непосредственно вытекает, что если прямая a па-

раллельна прямой b , то и прямая b параллельна прямой a и наоборот ($a \parallel b \Leftrightarrow b \parallel a$).

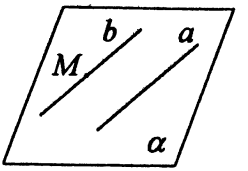


рис. 72

Теорема 1. Через точку вне данной прямой (в пространстве) можно провести параллельную ей прямую и притом только одну.

Доказательство

См. рис. 72. В силу доказанной выше леммы 4 через прямую a и точку M можно провести единственную плоскость α , а в силу аксиомы параллельности прямых (см. А22 п. 2.3.0), теоремы 1 вопроса 5 и следствия из нее в плоскости α через точку M проходит одна и только одна прямая $b \parallel a$. Прямая b лежит с прямой a в одной плоскости α и не имеет с ней общих точек (согласно определению параллельных прямых на плоскости, см. определение 2 вопроса 5). Поэтому согласно определению 2 этого вопроса прямые a и b (как прямые в пространстве) параллельны.

Предположим, что в пространстве через точку M проходит еще одна прямая $b' \parallel a$. Поскольку согласно приведенному выше определению 2 прямые b' и a должны лежать в одной плоскости, то это будет однозначно определенная плоскость α , проходящая через точку M и прямую a . Получили, что на плоскости α через точку M проходит более одной прямой, параллельной прямой a (прямые b и b'). Пришли к противоречию с аксиомой параллельности прямых на плоскости, которое и доказывает единственность прямой $b \parallel a$, проходящей через точку $M \notin a$ в пространстве. Теорема 1 доказана.

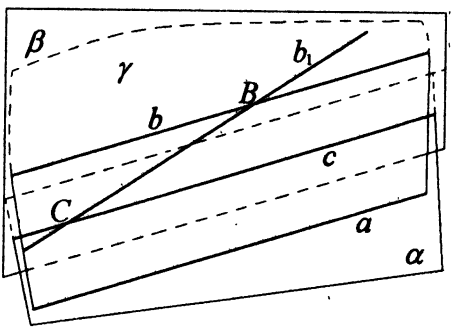


рис. 73

Теорема 2. Две различные прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.

Доказательство

См. также [10]. Пусть имеются три прямые: a , b и c , $a \parallel c$, $b \parallel c$, докажем, что $a \parallel b$. Случай, когда прямые a , b и c расположены в одной плоскости рассмотрен выше, см. вопрос 5 теорема 2. Поэтому рассмотрим случай, когда прямые a , b и c *не лежат* в одной плоскости. Пусть α — плоскость, содержащая прямые a и c , β — плоскость, содержащая прямые b и c , α и β различны, см. рис. 73. Выберем на прямой b точку B и проведем плоскость γ через прямую a и точку B (это возможно согласно лемме 4). В силу леммы 3 плоскость γ пересечет плоскость β по некоторой прямой b_1 , которая содержит точку B . Докажем, что $b_1 \parallel c$.

Предположим противное, что $b_1 \nparallel c$, поскольку прямые b_1 и c лежат в плоскости β , то это значит, что они *пересекутся* в некоторой точке C . Эта точка будет лежать и в плоскости γ , так как она лежит на прямой $b_1 \in \gamma$. В то же время так как точка C лежит на прямой c , лежащей в плоскости α , то она будет лежать в плоскости α . Таким образом, точка C лежит как в плоскости α , так и в плоскости γ , стало быть, она будет лежать на прямой их пересечения, то есть на прямой a . Итак, точка C лежит на прямой a и на прямой c , что противоречит параллельности этих прямых (стало быть, отсутствию у них общих точек). Следовательно, $b_1 \parallel c$, а потому в силу аксиомы параллельности прямых $b_1 \equiv b$. Таким образом, прямые b и a *лежат в одной плоскости* γ . Эти прямые не могут пересекаться, так как в противном случае поскольку они обе параллельны прямой c , получилось бы существование двух различных прямых, проходящих через точку их пересечения, параллельных прямой c , что противоречит теореме 1. Следовательно, $a \parallel b$. Теорема 2 доказана.

Замечание. Доказанная теорема 2 означает, что отношение параллельности прямых в пространстве обладает свойством *транзитивности*.

Определение 5. Плоскость и не лежащая в ней прямая называются **параллельными**, *если они не имеют общих точек (не пересекаются).*

Из этого определения непосредственно вытекает, что если плоскость α параллельна плоскости β , то и плоскость β параллельна плоскости α и наоборот ($\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \beta \parallel \alpha$).

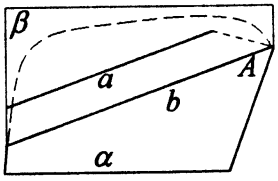


рис. 74

Теорема 3 (признак параллельности прямой и плоскости). *Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.*

Доказательство

Пусть прямая a параллельна некоторой прямой b, лежащей в плоскости α, (эти прямые различные так как $a \notin \alpha$), тогда согласно определению параллельных прямых существует плоскость β, проходящая через прямые a и b (см. рис. 74). Плоскости α и β — различные, так как в противном случае получалось бы, что прямая a лежала бы в плоскости α, что неверно. Следовательно, прямая b — прямая (линия) пересечения плоскостей α и β. Предположим, что прямая a не является параллельной плоскости α. Тогда так как $a \notin \alpha$, то a пересекает плоскость α в некоторой точке A. Эта точка A лежит как на прямой a, так и в плоскости α. Поскольку $A \in a$, $a \in \beta$, то $A \in \beta$, таким образом, точка A, находясь как в плоскости α, так и в плоскости β, будет лежать на их линии пересечения, то есть на прямой b (в силу леммы 3 прямая b единственна). Следовательно, прямые a и b имеют общую точку A и различны, что противоречит их параллельности. Полученное противоречие доказывает невозможность пересечения прямой a и плоскости α, поэтому так как $a \notin \alpha$, то $a \parallel \alpha$. Теорема 3 доказана.

Определение 6. Две плоскости называются **параллельными**, *если они не имеют общих точек (не пересекаются).*

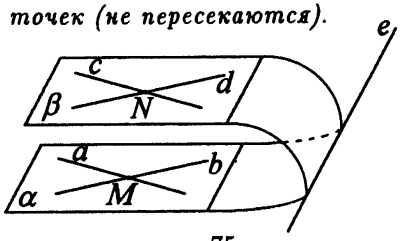


рис. 75

Теорема 4 (признак параллельности плоскостей). *Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.*

Доказательство

Пусть α и β — две плоскости, прямые a и b лежат в плоскости α, a и b пересекаются в некоторой точке M, прямые c и d лежат в плоскости β, $a \parallel c$, $b \parallel d$. Требуется доказать, что плоскости α и β параллельны. Отметим, что в силу теоремы 3 из $a \parallel c$, $c \in \beta$ следует, что $a \parallel \beta$, а из $b \parallel d$, $d \in \beta$ следует, что $b \parallel \alpha$. Предположим, что плоскости α и β не параллельны, тогда они имеют по крайней мере одну общую точку. В силу леммы 3 плоскости α и β имеют общую прямую e (линию пересечения). Получили, что с одной стороны, прямые a и e лежат в одной плоскости α,

с другой стороны, они не имеют общих точек (поскольку $e \in \beta$, а $a \parallel \beta$, поэтому не имеет с ней общих точек). Следовательно, $a \parallel e$. Совершенно аналогично доказывается, что $b \parallel e$. Получили, что в плоскости α через точку M проходят две различные прямые a и b, параллельные прямой e, что противоречит аксиоме параллельности прямых (см. А22 п. 2.3.0). Полученное противоречие доказывает невозможность пересечения плоскостей α и β, следовательно, $\alpha \parallel \beta$. Теорема 4 доказана.

Замечание. Отметим, что из условий $a \parallel c$, $b \parallel d$, $a \cap b \equiv M$ следует, что *пересекаются прямые* c *и* d. Поскольку, предполагая, что $c \parallel d$, мы получим, что согласно теореме 2 из $a \parallel c \parallel d \parallel b \Rightarrow a \parallel b$, что противоречит $a \cap b \equiv M$.

Дополнительная часть

Отметим, что справедливы теоремы, обратные теоремам 3 и 4.

Теорема 5 (свойство параллельности прямой и плоскости). ***Если прямая параллельна плоскости, то в этой плоскости существует прямая, которой параллельная плоскости прямая параллельна.***

Доказательство

Предположим, что прямая a параллельна плоскости α, тогда в соответствии с определением 5 $a \notin \alpha$. Докажем, что в плоскости α существует прямая b такая, что $a \parallel b$ (см. рис. 74). Для этого достаточно провести через произвольную точку $M \in \alpha$ (существование такой точки гарантирует А4 п. 2.3.0) и прямую a плоскость β (согласно лемме 4). Эта плоскость, будучи отличной от плоскости α, пересечет (согласно лемме 3) плоскость α по прямой b, содержащей точку M. $b \parallel a$, поскольку эти прямые лежат в одной плоскости β и не имеют общих точек, так как в противном случае были бы общие точки у прямой a и плоскости α, что противоречит условию. Теорема 5 доказана.

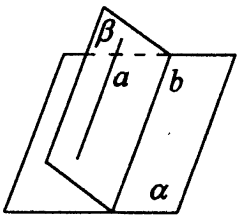


рис. 76 а)

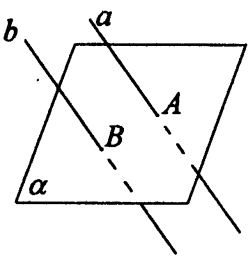


рис. 76 б)

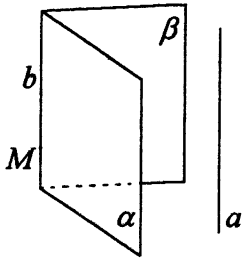


рис. 76 в)

Замечание 1. Отметим, что в силу теоремы 2 любая прямая в плоскости α, параллельная прямой b, будет параллельна прямой a, поэтому в плоскости α существует бесчисленное множество прямых, параллельных прямой a.

Замечание 2. В процессе доказательства теоремы 5 установлено, что *если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, то прямая (линия) пересечения этих плоскостей параллельна указанной прямой* (см. рис. 76 а).

Следствие 1. (из теорем 3 и 5). *Если одна из параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая из них также пересекает эту плоскость.*

Доказательство

См. рис. 76 б). Пусть прямые a и b параллельны, прямая a пересекает плоскость α в точке A . Докажем, что прямая b также пересекает эту плоскость в некоторой точке B . Пусть это не так. Тогда возможны следующие случаи. Прямая b лежит в плоскости α , тогда так как прямая a не лежит в плоскости α и $a \parallel b$, то в силу теоремы 3 $a \parallel \alpha$, что противоречит $a \cap \alpha \equiv A$. Прямая $b \parallel \alpha$, тогда в силу теоремы 5 в плоскости α существует прямая $c \parallel b$. В силу теоремы 2 отсюда следует, что $a \parallel c$, откуда снова в силу теоремы 3 $a \parallel \alpha$, что противоречит $a \cap \alpha \equiv A$. Полученные противоречия доказывают, что прямые b и плоскость α также пересекаются. Следствие доказано.

Следствие 2. Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна их линии пересечения.

Доказательство

См. рис. 76 в). Пусть прямая a параллельна плоскости α , а также прямая a параллельна плоскости β , b — линия пересечения этих плоскостей. Требуется доказать, что прямая a параллельна прямой b . Для этого через точку M и прямую a проведем плоскость, которая согласно теореме 5 должна пересечь каждую из плоскостей α и β по прямым, параллельным прямой a . Поскольку эти прямые проходят через точку M , то в силу теоремы 1 они могут только совпадать, причем совпадать с общей прямой этих плоскостей, а именно, линией их пересечения (прямой b). Следовательно, $b \parallel a$. Следствие 2 доказано.

Теорема 6 (свойство параллельности плоскостей). *Если две плоскости параллельны, то в одной из них существует пара пересекающихся прямых соответственно параллельных прямым в другой плоскости.*

Доказательство

Пусть плоскости α и β параллельны. Выберем в плоскости α две пересекающиеся прямые a и b . Существование таких прямых вытекает согласно УЗ п. 2.3.0 о существовании по крайней мере трех точек в плоскости α , причем не лежащих на одной прямой. Через первую и вторую из этих точек проведем прямую a (она существует, единственна и лежит в α в силу А3 п. 2.3.0). Через первую и третью из этих точек проведем прямую b . Очевидно, что прямые a и b пересекаются в первой точке, а также то, что каждая

из них параллельна плоскости β . Выберем точку N в плоскости β , проведем через точку N и прямую a плоскость, которая пересечет плоскость β по прямой c , эта прямая $c \parallel a$ (см. доказательство теоремы 5), аналогично проведем через точку N и прямую b плоскость, которая пересечет плоскость β по прямой d , эта прямая $d \parallel b$. Теорема 6 доказана.

Замечание. Точно так же, как и в замечании к теореме 4 получаем, что из условий $a \parallel c$, $b \parallel d$, $a \cap b \equiv M$ следует, что $c \cap d \equiv N$ (см. рис. 75).

С помощью теоремы 6 несложно доказать и теорему, выражающую свойство транзитивности отношения параллельности плоскостей.

Теорема 7. Две различные плоскости, параллельные третьей плоскости, параллельны.

Доказательство

Пусть α , β , γ — три плоскости. $\alpha \parallel \gamma$, $\gamma \parallel \beta$. Требуется доказать, что $\alpha \parallel \beta$. Выберем в плоскости α две пересекающиеся прямые $a \cap b \equiv M$, тогда (по доказанному в теореме 6) в плоскости γ существуют пересекающиеся прямые e и f такие, что $a \parallel e$ и $b \parallel f$. Аналогично в плоскости β существуют две пересекающиеся прямые $c \cap d \equiv N$, такие, что $e \parallel c$ и $f \parallel d$. В силу теоремы 2 $a \parallel c$ и $b \parallel d$, а потому в силу теоремы 4 $\alpha \parallel \gamma$. Теорема 7 доказана.

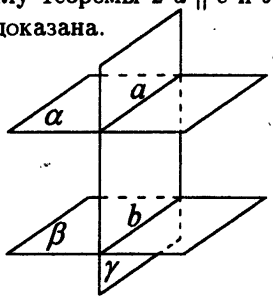


рис. 77 а)

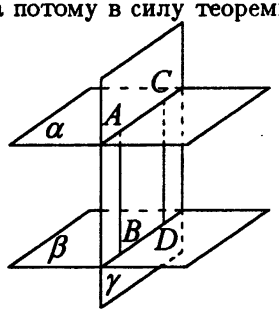


рис. 77 б)

Отметим еще несколько свойств параллельных прямых и плоскостей.

Теорема 8. Через всякую точку, не лежащую на данной плоскости, можно провести одну и только одну (единственную) плоскость, параллельную данной плоскости.

Доказательство см. [5], п. 140, теорема 16.5; [7], п. 11, задача 59; [9], п. 20; [10], §19, теорема 19.6.

Теорема 9. Если плоскость пересекает одну из двух других параллельных между собой плоскостей, то она пересекает и вторую из них и прямые пересечения параллельны (см. рис. 77 а).

Доказательство см. [5], п. 141; [7], п. 11, задачи 55, 57; [9], п. 16.

Отметим, что первая часть этого следствия (о пересечении второй из параллельных плоскостей при условии пересечения плоскостью первой из этих плоскостей легко устанавливается от противного).

Теорема 10. Отрезки параллельных прямых между параллельными плоскостями равны. (см. рис. 77 б).

Доказательство см. [5], п. 141; [7], п. 11; [9], п. 17, [10], §19, теорема 19.8.

Теорема 11. Если прямая параллельна одной из параллельных плоскостей, то она параллельна и другой.

Доказательство

Для доказательства этого утверждения достаточно через прямую a и точку на одной из параллельных плоскостей провести плоскость, которая в силу теоремы 5 пересечет эту плоскость по прямой, параллельной указанной выше прямой. В силу теоремы 9 проведенная плоскость пересечет вторую из параллельных плоскостей также по прямой, параллельной прямой a , далее в силу теоремы 3 получаем параллельность прямой a и второй из параллельных плоскостей. Теорема 11 доказана.

Теорема 12. Если прямая пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и другую из них.

Доказательство

Пусть прямая a пересекает одну из параллельных плоскостей. Предположим, что она или лежит во второй плоскости, тогда в силу отсутствия общих точек у этих плоскостей, она не сможет иметь общей точки с первой из них, получили противоречие. Если предположить, что прямая a параллельна второй плоскости, получим (в силу теоремы 11), что она параллельна первой плоскости, что противоречит их пересечению. Следовательно прямая a может только пересекать вторую плоскость. Теорема 12 доказана.

Вопрос 24. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Теорема об общем перпендикуляре к двум скрещивающимся прямым.

Вводная часть

В случае пространства кроме ситуации, когда две прямые находятся в одной плоскости и не имеют общих точек (то есть параллельны), возможно и такое расположение прямых, когда они не лежат в одной плоскости.

Определение 1. Прямые в пространстве, которые не лежат в одной плоскости, называются **скрещивающимися**.

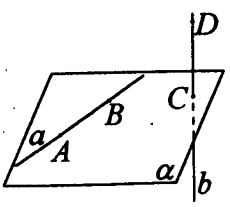


рис. 78 а)

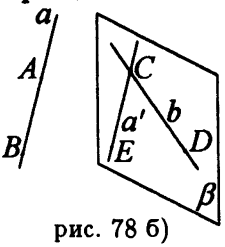


рис. 78 б)

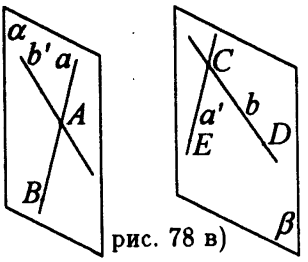


рис. 78 в)

Теорема 1 (о существовании скрещивающихся прямых). *Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая из этих прямых пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то такие прямые являются скрещивающимися.*

Доказательство

См. рис. 78 а). Пусть прямая a лежит в плоскости α , прямая b пересекает плоскость α в точке C . Следует отметить, что подобная конфигурация существует на основе У3 п. 2.3.0, согласно которому в плоскости α существуют три точки, не лежащие на одной прямой (пусть это будут точки A , B , C), существование точки D , не лежащей в плоскости α , гарантирует А8 п. 2.3.0. Если провести через точки A и B прямую a (см. А8 п. 2.3.0), на которой не будет лежать точка C , а также и через точки C и D провести прямую, то в силу А6 п. 2.3.0 прямая a будет лежать в плоскости α . Прямая b не лежит в плоскости α , так как в противном случае точка D лежала бы в плоскости α , что неверно. Если предположить, что существует некоторая плоскость β , содержащая прямые a и b , а стало быть, и все четыре точки A , B , C , D , то в силу единственности плоскости, проходящей через точки A , B , C (см. А5 п. 2.3.0), плоскости β и α совпадут, стало быть, точка D должна будет оказаться в плоскости α , что неверно. Следовательно, прямые a и b не лежат в одной плоскости, а потому они скрещиваются. Теорема 1 доказана.

Замечание. Скрещивающиеся прямые не имеют общих точек. Это легко доказывается от противного. Предполагая существование общей точки у этих прямых, мы получим (согласно доказательству леммы 4 вопроса 23), что если эти прямые различны, то они лежат в одной плоскости, если эти прямые совпадают (а это при наличии у них двух различных общих точек), то через них проходит бесчисленное множество плоскостей.

Теорема 2. Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит **единственная** *плоскость, параллельная другой прямой, причем эти плоскости параллельны.*

Доказательство

См. рис. 78 б). Пусть $a \equiv (AB)$ и $b \equiv (CD)$ — две скрещивающиеся прямые. Докажем, что, например, через прямую (CD) проходит единственная плоскость, параллельная прямой (AB) . Проведем через точку C прямую $a' \equiv (CE)$, параллельную прямой a (это возможно согласно теореме 1 вопроса 23), в силу той же теоремы эта прямая единственна. Так как $b \nparallel a$, то прямые b и a' — различные. Поскольку эти прямые имеют общую точку C , то C — точка их пересечения. В силу леммы 4 вопроса 23 через прямые a' и b можно провести единственную плоскость (обозначим ее за β), при этом, так как прямые a и b скрещиваются, a не лежит в плоскости

β. Так как $a \parallel a'$, $a' \in \beta$, то в силу теоремы 3 вопроса 23 $a \parallel \beta$. Существование плоскости, проходящей через прямую b, параллельно прямой a, доказано. Докажем ее единственность. Предположим, что через прямую b проходит еще одна плоскость $\beta' \not\equiv \beta$, параллельная прямой a . С одной стороны, эта плоскость проходит через точку C , с другой стороны, она не содержит прямую a' (иначе она совпадала бы с плоскостью β). Следовательно, плоскость β' пересекает прямую a' , так как $a' \parallel a$, то в силу следствия 1 из теорем 3 и 5 вопроса 23 плоскость β' пересекает прямую a , пришли к противоречию с тем, что $a \parallel \beta'$. Полученное противоречие доказывает единственность плоскости $\beta \parallel a$ такой, что $b \in \beta$ и прямые a и b скрещиваются. Аналогичным образом, проводя через точку $A \in a$ прямую $b' \parallel b$ и затем через прямые a и b' — плоскость α , мы получим, что в силу теоремы 3 вопроса 23 $b \parallel \alpha$ (см. рис. 78 в). Единственность этой плоскости доказывается точно так же, как доказывается единственность плоскости β. Далее, получив, что в плоскости β имеются две пересекающиеся прямые b и a' соответственно параллельные прямым b' и a , лежащим в плоскости α , в силу теоремы 4 вопроса 23 будем иметь, что $\alpha \parallel \beta$. Теорема 2 полностью доказана.

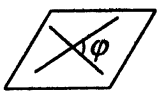
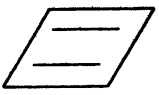


рис. 79 а)


рис. 79 б)

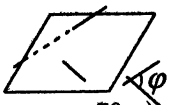


рис. 79 в)

Отметим *три* возможных взаимных расположения двух прямых в пространстве:

а) прямые пересекаются (имеют единственную общую точку), через них проходит единственная плоскость (см. рис. 79 а);

б) прямые параллельны (они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек), плоскость, в которой они лежат единственная (см. рис. 79 б);

в) прямые скрещиваются (они не лежат в одной плоскости и не имеют общих точек, см. рис. 79 в).

Замечание. Единственность плоскости, в которой лежат параллельные прямые обосновывается так. Пусть a и b — параллельные прямые. Выберем произвольные две точки на прямой a и одну точку на прямой b . Через эти три точки (согласно А5 п. 2.3.0) проходит единственная плоскость. Согласно А6 прямая a лежит в этой плоскости. В силу А22 п. 2.3.0 и теоремы 1 вопроса 23 всякая прямая, параллельная прямой a и проходящая через третью точку, может только совпадать с прямой b , поэтому (согласно А22 п. 2.3.0) прямая b лежит в построенной плоскости. Предполагая, что через эти прямые пройдет еще одна плоскость, мы получим, что она пройдет и через выбранные выше три точки, тем самым получим противоречие с А5 п. 2.3.0. Это противоречие доказывает единственность плоскости, прохо-

дящей через параллельные прямые.

Выше, в начале дополнительной части вопроса 2, отмечалось, что при пересечении двух прямых a и b образуются четыре угла, имеющие общую вершину в точке пересечения этих прямых. Из них две пары вертикальных углов, а также четыре пары смежных углов. В силу равенства вертикальных углов неравными могут быть только смежные углы, при условии, что один из них острый, другой — тупой. Острый угол является меньшим из этих углов, тупой — большим из них.

Договоримся всюду в дальнейшем *углом между пересекающимися не перпендикулярными прямыми считать* **меньший** *из углов, образующихся при их пересечении.* Если эти прямые *взаимно перпендикулярны*, то угол между ними **прямой**.

Угол между параллельными или совпадающими прямыми будем считать **нулевым**.

Определение 2. **Углом между скрещивающимися прямыми** *называется угол между пересекающимися прямыми, которые соответственно параллельны данным скрещивающимся прямым.*

При этом *мерой такого угла естественно считать меру угла между соответственно параллельными им пересекающимися прямыми* (см. рис. 79 в).

В учебниках геометрии доказывается, что этот угол не зависит от того, какие берутся пересекающиеся прямые и где расположена их точка пересечения.

См. [7], гл. I, §2, пп. 8 — 9;
[5], п. 160, при этом используется транзитивность отношения параллельности прямых и свойства параллельного переноса — одного из видов движений в геометрии (см. VI. в п. 2.3.0).

Основная часть

Определение 3. Две прямые в пространстве называются **перпендикулярными**, *если угол между ними прямой.*

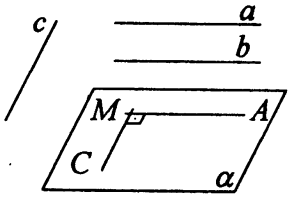


рис. 80 а)

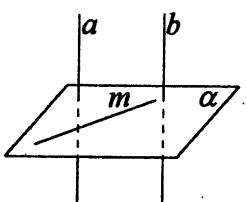


рис. 80 б)

Теорема 3. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна третьей прямой, то и другая из них перпендикулярна этой прямой.

Доказательство

Пусть a , b и c — прямые в пространстве, $a \parallel b$, $a \perp c$. Требуется доказать, что $b \perp c$. См. рис. 80 а). Для этого через произвольную точку M пространства, не принадлежащую ни одной из прямых a , b и c проведем прямые $(MA) \parallel a$, $(MC) \parallel c$ (согласно теореме 1 вопроса 23). По определению перпендикулярности прямых в пространстве $\angle AMC$ — прямой. Так как $(MA) \parallel a$, $a \parallel b$, то в силу теоремы 2 вопроса 23 $(MA) \parallel b$, согласно определениям 2 и 3 $b \perp c$. Теорема 3 доказана.

Определение 4. Прямая, пересекающая плоскость, называется **перпендикулярной** *этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, которая лежит в данной плоскости. При этом также плоскость называется* **перпендикулярной** *указанной прямой.*

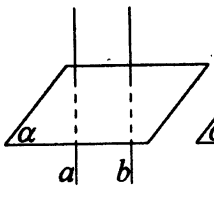


рис. 80 в)

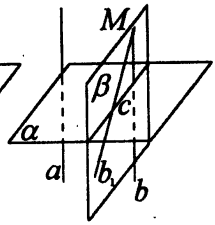


рис. 80 г)

Теорема 4. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая из них перпендикулярна этой плоскости.

Доказательство

Пусть a , b — прямые в пространстве, $a \parallel b$, α — плоскость, $a \perp \alpha$. Требуется доказать, что $b \perp \alpha$. См. рис. 80 б). Проведем в плоскости α произвольную прямую m . В силу произвольности прямой m и определения 4 следует $a \perp m$, а в силу теоремы 3 вытекает, что $b \perp m$. В силу произвольности прямой m и определения 4 следует, что $b \perp \alpha$. Теорема 4 доказана.

Имеет место и обратная теорема.

Теорема 5. Если две прямые перпендикулярны плоскости, то они параллельны.

Доказательство

См. рис. 80 в) и г). Пусть прямые a и b перпендикулярны плоскости α , требуется доказать, что они параллельны. Проведем через некоторую точку M прямую b_1 , параллельную прямой a . В силу теоремы 4 $b_1 \perp \alpha$. Докажем, что прямые b_1 и b совпадают, тогда будет следовать $a \parallel b$. Предположим, что прямые b и b_1 не совпадают, тогда они пересекаются в точке M и через них можно провести (согласно лемме 4 вопроса 23) единственную плоскость β . Поскольку согласно определению 4 прямая b

и плоскость α пересекаются, то они имеют общую точку. Следовательно, плоскости β и α имеют общую точку и в силу леммы 3 вопроса 23 они имеют общую прямую c , по которой они пересекаются. Так как $b \perp \alpha$ и $b_1 \perp \alpha$, то в силу определения 4 $b \perp c$ и $b_1 \perp c$, получили, что из точки M к прямой c в плоскости β проведено два перпендикуляра, что невозможно. Следовательно, $b_1 \equiv b \Rightarrow a \parallel b$. Теорема 5 доказана.

Теорема 6. (признак перпендикулярности прямой и плоскости). ***Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.***

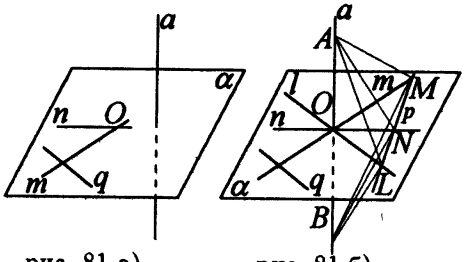


рис. 81 а) рис. 81 б)

Доказательство

См. рис. 81 б). Рассмотрим прямую a , такую, что $a \perp m$, $a \perp n$, m , $n \in \alpha$, $m \cap n \equiv O$ (m и n — указанные в условии теоремы прямые, O — точка их пересечения). Требуется доказать, что прямая a перпендикулярна плоскости α ($a \perp \alpha$). Для этого (согласно определению 4) достаточно доказать, что прямая a перпендикулярна произвольной прямой q , лежащей в плоскости α .

Рассмотрим случай, когда прямая a проходит через точку O , причем $q \not\equiv m$ и $q \not\equiv n$. * Через точку O в плоскости α проведем прямую $l \parallel q$ (если оказалось, что q проходит через точку O , то в качестве прямой l можно взять прямую q). Выберем на прямой a точку A , отличную от точки O и на дополнительном по отношению к лучу OA луче OB выберем точку B такую, что $OB = OA$ (это возможно согласно А14 п. 2.3.0), тем самым точка O будет серединой отрезка AB . Проведем в плоскости α прямую p, ** пересекающую прямые l , m и n соответственно в точка L , M и N . Для определенности будем считать, что точка M на прямой p лежит между точками L и N . Прямые m и n являются серединными перпенди-

* Существование такой прямой q можно получить, например, выбирая на каждой из прямых m и n точки M и N, отличные от точки O их пересечения, соединяя их прямой, затем, выбирая на прямой (MN) отличную от M и N точку L и проводя прямую $q \equiv (OL)$.

** О существовании прямой p см. в замечании к этой теореме в дополнительной части вопроса.

кулярами, проведенными соответственно в плоскостях (AMB) и (ANB), к отрезку AB . В силу свойства серединного перпендикуляра к отрезку $AM = BM$ и $AN = BN$. В $\triangle AMN$ и $\triangle BMN$ также сторона MN — общая. Следовательно, $\triangle AMN = \triangle BMN$ (по трем сторонам), а потому $\angle AML = \angle BML$. Далее рассмотрим $\triangle AML$ и $\triangle BML$, у них сторона ML — общая, $AN = BN$, $\angle AML = \angle BML$, следовательно, $\triangle AML = \triangle BML$ (по двум сторонам и углу между ними), а потому $AL = BL$. Последнее равенство означает, что $\triangle ALB$ — равнобедренный, OL — его медиана, проведенная к основанию AB , которая (согласно свойствам равнобедренного треугольника) является высотой. Таким образом, $a \equiv (AB) \perp (OL) \equiv l$. В случае $l \equiv q$ сразу следует, что $a \perp q$. В случае $l \parallel q$ так как по доказанному $l \perp a$, то в силу теоремы 3 $a \perp q$. В силу произвольности выбранной прямой $q \in \alpha$ и определения 4 следует, что прямая $a \perp \alpha$.

Рассмотрим теперь случай, когда прямая a не проходит через точку O . Проведем через точку O прямую $a_1 \parallel a$ (согласно теореме 1 вопроса 23). В силу теоремы 3 $a_1 \perp m$ и $a_1 \perp n$, по доказанному в предыдущем случае $a_1 \perp \alpha$, теперь в силу теоремы 4 получаем, что $a \perp \alpha$. Теорема 6 полностью доказана.

Замечание. Утверждение, обратное теореме, 6 непосредственно вытекает из определения 4.

Определение 5. **Общим перпендикуляром** *двух скрещивающихся прямых называется отрезок с концами на этих прямых, являющийся перпендикуляром к каждой из них* (то есть этот отрезок лежит на прямой, перпендикулярной каждой из этих скрещивающихся прямых).

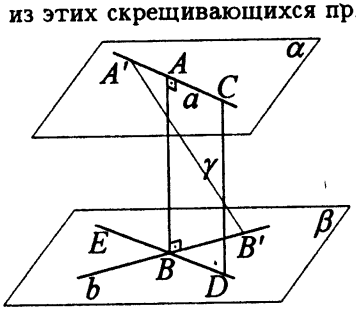


рис. 82

Теорема 7. Две скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр, и притом только один. Он является общим перпендикуляром параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые.

Доказательство

См. [10], §20. Пусть a и b — данные скрещивающиеся прямые. Согласно теореме 2 через прямую a проходит единственная плоскость α , парал-

лельная прямой b , а через прямую b проходит единственная плоскость β, параллельная прямой a , причем $\alpha \parallel \beta$. Из произвольной точки $C \in a$ проведем прямую $(CD) \perp \beta$ (о существовании такой прямой также см. в дополнительной части вопроса), тогда в силу определения 4 $(CD) \perp b$, а также силу теоремы 8 (см. дополнительную часть вопроса) $(CD) \perp \alpha$ (откуда $(CD) \perp a$), $D \in \beta$. Если оказалось, что $D \in b$, то (CD) и есть общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым a и b .

Предположим, что точка $D \notin b$. Так как прямая (CD) имеет общую точку с плоскостью β , а прямая a не имеет с ней общих точек, то эти прямые различны. Следовательно, они пересекаются в точке C . Проведем через прямые a и (CD) плоскость γ , которая пересечет плоскость β по прямой $(DB) \parallel a$ (так как $a \parallel \beta$, см. теорему 5 вопроса 23). Прямая (DB) пересечет прямую $b \in \beta$ в точке B (если предположить, что $(DB) \parallel b$, то в силу теоремы 2 вопроса 23 $a \parallel b$, а это неверно). Через точку B проведем прямую $(BA) \parallel (DC)$, следовательно, прямая $(BA) \in \gamma$, а потому эта прямая пересечет прямую a в точке A . В силу теоремы 4 $(BA) \perp \beta$, а в силу $\alpha \parallel \beta$ и (см. ниже) теоремы 8 $(BA) \perp \alpha$. Таким образом, (BA) есть общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым a и b .

Докажем единственность общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым a и b. Допустим, что существует еще один общий перпендикуляр $(A'B')$ к этим прямым. Пусть прямая $(BE) \parallel a$, ((BE) — прямая пересечения плоскостей γ и β). Тогда так как прямые (AB) и $(A'B')$ перпендикулярны a и b , то они будут перпендикулярны пересекающимся прямым (BD') и a в плоскости β и потому в силу теоремы 5 $(AB) \parallel (A'B')$, стало быть точки A и A' различные, а также точки B и B' различные и все они лежат в одной плоскости. Следовательно, прямые $a \equiv (AA')$ и $b \equiv (BB')$ лежат в одной плоскости, что неверно, так как прямые a и b скрещиваются. Тем самым единственность общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым доказана. Перпендикулярность прямой (AB) каждой из плоскостей α и β была установлена в процессе доказательства теоремы. Теорема 7 полностью доказана.

Определение 6. Длина общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым называется **расстоянием** *между этими прямыми, а также —* **расстоянием** *между соответствующими параллельными плоскостями.*

Дополнительная часть

Имеют место следующие теоремы о перпендикулярности прямой и плоскости, которые мы приведем без доказательств. Их доказательства можно найти в учебниках.

Теорема 8. Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой из них.

Доказательство см. [9], п. 33.

Теорема 9 (обратная теореме 8). *Если две плоскости перпендикулярны к одной прямой, то они параллельны.*

Доказательство см. [9], п. 34.

Теорема 10. Через всякую точку пространства можно провести к данной плоскости единственную перпендикулярную ей прямую.

Доказательство см. [5], п. 145, задачи 11, 12 и 5; [7], гл. II, §1, п. 18; [9], п. 36; [10], §20, теорема 20.7.

Теорема 11. Через всякую точку пространства можно провести к данной прямой единственную перпендикулярную ей плоскость.

Доказательство см. [5], п. 145, задача 9; [7], гл. II, §1, п. 17, задача 133; [9], п. 35, в [7] и [9] полнее; [10], §20, теорема 20.6.

Замечание (к теореме 3). Существование точки M в доказательстве теоремы 3 следует из следующих рассуждений. Если прямые a , b и c лежат в одной плоскости, то в качестве точки M можно взять произвольную точку, не лежащую в этой плоскости (согласно А8 п.2.3.0 такая точка существует). Если прямая c не лежит в плоскости γ параллельных прямых a и b , то c имеет не более одной общей точки с плоскостью γ . Выберем, например, точку A на прямой a , которая не лежит на прямой c и точку C на прямой c такую, что C не лежит в плоскости γ (очевидно, что $A \not\equiv C$). В качестве точки M можно взять, например, середину отрезка AC , $M \not\equiv A$, $M \not\equiv C$. Точка $M \notin \gamma$ (в противном случае вся прямая (AM) , в том числе и точка C будет в плоскости γ , что неверно), следовательно $M \notin a$ и $M \notin b$, точка M также не лежит на прямой c (в противном случае прямая $(CM) \equiv c$, а потому $A \in c$, что неверно).

Замечание 1 (к теореме 6). Существование прямой p в доказательстве теоремы 6 следует из следующих рассуждений. Выберем на лучах прямых l , m и n (с вершиной в точке O), причем таких, что лучи прямых m и n лежат в одной полуплоскости относительно прямой l (это возможно согласно У20 п. 2.3.0), соответственно точки L , M и N (см. рис. 81 б). Согласно У27 и У29 п. 2.3.0. можно (для определенности) предположить, что луч прямой m проходит между указанными лучами прямых l и n . Тогда, выбирая точки L и N на соответствующих лучах, мы получим (в силу У26 п. 2.3.0), что отрезок LN прямой p пересечет луч прямой m в некоторой своей внутренней точке M . Таким образом, точка M будет лежать между точками L и N на прямой p .

Замечание 2 (к теореме 6). Использование признаков равенства треугольников в пространстве правомерно. Так как можно провести их доказательство точно так же, как это делалось в вопросе 1, при этом кроме совмещения вершин и сторон треугольников для их равенства в простран-

стве надо обосновать еще и совмещение их внутренних областей. (Об этом см. в приложении к учебнику [7], где доказывается первый признак равенства треугольников в пространстве, при этом помимо приведенных там рассуждений следует применить еще и А12 (Паша) п. 2.3.0).

Вопрос 25. Признак перпендикулярности плоскостей. Теорема о трех перпендикулярах.

Вводная часть

При формулировке определения перпендикулярных плоскостей будет использовано понятие двугранного угла. Поэтому вначале мы введем это определение и рассмотрим некоторые свойства двугранных углов.

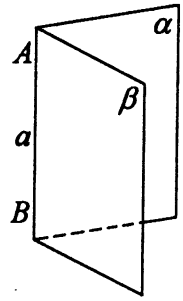


рис. 83 а)

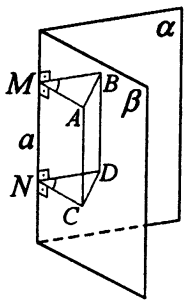


рис. 83 б)

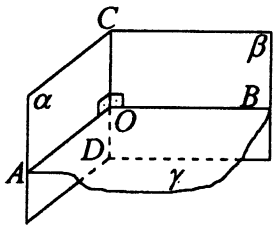


рис. 83 в)

Определение 1. **Двугранным углом** *называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a, не принадлежащими одной плоскости.* * *Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его* **гранями**. *Прямая a называется его* **ребром**.

См. рис. 83 а). Обозначаются двугранные следующим образом: $\angle\alpha a\beta$ или $\angle\alpha AB\beta$, где α и β — грани двугранного угла, a или (AB) — ребро двугранного угла.

Определение 2. Если на ребре двугранного угла выбрать какую-либо точку и из нее в каждой его грани провести перпендикулярные ребру лучи, то образованный ими угол называется **линейным углом двугранного угла.**

См. рис. 83 б). $\angle BMA$ и $\angle DNC$ — линейные углы двугранного угла $\angle\alpha a\beta$, на рис. 83 в) $\angle AOB$ — линейный угол двугранного угла $\alpha(CD)\beta$.

Отметим, что если грани двугранного угла не лежат в одной плоскости, то и стороны его линейного угла не лежат на одной прямой (в противном случае вторая сторона этого угла лежала бы в одной плоскости с первой

* В некоторых случаях это ограничение может быть снято.

стороной, что не так). Таким образом, стороны линейного угла двугранного угла лежат на прямых, пересекающихся в его вершине, которая лежит не ребре этого двугранного угла. В силу теоремы 6 вопроса 24 (признака перпендикулярности прямой и плоскости) *ребро двугранного угла перпендикулярно плоскости, в которой лежит его линейный угол* (см. рис. 83 в), $(AB) \perp \gamma)$.

Лемма. Любые два линейных угла одного и того же двугранного угла равны.

Доказательство

См. рис. 83 б). Выберем на ребре двугранного угла $\angle\alpha a\beta$ две точки M и N . На перпендикулярах, восставленных из этих точек в плоскостях α и β отложим соответственно равные отрезки $MA = NC$ $(MA, NC \in \beta)$ и $MB = ND$ $(MB, ND \in \alpha)$ (это возможно в силу A14 п. 2.3.0) , соединим отрезком точки A и B , а также точки C и D . Прямые (NC) и (MA) параллельны, так как лежат в одной плоскости α и перпендикулярны одной прямой a . По аналогичной причине параллельны прямые (ND) и (MB). Поскольку лучи MA и NC лежат в одной полуплоскости относительно прямой a , $(MA) \parallel (NC)$ и $MA = NC$ (по построению), а также $MA \perp a$, $NC \perp a$, то четырехугольник $MNCA$ — выпуклый и имеющий прямой угол, а потому в силу теоремы 5 вопроса 7 он — прямоугольник, откуда следует, что $(AC) \parallel (MN) \equiv a$ и $AC = MN$. Аналогично доказывается, что четырехугольник $MNDB$ — прямоугольник, откуда следует, что $(BD) \parallel (MN) \equiv a$ и $BD = MN$. В силу теоремы 2 вопроса 23 получаем, что $(AC) \parallel (BD)$ (откуда следует, что точки A , B , C , D лежат в одной плоскости, а потому и прямые (AB) и (CD) лежат в одной плоскости). Далее в силу теоремы 4 вопроса 23 (признака параллельности плоскостей) плоскость (MAB) параллельна плоскости (NCD) (так как $(MA) \cap (MB) \equiv M$, $MA \parallel NC$, $MB \parallel ND$). Следовательно, поскольку с одной стороны, прямые (AB) и (CD) лежат в одной плоскости, с другой стороны, они лежат в параллельных плоскостях (MAB) и (NCD) соответственно, то $(AB) \parallel (CD)$. Так как $(AC) \parallel (BD)$, то четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм (стало быть, выпуклый четырехугольник, см. теорему 3 вопроса 7). Следовательно, $AB = CD$. В треугольниках $\triangle AMB$ и $\triangle CND$ соответственно равны стороны $MA = NC$, $MB = ND$ (по построению), $AB = CD$ (по доказанному). Следовательно, $\triangle AMB = \triangle CND$ (по трем сторонам), а потому $\angle AMB = \angle CND$. Лемма доказана.

Замечание. Утверждение этой леммы означает, что линейный угол двугранного угла *не зависит от выбора его вершины на ребре двугранного угла.* При доказательстве леммы установлено, что *линейные углы одного и того же двугранного угла, образованного полуплоскостями, не лежащими в одной плоскости, лежат в параллельных плоскостях.*

Определение 3. Мера двугранного угла считается равной мере, которую имеет его линейный угол.

В дополнительной части вопроса мы еще рассмотрим утверждения, касающиеся свойств двугранных углов и их измерения.

Основная часть

Определение 4. Двугранный угол называется прямым, если его линейный угол прямой.

Определение 5. Две пересекающиеся плоскости называются **перпендикулярными**, *если при их пересечении получаются прямые двугранные углы.*

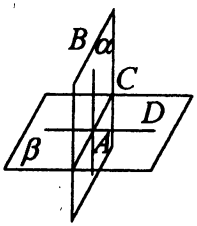


рис. 84 а)

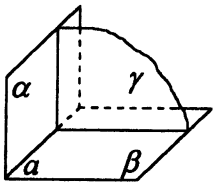


рис. 84 б)

Теорема 1 (признак перпендикулярности плоскостей). *Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.*

Доказательство

См. рис. 84 а). Пусть плоскости α и β таковы, что прямая $(AB) \in \alpha$ и $(AB) \perp \beta$, требуется доказать, что плоскости α и β перпендикулярны $(\alpha \perp \beta)$. Пусть A — точка пересечения плоскости α и β , тогда в силу леммы 3 вопроса 23 эти плоскости будут пересекаться по некоторой прямой (AC) , стало быть, в частности $(AC) \in \beta$, а потому $(AB) \perp (AC)$. Далее проведем через точку A в плоскости β прямую $(AD) \perp (AC)$, в силу перпендикулярности прямой (AB) и плоскости β $(AB) \perp (AD)$. Получили, что $\angle BAD$ — линейный угол двугранного угла $\alpha(AC)\beta$, являющийся прямым. Следовательно, согласно определениям 4 и 5 плоскости α и β перпендикулярны. Теорема 1 доказана.

Следствие. Плоскость, перпендикулярная прямой, по которой пересекаются другие две плоскости, перпендикулярна каждой из этих плоскостей.

См. на рис. 84 б) прямую $a \equiv \alpha \cap \beta$ и $a \perp \gamma$. В силу теоремы 1 $\alpha \perp \gamma$ и $\beta \perp \gamma$.

Замечание. В дополнительной части этого вопроса мы докажем еще две теоремы, выражающие свойства перпендикулярных плоскостей.

Выше, в вводной части вопроса 9 рассматривались понятия *перпен-*

дикуляра и *наклонной* к прямой на плоскости. Совершенно аналогичные определения можно ввести и по отношению к плоскости в пространстве.

Пусть даны плоскость и не лежащая на ней точка.

Определение 4. **Перпендикуляром**, *опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется* **основанием перпендикуляра**. **Длина** *этого перпендикуляра называется* **расстоянием от точки до плоскости**.

Определение 5. **Наклонной** *к данной плоскости* α *, называется прямая* l*, не являющаяся ни перпендикулярной, ни параллельной этой плоскости. Отрезок, соединяющий точку* A *с точкой на плоскости* α *и лежащий на прямой* l*, наклонной к плоскости* α *, называется* **отрезком наклонной**.

Замечание. Часто для упрощения терминологии под наклонной, проведенной из данной точки A к пплоскости α называют именно отрезок наклонной, одним из концов которого является точка A . Другой конец этого отрезка, лежащий на плоскости α , называется **основанием наклонной**.

Определение 6. Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки к плоскости, называется **проекцией наклонной**.

Замечание. Отметим, что прямая и отрезок называются *перпендикулярными*, если эта прямая перпендикулярна той прямой, на которой расположен отрезок. Плоскость и отрезок называются *перпендикулярными*, если эта плоскость перпендикулярна прямой, на которой расположен этот отрезок.

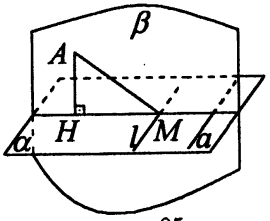


рис. 85

Теорема 2 (о трех перпендикулярах). *Если прямая, проведенная на плоскости, перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна этой наклонной.* Доказательство

См. рис. 85. Пусть AH — перпендикуляр, проведенный из точки A к плоскости α , точка H — основание этого перпендикуляра. AM — отрезок наклонной, проведенной из точки A к плоскости α , точка M — основание этой наклонной, отрезок HM — проекция этой наклонной, прямая a пер-

пендикулярна проекции HM . Точки H , M и A — различные, так как $A \notin \alpha$, $H, M \in \alpha$, поэтому $H \neq A$ и $M \neq A$ и также $A \notin (HM)$; $H \neq M$, так как H — основание перпендикуляра (он единственен), M — основание наклонной (поэтому $AM \not\perp \alpha$). Таким образом, через не лежащие на одной прямой точки A , H и M можно провести единственную плоскость β (в силу А5 п. 2.3.0). В силу теоремы 1 так как прямая $(AH) \perp \alpha$ и $(AH) \in \beta$, то плоскость $\beta \perp \alpha$. Согласно определению перпендикулярных прямой и плоскости (см. определение 4 вопроса 24) $a \perp (HA)$, в то же время по условию $a \perp (HM)$. Поскольку прямые (HM) и (HA) — различные и имеют общую точку H , то они в ней пересекаются, а потому в силу теоремы 6 вопроса 24 (признака перпендикулярности прямой и плоскости) прямая $a \perp \beta$. Следовательно $a \perp (AM)$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3 (обратная теореме 2). ***Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции этой наклонной.***

Доказательство

См. рис. 85. Оно проводится по совершенно аналогичной схеме, что и доказательство теоремы 2. Отличие лишь в том, что вместо $a \perp (HM)$ теперь по условию $a \perp (AM)$, прямые прямые (MA) и (HA) — различные и имеют общую точку A , поэтому они в ней пересекаются, стало быть, в силу теоремы 6 вопроса 24 (признака перпендикулярности прямой и плоскости) прямая $a \perp \beta$. Следовательно $a \perp (AH)$. Теорема 3 доказана.

Замечание 1. Теоремы 2 и 3 доказаны ***для произвольной*** прямой a , лежащей в плоскости α , перпендикулярной соответственно проекции наклонной и самой наклонной. Прохождение прямой a через основание наклонной, точку M ***не предполагалось***. На рис. 85 изображен случай прямой $l \perp HM$ и $l \perp AM$, в частности, для нее справедливы утверждения теорем 2 и 3.

Замечание 2. Смысл названия теорем 2 и 3 "о трех перпендикулярах" заключается в том, что в них идет речь о перпендикуляре, проведенном из точки к плоскости и о перпендикулярности прямой к наклонной и к проекции этой наклонной.

Дополнительная часть

Докажем две теоремы, выражающие свойства перпендикулярных плоскостей.

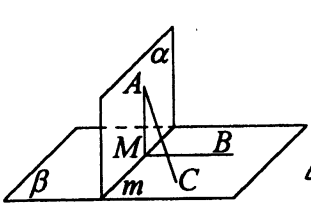


рис. 86 а)

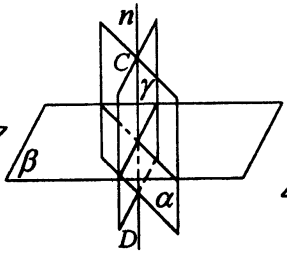


рис. 86 б)

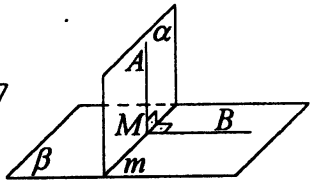


рис. 86 в)

Теорема 4. Если две плоскости взаимно перпендикулярны и к одной из них проведена перпендикулярная прямая, имеющая общую точку со второй плоскостью, то она лежит во второй плоскости.

Доказательство

См. рис. 86 а). Пусть плоскости α и β перпендикулярны, m — линия их пересечения, $(AC) \perp \beta$, точка $A \in \alpha$. Предположим, что прямая (AC) не лежит в плоскости α . На плоскости α проведем прямую $(MA) \perp m$ (точка M лежит на прямой m), а также в плоскости β проведем прямую $(MA) \perp m$ (см. следствие из У43 п. 2.3.0). $\angle AMB$ — линейный угол двугранного угла между перпендикулярными плоскостями α и β , стало быть, он прямой, а потому $(MA) \perp (MB)$. Таким образом, прямая (MA) , образуя прямые углы с перпендикулярными (а потому и пересекающимися) прямыми m и (MB) в плоскости β будет (в силу теоремы 6 вопроса 24) перпендикулярна плоскости β . Тем самым мы получим две различные перпендикулярные прямые, проведенные из точки A к плоскости β: (AM) и (AC) , что противоречит теореме 10 вопроса 24. Полученное противоречие доказывает невозможность того, что плоскость α и прямая (AC) пересекаются в точке a . Поскольку прямая (AC) имеет общую точку A с плоскостью α , то она целиком лежит в ней. Теорема 4 доказана.

Следствие. Линия пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей плоскости, также перпендикулярна третьей плоскости.

Доказательство

См. рис. 86 б). Проведем через точку C , лежащую на примой n (n — линия пересечения плоскостей α и γ , где $\alpha \perp \beta$ и $\gamma \perp \beta$), прямую, перпендикулярную плоскости β . В силу теоремы 4 она будет лежать в каждой из плоскостей α и γ , то есть будет совпадать с прямой n (в силу леммы 3 вопроса 23). Следствие доказано.

Теорема 5 Если две плоскости взаимно перпендикулярны, то любая прямая, лежащая в одной из этих плоскостей, перпендикулярная линии их пересечения, будет перпендикулярна другой плоскости.

Доказательство

См. выше рис. 86 в). Пусть плоскости α и β перпендикулярны, m — линия их пересечения, точка M на прямой m , $(MA) \in \alpha$, $(MA) \perp m$. Требуется доказать, что $(MA) \perp \beta$. Для доказательства из точки M на прямой m проведем в плоскости β $(MB) \perp m$ (согласно следствию из У43 п. 2.3.0). $\angle AMB$ — линейный угол прямого двугранного угла $\angle \alpha m \beta$, стало быть $\angle AMB$ — прямой, а потому $(MA) \perp (MB) \in \beta$. Поскольку еще и $(MA) \perp m \in \beta$, $m \cap (MB) \equiv M$, то в силу теоремы 6 вопроса 24 (признака перпендикулярности прямой и плоскости) $(MA) \perp \beta$. Теорема 5 доказана.

Отметим, что в пространстве имеют место утверждения, аналогичные утверждениям теорем 1 — 3 вопроса 9 о соотношениях между перпендикуляром и отрезком наклонной, а также — соотношениях между наклонными и их проекциями, которые проведены из одной точки, не лежащей в данной плоскости, к этой плоскости (по этому поводу см. [9], пп. 25 — 27). Для их обоснования достаточно (в случае, если наклонные и соответствующие им проекции не лежат в одной плоскости) построить *в одной плоскости*, в которой расположены одна из наклонных и ее проекций, прямоугольный треугольник с гипотенузой и катетом соответственно равными другой наклонной и ее проекции. Это построение проводится путем откладывания от основания перпендикуляра на одном из лучей прямой, содержащей проекцию первой наклонной, отрезка, равного проекции второй наклонной (на основании А14 п. 2.3.0), и затем соединения отрезком второго конца построенного отрезка с точкой, из которой проведены перпендикуляр и наклонные. Далее воспользоваться признаками равенства прямоугольных треугольников в пространстве.

Следует также привести определение угла между прямой и плоскостью, которое часто применяется при решении задач.

Пусть даны плоскость α и некоторая прямая (AB) , являющаяся наклонной к этой плоскости и пересекающая ее в точке A .

Определение 7. Углом между прямой (AB) (точнее полупрямой AB) и плоскостью α называется **острый угол** *между этой полупрямой и прямой, содержащей проекцию на плоскость α любого отрезка AB с концом B на этой полупрямой.*

Этот угол обладает тем свойством, что он является наименьшим среди всех углов, которые наклонная (AB) образует с прямыми, проведенными в плоскости α через основание A этой наклонной (см. рис. 87 а).

Обоснование этого факта см. в [9], п. 48, при этом надо применить теоремы о соотношении третьих сторон и противолежащих им углов у двух треугольников с первыми двумя соответственно равными сторонами (см. [8], п. 52).

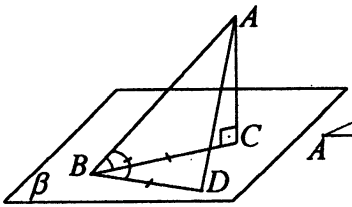


рис. 87 а)

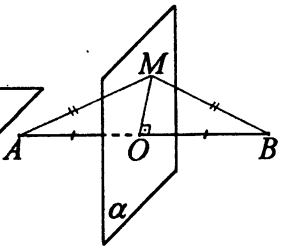


рис. 87 б)

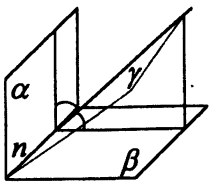


рис. 87 в)

Читателям в качестве упражнения предлагается доказать аналоги теорем 4 и 6 вопроса 4 о том, что *в пространстве точка равноудалена от концов некоторого отрезка тогда и только тогда, когда она лежит* **на плоскости**, *перпендикулярной этому отрезку и проходящей через его середину* (см. рис. 87 б).

Рассмотрим, наконец, упомянутый в вводной части этого вопроса материал о соотношении между двугранными углами.

Отметим, что по аналогии с О15 п. 2.3.0 можно рассматривать и двугранные углы четырех типов, в том числе: нулевые, развернутые и полные (образующие их грани лежат в одной плоскости). Отвечающие им линейные углы будут соответственно нулевыми, развернутыми и полными. При этом в качестве внутренних областей двугранных углов будут являться:

для углов первого типа — пересечение полупространств относительно плоскости каждой из его граней, которые содержат другую его грань;

для углов второго типа (развернутых углов) — одно из полупространств относительно плоскости его граней;

для углов третьего типа — объединение полупространств относительно плоскости каждой из его граней, которые не содержат другую его грань;

для углов четвертого типа: нулевых углов — отсутствие внутренней области, для полных углов — все пространство, кроме совпадающих граней угла.

В качестве внешней области двугранного угла выступает часть пространства, не содержащая ни его граней, ни точек внутренней области. В частности при этом у полного двугранного угла отсутствует внешняя область, у нулевого угла она представляет собой все пространство, кроме совпадающих граней угла.

Можно рассматривать и аналоги плоских углов — двугранные углы, объединенные с их внутренними областями (*пространственные двугранные углы*).

Определение 8. Два двугранных угла называются **равными**, *если они могут быть совмещены наложением (вложением)*

При этом предполагается, что при указанном вложении совмещаются их ребра, а также — или первая (вторая) грань первого угла с первой (второй) гранью второго угла, или — вторая (первая) грань первого угла с первой (второй) гранью второго угла (при совмещении их внутренних областей).

Подобно углам на плоскости можно рассматривать смежные и вертикальные двугранные углы.

По аналогии с углами на плоскости можно определять соотношения "больше" и "меньше" для двугранных углов, причем можно доказать теоремы.

Теорема 6.

А) *Равным двугранным углам соответствуют равные линейные углы.*

Б) *Большему (меньшему) из двугранных углов соответствуют больший (меньший) линейный угол.*

В) *Равным линейным углам соответствуют равные двугранные углы.*

Г) *Большему (меньшему) из линейных углов соответствуют больший (меньший) двугранный угол.*

Об этом см. [7], пп. 39 — 41.

В частности, по аналогии с О27 В) и Г) вводятся понятия с О27 В) и Г) вводятся определения острого и тупого двугранных углов.

По аналогии с тем как в вопросе 24 рассматривалось понятие угла между прямыми можно считать *углом между пересекающимися и не перпендикулярными плоскостями* **меньший** *их углов, которые образуются при их пересечении.* Угол между перпендикулярными плоскостями — прямой.

Угол между параллельными или совпадающими плоскостями будем считать **нулевым**.

Также по аналогии с углами на плоскости можно определять сумму и разность для двугранных углов, причем можно доказать, что *сумме (разности) двугранных углов отвечает сумма (разность) соответствующих им линейных углов и наоборот.*

Определение 9. **Мерой (величиной)** *двугранного угла называется мера (величина) соответствующего ему линейного угла.*

Можно доказать, что *мера двугранного угла обладает всеми свойствами меры линейного угла* (см. О28 п. 2.3.0).

Отметим, что можно было рассмотреть вопрос и об аналогах утверждений А15, А16, У47 и У49 п. 2.3.0 для двугранных углов, о соотношении внутренних областей двугранных углов и соответствующих им линейных углов, аналоги других утверждений, касающихся измерений, свойств вну-

тренней и внешней областей углов на плоскости (У23 — У29 и их следствия, У31А, У32, У36 и его следствия, У42, У43, У45, У46, У48) для двугранных углов.

В данной книге мы не будем подробно касаться этих вопросов, предоставляя читателям самим об этом подумать.

Остановимся на вопросе о биссектральной полуплоскости двугранного угла. По аналогии с О29 п. 2.3.0 введем следующее определение.

Определение 10. **Биссектральной полуплоскостью** *двугранного угла первого типа называется полуплоскость, имеющая ту же границу, что и данный двугранный угол, проходящая в его внутренней области и делящая его на два равных двугранных угла* .

На рис. 87 в) плоскость γ — биссектральная плоскость двугранного угла $\angle\alpha\pi\beta$.

Для построения биссектральной полуплоскости надо выбрать произвольный линейный угол данного двугранного угла (его плоскость будет перпендикулярна ребру этого угла), провести биссектрису этого линейного угла, а затем провести плоскость через эту биссектрису и ребро двугранного угла. Обоснование того, что полученная при этом полуплоскость, лежащая во внутренней области двугранного угла, будет его биссектральной плоскостью предоставляется читателям.

Читателям в качестве упражнения предлагается также доказать аналоги теорем 5 и 7 вопроса 4 о том, что *всякая точка, лежащая во внутренней области двугранного угла первого типа равноудалена от его граней тогда и только тогда, когда она лежит на его* **на биссектральной плоскости**.

Можно также доказать аналог У44 п. 2.3.0 о единственности биссектральной полуплоскости.

2.3.2. Дополнительная часть

В пп. 2.3.0. и 2.3.1. нами проведено в значительной мере детальное исследование вопросов той части курса элементарной геометрии, которая выносится на устный экзамен по математике *с необходимостью знания доказательств теорем*. Возможно, что не все доказательства проведены оптимальным образом, поэтому мы будем признательны всем читателям за критические замечания, способствующие в будущем улучшению содержания книги.

Учитывая определенную сложность изучения изложенного материала абитуриентами различного уровня подготовки, ниже, начиная со стр. 607, мы приведем также указания, где, в каком из приведенных циклов учебников [5] — [9] можно найти ответы на каждый из 25 вопросов курса геометрии.

Вследствие этого приведем примеры различной логической последовательности изложения материала в указанных выше учебниках геометрии, что очень важно учитывать при подготовке к экзаменам по разным учебникам. Использование различных учебников необходимо из-за отсутствия, к сожалению, доказательств *всех* теорем, в каждом из приведенных циклов учебников геометрии, что также касается и теоремы о графике линейной функции.

Пример 1. В учебниках [5], [6], [8] приводятся разные определения равных треугольников. В учебниках [6] и [8] эти определения вводятся также, как и выше, в вопросе 1, а в учебнике [5] и книге [10]:

если у треугольников ABC и $A'B'C'$ соответствующими вершинами являются вершины A и A', B и B', C и C', а соответствующими сторонами являются стороны AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, AC и $A'C'$, то

$\triangle ABC \stackrel{df}{=} \triangle A'B'C'$, *если* $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$.

Подобный подход к определению равных треугольников применяется и при изложении курса геометрии, основанном на системе аксиом, отличающейся от приведенной в п. 2.3.0, заменой группы аксиом наложения на группу аксиом "конгруэнтности" (см. книги [17] и [18]) (об этом подробно шла речь в п. 2.3.0). В вопросе 1 п. 2.3.1 было показано, каким образом из приведенного там определения равных треугольников вытекает приведенное здесь определение. В то же время в п. 90 учебника [5] доказано, что из приведенного здесь определения равных треугольников вытекает их равенство в смысле определения 8 вопроса 1 (правда, в этой ситуации под совмещением фигур понимается преобразование одной из них в другую в результате движения). Тем самым, эти два определения равных треуголь-

ников можно в указанном смысле считать *эквивалентными*.

Отметим, что аналогичным образом можно ввести определения равных многоугольников как имеющих равные соответствующие стороны и равные соответствующие внутренние углы, или как совмещающихся при наложении и доказать эквивалентность этих определений.

Пример 2. В учебниках [5], [6], [8] приводятся разные определения подобных треугольников. В учебниках [6], [8] и книге [10] эти определения вводятся также, как и выше, в вопросе 8, а в учебнике [5] сначала вводятся понятия гомотетии и преобразования подобия фигур, затем они распространяются на треугольники как частные случаи фигур и определение 3 вопроса 8 получается как следствие свойств преобразования подобия (см. [5], пп. 100 — 101). При доказательстве признаков подобия треугольников существенно используется утверждение о том, что *гомотетия — преобразование подобия*. Однако в учебнике [5] "базовым" утверждением для установления этого факта является теорема о пропорциональных отрезках, доказанная задолго до этого, в п. 60. Что касается книги [10], то там на основе определения подобных треугольников так же, как и в вопросе 8 п. 2.3.1. теорема о гомотетии как частном случае преобразования подобия доказывается на основе доказанных перед этим признаков подобия треугольников. Во всех этих случаях: и в п. 60 учебника [5], и в §12 книги [10] используется операция предельного перехода. Эта операция используется и в лемме 2 вопроса 8, так что в полной мере избежать ее применение в доказательстве существенных теорем геометрии не удается.

Пример 3. В учебниках [6], [8] приводится то же определение касательной к окружности, что и в вопросе 21, а в учебнике [5] и книге [10] в качестве определения касательной к окружности выступает то, что в вопросе 21 доказано как теорема, выражающая ее свойство, и наоборот. Важно отметить то, что в приведенном определении касательной к окружности существенным являлось требование их принадлежности одной плоскости, что ни в одном из учебников явно не упоминается. Скорее всего, это связано с тем, что определение касательной к окружности дается в курсе *планиметрии*, где априори предполагается, что все происходит в одной плоскости. Однако с точки зрения общего курса геометрии, включая и стереометрию, вполне допустимо наличие единственной общей точки у окружности и прямой, пересекающей плоскость окружности в некоторой точке, лежащей на этой окружности. При этом перпендикулярности указанной прямой к радиусу окружности, проведенному в эту точку, может и не быть.

Пример 4. В учебниках [6], [8] приводится то же определение перпендикулярных плоскостей, что и в вопросе 25, а в учебнике [5] и книге [10] — другое. Правда, нетрудно доказать эквивалентность этих определений.

Пример 5. В данной книге приведено нетрадиционное определение трапеции как четырехугольника, у которого по крайней мере две стороны параллельны (см. вопрос 12 п. 2.3.1), согласно которому параллелограмм является ее частным случаем. Правда, затем приведенное определение равнобедренной трапеции уже предполагает непараллельность ее боковых сторон, а потому равнобедренной трапецией параллелограмм не является.

Сформулируем определение площади плоской фигуры, которое приводимые ниже примеры будут использовать.

Определение 1. Площадью фигуры называется положительное действительное число, поставленное ей в соответствие и обладающее следующими свойствами:

1) *существует плоская фигура площади, равной* 1 *(единица измерения), такой фигурой является квадрат, имеющий равную* 1 *(единице измерения длин) длину стороны;*

2) *равные фигуры имеют равные площади;*

3) *если фигура разбивается на части (фигуры), никакие две из которых не имеют общих внутренних точек, то площадь этой фигуры равна сумме площадей ее частей.*

При этом площадь фигуры, состоящей из конечного количества точек, отрезков, дуг, линий и т.п. по определению *считается равной нулю.*

Совершенно аналогичным образом вводятся определения длины отрезка (см. О24 п. 2.3.0) и объема пространственного тела. Отметим, что за единицу измерения объемов принимается куб, длина ребра которого равна 1.

Знание доказательств корректности этих определений (то есть существование длин отрезков, площадей плоских фигур, объемов пространственных тел и независимость площади или объема в условии 3) от разбиения фигур и тел на составляющие) от поступающих не требуется.

Отметим, что приведенное определение площади (объема) в школьном курсе в основном применимо к фигурам, состоящим из многоугольников и многогранников. Однако в этом курсе вводятся понятия площадей круга и его частей, объемов круглых тел (цилиндра, конуса, шара и его частей) и т.п., имеющие в общем-то описательный характер.

Строгие определения площадей произвольных плоских фигур, объемов пространственных тел и доказательства корректности этих определений даются в курсах математического анализа, поэтому их знание от поступающих не требуется. В этих курсах дается и определения: плоской фигуры, имеющей площадь, равную нулю, и пространственного тела, имеющего равный нулю объем.

Следует также отметить, что приведенные в школьных курсах выводы

формул площадей прямоугольника и объема прямоугольного параллелепипеда явно или неявно используют операцию предельного перехода, а на них основаны выводы площадей и объемов остальных фигур и тел (параллелограмма, треугольника, трапеции, правильного многоугольника, параллелепипеда, призмы, пирамиды и т.п.).

Поэтому так как умение применять на вступительных экзаменах по математике в МГУ операцию предельного перехода (или теорию пределов) и все, что на ней основано (в частности, производную функции), от поступающих не требуется (хотя у них есть право использовать производную), они имеют право знать *без доказательств* те формулы площадей и объемов, которые указанную операцию непосредственно используют.

Выводы остальных формул, например, формулы площади параллелограмма и треугольника (зная формулу площади прямоугольника и определение площади) и многих других формул площадей и объемов на экзаменах вполне могут быть предложены в качестве задач. Но они также могут применяться при решении задач без доказательств, если используются в качестве промежуточных результатов (например, формула объема многогранника через площадь его полной поверхности и радиус вписанной в него сферы в задаче 6 п. 3.1.7 раздела III данной книги).

Отметим еще, что на письменном экзамене можно без доказательств применять утверждения об отношении площадей (объемов) подобных плоских фигур (подобных тел), равного $k^2(k^3)$, где k — коэффициент подобия, который равен отношению длин соответствующих (или сходственных) элементов этих фигур. См., например, задачу 5 варианта в п. 2.3.1. раздела III. Однако доказательства этих утверждений вполне могут быть предложены на устном экзамене в качестве задач.

Пример 6. В учебнике [6] дается оригинальный и, пожалуй, наиболее простой по сравнению с другими учебниками способ доказательства признаков подобия треугольников. Однако он основан на введенной перед этим площади треугольника, которая выводится из площади параллелограмма, а она в свою очередь выводится из площади прямоугольника, и даже на отношении площадей подобных треугольников.

При этом неожиданно для многих поступающих встает вопрос : "почему формула площади параллелограмма $S = a \cdot h_a$ и площади треугольника $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$ не зависит от того, какая из сторон берется за основание, или другими словами, почему соответственно имеют место равенства

$$a \cdot h_a = b \cdot h_b \ , \ \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c \ ?"$$

Если излагать ответ на вопрос о признаках подобия треугольников так, как это делается в учебнике [8] или книге [10], где подобие треугольников

вводится до изучения темы "Площади фигур" и потому доказательство признаков их подобия никак не использует * понятие площади, то на поставленный вопрос можно дать следующий ответ (см. рис. 88 а) и б):

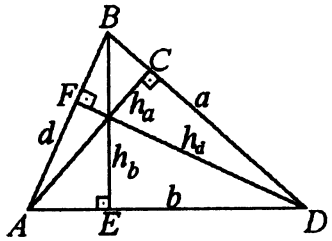


рис. 88 а)

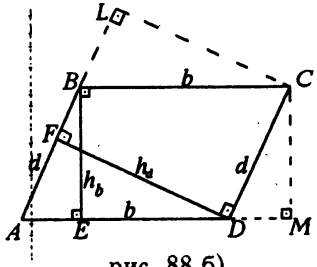


рис. 88 б)

$\triangle ABE \sim \triangle ADF$ как прямоугольные, имеющие общий острый угол, а потому $\frac{b}{d} = \frac{h_d}{h_b} \Leftrightarrow b \cdot h_b = d \cdot h_d$, (другие случаи расположения сторон и проведенных к ним высот рассматриваются аналогично, в частности, это касается равенства $a \cdot h_a = b \cdot h_b$ (см. рис. 88 а), что предоставляется учащимся самостоятельно). Подробнее по этому вопросу см. в [10].

Как видим, при ответе на данный вопрос использовалось подобие треугольников и потому в соответствии со схемой изучения вопроса о подобии треугольников, предложенной в учебнике [6], так отвечать на вопрос о независимсти площади треугольника и параллелограмма от того, какая из их сторон берется за основание, нельзя.

Можно это сделать на основе того, что площадь параллелограмма определена однозначно и равна площади каждого из прямогольников $EBCM$ и $FLCD$ (см. рис. 88 б). Аналогично обстоит дело и в случае площади треугольника. (Детали обоснования предоставляем читателям, в основе лежит приведенная в каждом из учебников геометрии схема вывода формулы площади параллелограмма на основе формулы площади прямоугольника и формулы площади треугольника, равной половине площади параллелограмма, до которого он достраивается).

Пример 7. Более простым примером может служить факт : теорема Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$ является частным случаем теоремы косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ (более подробные формулировки этих теорем см. выше, соответственно в Вопросах 4 и 12), поскольку косинус прямого угла равен нулю.

---

* Правда, это доказательство основано на лемме об отсечении прямой, параллельной одной из сторон данного треугольника и пересекающей другие его стороны, подобного ему треугольника, эта лемма доказывается путем применения операции предельного перехода и потому может использоваться поступающими без доказательства.

Однако теорему Пифагора нельзя *доказывать*, используя теорему косинусов. Последняя теорема в своем доказательстве согласно схеме изложения в учебнике [8] использует утверждения, вытекающие из теоремы Пифагора, а согласно схемам изложения в учебниках [5] и [6] — соответственно использует свойства скалярного произведения векторов и координатный метод. Эти методы явно или не очень явно основаны на применении формулы расстояния между точками на координатной плоскости, а она в свою очередь доказывается на основе теоремы Пифагора.

Несмотря на все сказанное, тем не менее теорема, обратная теореме Пифагора, может быть непосредственно доказана на основе теоремы косинусов (учащимся предоставляется самостоятельно сформулировать обратную теорему Пифагора и доказать ее указанным способом). В учебнике [6] дается другой способ доказательства обратной теоремы Пифагора, который приведен и в вопросе 10 п. 2.3.1.

Коротко о вписанных в окружность и описанных около окружности многоугольниках. О многоугольниках говорилось в вопросе 6. Вводятся эти определения по аналогии с тем, как это вводилось выше для треугольников и четырехугольников.

Для выпуклых вписанных в окружность многоугольников можно доказать аналоги теорем о существовании общей точки серединных перпендикуляров к его сторонам, которая является центром указанной окружности, а также доказать теоремы о принадлежности внутренней области описанной около него окружности всех его внутренних точек и точек сторон, кроме его вершин, об отсутствии общих внутренних точек круговых сегментов, образованных различными сторонами этого многоугольника и стягиваемыми ими дугами окружности, все эти точки лежат вне многоугольника.

Для описанных около окружности многоугольников можно доказать аналоги теорем о существовании общей точки биссектрис его внутренних углов, которая является центром указанной окружности, а также доказать теоремы о принадлежности внутренней области многоугольника всех точек вписанного в него круга, кроме точек его касания со сторонами.

Определение 2. Выпуклый многоугольник называется **правильным**, *если равны все его стороны и внутренние углы.*

Согласно теоремам о сумме внутренних и внешних углов выпуклого многоугольника (n - угольника) градусные меры каждого из внутренних углов правильного выпуклого n - угольника равны $(n-2)180°/n$, а градусные меры каждого из его внешних углов равны $360°/n$.

Можно доказать, что *всякий правильный выпуклый многоугольник можно вписать в окружность и около него можно описать окружность* и что *всякие правильные выпуклые многоугольники с одинаковым числом*

сторон подобны (см. [10], §15, теоремы 15.8 и 15.9). См. выше, на стр. 28 данной книги, рис. 50 формулы для выражений длин стороны правильного вписанного и описанного n - угольника через радиусы описанной около него и вписанной в него окружностей.

Отметим, что в §17 книги [10] даются определения и выводятся формулы длины окружности, длины дуги окружности, имеющей заданную градусную меру, а также — площади круга и круговых сектора и сегмента. Там же вводится и радианная мера угла. Все эти формулы выше упоминались. Мы только отметим, что их вывод также основан на применении операции предельного перехода и потому от поступающих не требуется умения выводить эти формулы на экзаменах. Особенностью этих определений является то, что их значения являются *наименьшими числами, большими соответственно периметра и площади любого выпуклого многоугольника, вписанного в окружность и периметра любой выпуклой ломаной, вписанной в дугу окружности.** Определение, существование и единственность указанных чисел даются в курсах математического анализа.

Нами остались не рассмотренными: понятия многогранных углов и их свойства (см., например, в книге [10], §22 теоремы косинусов и синусов для трехгранного угла), многогранников (призмы ** и ее частных случаев, пирамиды, в частности, правильной пирамиды), круглых тел (прямой круговой цилиндр, прямой круговой конус, шар, сфера и их части и др.); выводы объемов и площадей поверхностей указанных пространственных фигур, их комбинации, их сечения плоскостью, касания и т.п.; векторов на плоскости (хотя определение вектора давалось в вопросе 15) и в пространстве, их свойства и операции над ними, различные виды уравнений прямых на координатной плоскости, прямых и плоскостей в координатном пространстве; расстояние между точками в координатном пространстве, уравнение сферы. Однако в разделе I многие из этих формул приведены. Мы также отсылаем читателей к указанной на стр. 249 — 250 литературе как учебной, так и справочной. См. также в приложении 4 к учебнику [6] теоремы Чевы и Менелая.

В заключение раздела, посвященного вопросам геометрии, считаем необходимым обратить внимание на необходимость знания системы аксиом, лежащих в основе как планиметрии, так и стереометрии (в каждом из указанных циклов учебников система аксиом приводится).

При этом может оказаться, что некое утверждение в одном из учебников

---

* Об этих понятиях см. в [10].

** К сожалению, в учебнике [9] дается не вполне корректное ее определение, об этом см. [2], р. III, §1 п. А .

может приводиться в качестве аксиомы, а в другом — в качестве теоремы.

Пример 8. В учебнике [9] в качестве аксиомы приводится утверждение: *через всякие три точки в пространстве, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и при том только одну*, которое в учебнике [5] выступает в качестве теоремы.

Это говорит о том, что система аксиом, лежащая в основе того или иного курса геометрии (да и не только геометрии), может быть различной. Однако в вопросах о том, какие утверждения берутся в качестве аксиом (то есть принимаются без доказательств), а какие — в качестве теорем (то есть требуют доказательств) нет произвола, поскольку всегда система аксиом, лежащая в основе той или иной теории, должна удовлетворять определенным условиям (о них говорилось в VII п. 2.3.0). Из этих условий, в частности, вытекает, что никакая из аксиом данной системы не должна как теорема вытекать из остальных аксиом этой системы. Поэтому приведенный выше пример говорит о том, что заведомо и система аксиом учебника [5] обязательно должна содержать такую, которая в качестве теоремы может быть доказана, исходя из системы аксиом учебника [9].

Если какую-либо из аксиом данной системы заменить эквивалентным ей утверждением то есть таким, которое имеет место тогда и только тогда, когда выполняется данная аксиома, то в качестве аксиомы может быть взято указанное утверждение, а прежняя аксиома относительно новой системы аксиом уже будет теоремой.

Примером этой ситуации является эквивалентность пятого постулата Евклида и аксиомы параллельности прямых на плоскости. Об этом см. в конце учебника [9]. О системе аксиом геометрии вообще можно прочитать в конце каждого из учебников [6], [7] и [9]. Однако в п. 2.3.0. был проведен анализ этих систем аксиом и оказалось, что некоторые из них на самом деле аксиомами не являются.

Вопрос 1. Признаки равенства треугольников.

См. [5], §3, п.20—22, 27;
[6], гл.2, §1, 3, п.14—15, 19—20;
[8], гл.I, р.III, п.41—42.

Вопрос 2. Свойства вертикальных и смежных углов. Теорема о внешнем угле треугольника.

См. [5], §2, п.14—15;
[6], гл.I, §6, п.11 (изложено очень кратко);
[8], гл.I, р.I, п.22, 26, р.III, п. 43—45.

Вопрос 3. Свойства равнобедренного треугольника.

См. [5], §3, п.23—26;
[6], гл.2, §2, п.18;

[8], гл.II, р.III, п.35, 38—40.

Вопрос 4. Свойство серединного перпендикуляра к отрезку. Свойство биссектрисы угла.

См. [5], §5, п.48; задача 16 к §9;
[6], гл. VIII, §3, п.72 (предпочтительнее по этому учебнику);
[8], гл. I, р.III, п.58—60.

Вопрос 5. Теоремы о параллельных прямых на плоскости.

См. [5], §1, п.11; §4, п.29—32;
[6], гл.3, §1, п.24—26, §2, п. 27—29;
[8], гл.I, р.V, п.70—80.

Вопрос 6. Теорема о сумме внутренних углов треугольника. Теорема о внешнем угле треугольника. Теорема о сумме внутренних углов выпуклого многоугольника.

Вопрос 7. Признаки параллелограмма. Свойства параллелограмма.

См. [5], §6, п.51—53, разобранная в тексте учебника задача 18,
дополнительно п.54—56 (о прямоугольнике, ромбе, квадрате);
[6], гл.V, §2, п.42—43 дополнительно §3 п.45—46
(о прямоугольнике, ромбе, квадрате);
[8], гл.I, р.VI, п.87—91 дополнительно п.92—94
(о прямоугольнике, ромбе, квадрате).

Вопрос 8. Теорема Фалеса. Признаки подобия треугольников.

См. [5], §6, п.57; §11, п.103—105;
[6], гл.V, §2, задачи 385, 396; гл.7, п.56—61,
в учебнике [6] особый подход к изложению подобия треугольников;
[8], гл.I, р.VI, п.95, 100; гл.III, р.II, п.156—162; р.V,
п.182—185.

Вопрос 9. Признаки равенства и подобия прямоугольных треугольников. Теорема Пифагора.

См. [5], §4, п.35, задача 29 к §3
(мало, только один признак равенства);
§11, п.106;
[6], гл.IV, §3, п.35 (подробно),
но признаков подобия прямоугольных
треугольников в тексте учебника нет;
[8], гл.I, р.III, п.56—57 (подробно); гл.III, п.163—164.

Вопрос 10. Пропорциональность отрезков в прямоугольном треугольнике. Теорема Пифагора.

См. [5], §7, п.63; §11, п.106, из результатов этого п. также достаточно

просто можно вывести теорему Пифагора;
[6], гл.VI, §3, п.54—55, гл.VII, §3, п.63, задача 578;
[8], гл.III, р.VI, п.188—193; см. также гл.V, р.I, п.257—258.

Вопрос 11. Свойство отрезков, на которые биссектриса треугольника делит противоположную сторону.

См. [5], §11, п.106, дополнительно можно задачу 46 к §11;
[6], гл.VII, §4, задача 535, в задаче 609 см. обратное утверждение, в задаче 619 см. свойство биссектрисы внешнего угла треугольника (это уже дополнительный вопрос) ;
[8], гл.III, р.V, п.186—187, там же и о свойстве биссектрисы внешнего угла треугольника, но это уже дополнительный вопрос.

Вопрос 12. Свойства средней линии треугольника. Свойства средней линии трапеции.

См. [5], §6, п.58—59;
[6], гл.VII, §3, п.62; гл.IX §3, п.85 (векторный вывод);
[8], гл.I, р.VI, п.95—99.

Вопрос 13. Теорема косинусов для треугольника.

См. [5], §12, п.109;
[6], гл.XI, §2, п.98;
[8], гл.VI, п.194—197,
Замечание. В учебнике [8] на самом деле доказывается некоторая теорема, из которой непосредственно вытекает теорема косинусов, однако в серии "старых" школьных учебников доказательство теоремы косинусов есть в учебнике "Тригонометрия", дополнительный материал к курсу геометрии 9, 10 классов, гл.II (автор П.В. Стратилатов). См. также [10], теоремы 13.3 и 14.6.
Замечание. В учебнике [5] теорема косинусов доказывается векторным методом с использованием свойств скалярного произведения двух векторов, а последнего понятия нет в программе вступительных экзаменов по математике для поступающих в МГУ, однако так как скалярное произведение двух векторов изучается в школьной программе, его можно использовать на вступительных экзаменах по математике в МГУ.

Вопрос 14. Теоремы о пересечении медиан, пересечении биссектрис и пересечении высот треугольника.

См. [5], §5, п.41; §6, задача 74 3), 2), 1), о пересечении высот в тексте учебника нет;
[6], гл.VIII, §3, п.72—73; гл. VII, §3, п.62;
[8], гл.II, р.VII, п.142—143, р.VI, п.136—137 2).

Вопрос 15. Формула для вычисления расстояния между двумя точками на координатной плоскости. Уравнение окружности.

См. [5], §8, п.73—74;
[6], гл.X, §2, п.88—89 в) и 90—91 (использован векторный метод);
[8], в тексте учебника нет.

Вопрос 16. Теоремы о вписанных углах. Теорема об угле, образованном касательной и хордой. Свойство четырехугольника, вписанного в окружность.

См. [5], §11, п.107, задачи 59 и 56;
[6], гл.VIII, §2, п.70—71, задача 664; §4, п.75,
см. также разобранную в тексте учебника
задачу 729 (обратное утверждение);
[8], гл.II, р.V, п.123—125, 131; р.VI, п.136, 139; (в [6] полнее).

Вопрос 17. Теоремы об угле между двумя пересекающимися хордами и об угле между двумя секущими, выходящими из одной точки.

См. [5], в тексте учебника нет ;
[6], гл.VIII, задачи 718 и 719 ;
[8], гл.II, р.V, п.130 .

Вопрос 18. Равенство произведений длин отрезков двух пересекающихся хорд. Равенство квадрата длины отрезка касательной произведению длины отрезка секущей на длину ее внешней части.

См. [5], §11, п.108, задача 62; §8, п.80 (с помощью метода координат);
[6], гл.VIII, §2, п.71, задача 670; §1. п.68;
[8], гл.III, р.VII, п.199—202; гл.II, р.III, п.112.

Вопрос 19. Теорема об окружности, описанной около треугольника.

См. [5], §5, п.39;
[6], гл.VIII, §4, п.75 (полнее, чем в [5]);
[8], гл.II, р.VI, п.137 1) (полнее, чем в [5] и [6]).

Вопрос 20. Теорема синусов для треугольника.

См. [5], §12, п.110 и разобранная в тексте учебника задача 13;
[6], гл.XI, §2, п.97 и разобранная в тексте учебника задача 1033;
[8], в тексте учебника нет,
однако в серии "старых" школьных учебников доказательство теоремы синусов есть в учебнике "Тригонометрия", дополнительный материал к курсу геометрии 9, 10 классов, гл.II (автор П.В. Стратилатов).

Вопрос 21. Свойство касательной к окружности. Равенство касательных, проведенных из одной точки к окружности. Свойство четырехугольника, описанного около окружности.

См. [5], §5, п.40, задача 8, разбираемая в тексте, задача 15
(обратное утверждение); задача 16.1;
об описанном четырехугольнике в тексте учебника нет, однако
о нем можно найти в [10], §11, задача 26;
[6], гл.VIII, §1, п.69, §2, задача 673; §4, п.74,
см. также разобранную в тексте учебника задачу 724
(обратное утверждение);
[8], гл.II, р.III, п.112—113, р.V, п.128; р.VI, п.136, 140; (в [6] полнее).

Вопрос 22. Теорема об окружности, вписанной в треугольник.

См. [5], §5, п.41;
[6], гл.VIII, §4, п.74 (полнее, чем в [5]);
[8], гл.II, р.VI, п.137 2) (полнее, чем в [5]).

Вопрос 23. Теоремы о параллельных прямых в пространстве. Признак параллельности прямой и плоскости. Признак параллельности плоскостей.

См. [5], §16, п.136—141;
[7], гл.I, §1, п.4—6, §3, п.10—11;
[9], гл.I, р.II, п.8—17.

Вопрос 24. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Теорема об общем перпендикуляре к двум скрещивающимся прямым.

См. [5], §17, п.143—146, 150;
[7], гл.II, §1, п.15—18, §3, задача 186;
[9], гл.I, р.III, п.23—24, р.IV, п.37.

Вопрос 25. Признак перпендикулярности плоскостей. Теорема о трех перпендикулярах.

См. [5], §17, п.147—149;
[7], гл.II, §2, п.20, §3, п.23, задачи 178—179;
[9], гл.I, р.III, п.24, 28—29, р.V, п.42—48.

2.4. Приложения к методическим материалам вопросов устного экзамена по математике. О выпуклости функций

IX. Рассмотрим еще одно свойство функции, свойство выпуклости, не входящее в программу вступительных экзаменов по математике и потому не обязательное для знания на этих экзаменах, но тем не менее очень важное и фактически присутствующее при построении графиков функций.

Мы сформулируем определения выпуклости функций и исследуем на выпуклость линейную квадратичную, показательную, логарифмическую, степенную и тригонометрические функции.

Сформулируем определения выпуклости функции (см. [13], гл. 4, §1, п. 2^0).

Определение 9. Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вниз (вверх)* на множестве $\{X'\} \subseteq D[f]$, если выполняются следующие условия:

1) $\forall\, x_1$ и $x_2 \in \{X'\} \Rightarrow \dfrac{x_1 + x_2}{2} \in \{X'\}$, 2) $\forall\, x_1$ и $x_2 \in \{X'\}$

$$(1)\ f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \quad \left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right), \quad (2)$$

если при выполнении условия 1) вместо условия 2) выполняется условие 2′) : $\forall\, x_1$ и $x_2 \in \{X'\}$, $x_1 \neq x_2$

$$(1')\ f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \quad \left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right), \quad (2')$$

то функция $f(x)$ называется *строго выпуклой вниз (вверх).*

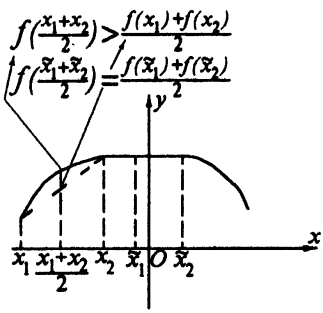


рис. 1 а)
выпуклость вверх с участками строгой выпуклости

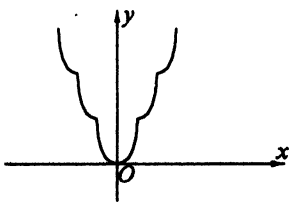


рис. 1 б)
невыпуклая функция

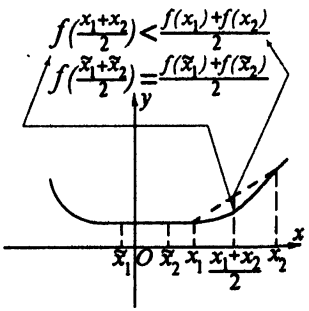


рис. 1 в)
выпуклость вниз с участками строгой выпуклости

На рис. 1 а) и в) указан геометрический смысл выпуклостей и строгих выпуклостей вверх и вниз функций. На рис. 1 б) показан график функции, обладающей в точности такими же свойствами, как и функция $y = x^2$, но не обладающей свойством выпуклости вниз на всей области определения (см. ниже п. 2.4.2).

Учащимся предлагается самостоятельно, используя лишь определения четной и нечетной функций, периодической функции и выпуклости функции, доказать следующие утверждения 1 — 4, на основе которых решаются вопросы о промежутках выпуклости алгебраических и тригонометрических функций.

Пусть множество $\{X\}$ содержится в области определения функции $f(x)$ (а может быть и совпадает с $D[f]$), то есть оно $\subseteq D[f]$ и $\{X\} \subseteq [0, +\infty)$ или $(0, +\infty)$; и множество $\{-X\}$ чисел, противоположных по знаку числам множества $\{X\}$, также $\subseteq D[f]$ (очевидно, $\{-X\} \subseteq (-\infty, 0]$ или соответственно $\{-X\} \subseteq (-\infty, 0)$).

Утверждение 1. Если функция $f(x)$ четная и выпукла или строго выпукла вниз (вверх) на множестве $\{X\}$, то она также соответственно выпукла или строго выпукла вниз (вверх) на множестве $\{-X\}$.

Утверждение 2. Если функция $f(x)$ нечетная и выпукла или строго выпукла вниз (вверх) на множестве $\{X\}$, то она соответственно выпукла или строго выпукла вверх (вниз) на множестве $\{-X\}$.

Доказательство этих двух утверждений см. в [13], гл. 4, §1, п. 2^0.

Пусть $\{X\} \subseteq D[f]$ и множество $\{\{X\} + a\}$ представляет собой множество чисел, равных $x + a$, где x — произвольное число из множества $\{X\}$, a — фиксированное действительное число.

Утверждение 3. Если функция $f(x)$ периодическая с периодом T и выпукла или строго выпукла вниз (вверх) на множестве $\{X\}$, то она также соответственно выпукла или строго выпукла вниз (вверх) на множестве $\{\{X\} + nT\}$ $\forall n \in Z, \quad n \neq 0$.

Утверждение 4. Если функция $f(x)$ выпукла или строго выпукла вниз (вверх) на множестве $\{X\}$, то функция $-f(x)$ соответственно выпукла или строго выпукла вверх (вниз) на этом множестве.

Это утверждение вытекает из того, что неравенства, определяющие то или иное направление выпуклости функции $f(x)$ применительно к функции $-f(x)$, просто меняют знак на противоположный (в силу свойства 5 числовых неравенств).

2.4.1. Выпуклость линейной функции

Легко показать, что всякая линейная функция $y = ax + b$ является одновременно и выпуклой вниз, и выпуклой вверх на всей своей области определения.

Вытекает это из того, что для всякой линейной функции $f(x) = ax + b$ при любых x_1 и $x_2 \in R$—$D[f]$ имеет место равенство:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

2.4.2. Выпуклость квадратичной функции

Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ строго выпукла вниз (вверх) на всей своей области определения (на промежутке $(-\infty, +\infty)$) если $a > 0 \quad (a < 0)$.

Доказательство. Фиксируем произвольные x_1 и $x_2 \in R$, $\quad x_1 \neq x_2$. Сравним разность выражений:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad \text{с числом} \quad 0.$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + b\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + c -$$

$$- \frac{ax_1^2 + bx_1 + c}{2} - \frac{ax_2^2 + bx_2 + c}{2} = \frac{1}{4}a(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1^2 - 2x_2^2) =$$

$$= -\frac{a}{4} \cdot (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) = -\frac{a(x_1 - x_2)^2}{4}.$$

Если $a > 0 \quad (a < 0)$, то при $x_1 \neq x_2 \Rightarrow -\frac{a(x_1 - x_2)^2}{4} < 0 \quad (> 0)$, а потому в конечном итоге для квадратичной функции имеет место неравенство (1') ((2')), что и означает ее выпуклость вниз (вверх) на $(-\infty, +\infty)$, что и требовалось доказать.

2.4.3. Выпуклость показательной функции

Функция $f(x) = a^x$ строго выпукла вниз на всей своей области определения (на промежутке $(-\infty, +\infty)$) при любом $a > 0 \quad a \neq 1$.

Доказательство. Фиксируем произвольные x_1 и $x_2 \in R$, $\quad x_1 \neq x_2$. Сравним выражения:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \quad \text{и} \quad \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

В силу строгой монотонности функции a^x

$$a^{\frac{x_1}{2}} \neq a^{\frac{x_2}{2}} \quad \Rightarrow \quad 0 < \left(a^{\frac{x_1}{2}} - a^{\frac{x_2}{2}}\right)^2 .$$

Раскрывая скобки, применяя свойства числовых неравенств и свойства степеней, будем иметь:

$$0 < \left(a^{\frac{x_1}{2}}\right)^2 - 2a^{\frac{x_1}{2}}a^{\frac{x_2}{2}} + \left(a^{\frac{x_2}{2}}\right)^2 \Rightarrow 2a^{\frac{x_1}{2}}a^{\frac{x_2}{2}} < \left(a^{\frac{x_1}{2}}\right)^2 + \left(a^{\frac{x_2}{2}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a^{\frac{x_1+x_2}{2}} < \frac{a^{x_1} + a^{x_2}}{2} ,$$

тем самым строгая выпуклость вниз функции a^x доказана.

2.4.4. Выпуклость логарифмической функции

Функция $f(x) = \log_a x$ строго выпукла вверх (вниз) на всей своей области определения (на промежутке $(0, +\infty)$) если $a > 1$ $(0 < a < 1)$.

Доказательство. Фиксируем произвольные положительные действительные x_1 и x_2 , $x_1 \neq x_2$, откуда $(x_1 + x_2)/2 > 0$, тогда из

$$(x_2 - x_1)^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 > 4x_1x_2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 > x_1x_2 .$$

В силу возрастания (убывания) функции $\log_a x$ при $a > 1$ $(0 < a < 1)$ и формул логарифма произведения и степени вытекает:

$$2\log_a \frac{x_1 + x_2}{2} = \log_a \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 > (<)$$

$$> (<) \log_a x_1x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2 , \quad \text{откуда}$$

$$\log_a \frac{x_1 + x_2}{2} > (<) \frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2} ,$$

что и означает строгую выпуклость вверх (вниз) логарифмической функции с основанием $a > 1$ $(0 < a < 1)$, что и требовалось доказать.

2.4.5. Выпуклость степенной функции x^n с отрицательным показателем n

При любом $n < 0$ функция x^n строго выпукла вниз на промежутке $(0, +\infty)$.

Доказательство. Фиксируем произвольные положительные действительные x_1 и x_2 , $x_1 \neq x_2$, откуда $(x_1 + x_2)/2 > 0$, тогда в силу строгой выпуклости вверх функции $\log_a x$, строгой выпуклости вниз и возрастания

функции a^x при $a > 1$, отрицательности n, основного логарифмического тождества и формулы логарифма степени будем иметь

$$\log_a \frac{x_1+x_2}{2} > \frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2} \quad \Rightarrow \quad n\log_a \frac{x_1+x_2}{2} < n\frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2},$$

откуда

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^n = a^{\log_a \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^n} = a^{n\log_a \frac{x_1+x_2}{2}} < a^{n\frac{\log_a x_1 + \log_a x_2}{2}} <$$

$$< \frac{a^{n\log_a x_1} + a^{n\log_a x_2}}{2} = \frac{x_1^n + x_2^n}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^n < \frac{x_1^n + x_2^n}{2}.$$

Следует особо отметить, что в приведенном доказательстве нигде не использовалось то, что n — целое число.

В силу утверждения 1 при четном n функция x^n также выпукла вниз на промежутке $(-\infty, 0)$, а в силу утверждения 2 при нечетном n функция x^n выпукла вверх на промежутке $(-\infty, 0)$.

2.4.6. Выпуклость степенной функции x^n с положительным показателем n

При любом $n > 1$ функция x^n строго выпукла вниз на промежутке $[0, +\infty)$.

Случай $n = 2$ — частный случай квадратичной функции при $a = 1, \quad b = c = 0,$ рассмотренной выше.

По поводу остальных случаев см. в самом конце замечание.

В силу утверждения 1 при четном n функция x^n также выпукла вниз на промежутке $(-\infty, 0]$, а в силу утверждения 2 при нечетном n функция x^n выпукла вверх на промежутке $(-\infty, 0]$.

2.4.7. Выпуклость тригонометрической функции $f(x) = \sin x$

Функция $\sin x$ строго выпукла вверх (вниз) на отрезках $[2\pi n, \pi + 2\pi n]$ ($[-\pi + 2\pi n, 2\pi n]$) при любом целом значении n, то есть на тех отрезках, где она принимает неотрицательные (неположительные) значения.

Доказательство. В силу периодичности функции $\sin x$ с периодами $2\pi n$ $\forall n \in Z$, $n \neq 0$ и утверждения 3 достаточно рассмотреть лишь случай $n = 0$. Фиксируем произвольные действительные x_1 и $x_2 \in [0, \pi]$, $x_1 \neq x_2$.

Сравним разность выражений

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad \text{с числом} \quad 0.$$

Применяя формулу суммы синусов, мы получим:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=\sin\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2}=$$

$$=\sin\frac{x_1+x_2}{2}-\sin\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2}=\sin\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\left(1-\cos\frac{x_1-x_2}{2}\right)>0\,.$$

Последнее неравенство вытекает из свойств числовых неравенств, промежутков знакопостоянства функции синус и области изменения функции косинус следующим образом:

$$0\leqslant x_1\leqslant\pi\,, \tag{3}$$

$$0\leqslant x_2\leqslant\pi\,, \tag{4}$$

$$\Updownarrow$$

$$-\pi\leqslant -x_2\leqslant 0\,, \tag{5}$$

так как x_1 и x_2 из отрезка $[0,\pi]$ различны, то они не могут одновременно равняться нулю и одновременно равняться π, а потому, складывая почленно неравенства (3) и (4); (3) и (5) и почленно деля получающиеся при этом неравенства на 2, мы получим

$$0<\frac{x_1+x_2}{2}<\pi\,, \tag{6}$$

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{x_1-x_2}{2}<0\,, \tag{7}$$

или

$$0<\frac{x_1-x_2}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}\,, \tag{8}$$

откуда и имеем:

$$\sin\frac{x_1+x_2}{2}>0\quad\text{и}\quad 1-\cos\frac{x_1-x_2}{2}>0\,.$$

Итак, строгая выпуклость вверх функции $\sin x$ на отрезке $[0,\pi]$ доказана. В силу нечетности функции $\sin x$ и утверждения 2 вытекает ее строгая выпуклость вниз на отрезке $[-\pi,0]$, что и требовалось доказать.

2.4.8. Выпуклость тригонометрической функции $f(x)=\cos x$

Функция $\cos x$ строго выпукла вверх (вниз) на отрезках $[-\pi/2+2\pi n,\pi/2+2\pi n]$ ($[\pi/2+2\pi n,3\pi/2+2\pi n]$) при любом целом значении n, то есть на тех отрезках, где она принимает неотрицательные (неположительные) значения.

Это утверждение уже вытекает из установленных промежутков строгой выпуклости функции $\sin x$ и формулы $\cos x=\sin(\pi/2+x)$.

Можно, однако, исследовать на выпуклость функцию $\cos x$, не опираясь на выпуклость функции $\sin x$, по аналогичной, что и $\sin x$, схеме. Учащимся это предоставляется сделать самостоятельно.

2.4.9. Выпуклость тригонометрической функции $f(x) = \mathrm{tg}x$

Функция $\mathrm{tg}x$ строго выпукла вниз (вверх) на полуотрезках $[\pi n, \pi/2+\pi n)$ $((-\pi/2 + \pi n, \pi n])$ при любом целом значении n, то есть на тех отрезках, где она принимает неотрицательные (неположительные) значения.

Доказательство. В силу периодичности функции $\mathrm{tg}x$ с периодами πn $\forall n \in Z,\ n \neq 0$ и утверждения 3 достаточно рассмотреть лишь случай $n = 0$. Фиксируем произвольные действительные x_1 и $x_2 \in [0, \pi/2)$, $x_1 \neq x_2$. Сравним разность выражений

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad \text{с числом} \quad 0\ .$$

Применяя формулы суммы тангенсов и тангенса половинного аргумента (см. Вопросы 3 и 4 раздела "Тригонометрия", формулы (7) и (12)), а затем и формулу косинуса суммы и разности двух аргументов, мы получим:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \mathrm{tg}\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{\mathrm{tg}x_1 + \mathrm{tg}x_2}{2} =$$

$$= \frac{\sin(x_1 + x_2)}{1 + \cos(x_1 + x_2)} - \frac{\sin(x_1 + x_2)}{2\cos x_1 \cos x_2} =$$

$$= \sin(x_1 + x_2) \cdot \left(\frac{1}{1 + \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2} - \frac{1}{2\cos x_1 \cos x_2}\right) =$$

$$= \frac{(\sin(x_1 + x_2))(\cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2 - 1)}{2(1 + \cos(x_1 + x_2))\cos x_1 \cos x_2} =$$

$$= \frac{(\sin(x_1 + x_2))(\cos(x_1 - x_2) - 1)}{2(1 + \cos(x_1 + x_2))\cos x_1 \cos x_2} < 0\ .$$

Последнее неравенство вытекает из свойств числовых неравенств, промежутков знакопостоянства функций синус и косинус области изменения функции косинус следующим образом:

$$0 \leqslant x_1 < \frac{\pi}{2}\ , \tag{9}$$

$$0 \leqslant x_2 < \frac{\pi}{2}\ , \tag{10}$$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{\pi}{2} < -x_2 \leqslant 0\ , \tag{11}$$

так как x_1 и x_2 из полуотрезка $[0, \pi/2)$ различны, то они не могут одновременно равняться нулю, а потому, складывая почленно неравенства (9) и (10); (9) и (11), мы получим:

$$0 < x_1 + x_2 < \pi\ , \tag{12}$$

$$-\frac{\pi}{2} < x_1 - x_2 < 0\,, \tag{13}$$

или

$$0 < x_1 - x_2 < \frac{\pi}{2}\,, \tag{14}$$

откуда и имеем:

$\cos x_1 > 0$; $\cos x_2 > 0$; $\cos(x_1 - x_2) < 1$; $\sin(x_1 + x_2) > 0$ и $1 + \cos(x_1 + x_2) > 0$.

Итак, строгая выпуклость вниз функции $\mathrm{tg}x$ на полуинтервале $[0, \pi/2)$ доказана. В силу нечетности функции $\mathrm{tg}x$ и утверждения 2 вытекает ее строгая выпуклость вверх на полуинтервале $(-\pi/2, 0]$, что и требовалось доказать.

2.4.10. Выпуклость тригонометрической функции $f(x) = \mathrm{ctg}x$

Функция $\mathrm{ctg}x$ строго выпукла вниз (вверх) на полуотрезках $(\pi n, \pi/2 + \pi n]$ $([\pi/2 + \pi n, \pi + \pi n))$ при любом целом значении n, то есть на тех полуотрезках, где она принимает неотрицательные (неположительные) значения.

Это утверждение уже вытекает из установленных промежутков строгой выпуклости функции $\mathrm{tg}x$, формулы $\mathrm{ctg}x = -\mathrm{tg}(\pi/2 + x)$ и утверждения 4.

Можно, однако, исследовать на выпуклость функцию $\mathrm{ctg}x$, не опираясь на выпуклость функции $\mathrm{tg}x$, по аналогичной, что и $\mathrm{tg}x$ схеме. Учащимся это предоставляется сделать самостоятельно.

Замечание. В курсах математического анализа направления выпуклости функции на том или ином промежутке ее области определения определяются с помощью знака второй производной этой функции (если, конечно, она существует).

3. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ, ПРЕДЛАГАВШИХСЯ НА УСТНОМ ЭКЗАМЕНЕ ПО МАТЕМАТИКЕ В ПРЕДЫДУЩИЕ ГОДЫ

3.1. Задачи с решениями

1. (ф-т ВМиК) Имеет ли смысл выражение

$$\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-\log_3 5\right) \ ?$$

Решение

$$\sqrt{2} \vee \log_3 5 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2} \vee \frac{1}{\sqrt{2}}\log_3 5^{\sqrt{2}} \ ;$$

$$\sqrt{2} > 1{,}4 = \frac{7}{5} \ \Leftrightarrow \ \log_3 5^{\sqrt{2}} > \log_3 5^{\frac{7}{5}} \ ; \ 5^{\frac{7}{5}} \vee 9 \ \Leftrightarrow \ 5^7 \vee 9^5 \ ;$$

$$5^7 = 78125 > 59049 = 9^5 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \log_3 5^{\frac{7}{5}} > \log_3 9 = 2 \ \Rightarrow \ \frac{1}{\sqrt{2}}\log_3 5^{\sqrt{2}} > \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \sqrt{2} - \log_3 5 < 0 \, .$$

Ответ: выражение смысла не имеет .

---

2. (ф-т ВМиК) Получить десятичное приближение числа a с точностью 0,05, где

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\left(\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5}\right) .$$

Решение

$$\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = 2\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} =$$

$$= \frac{2\sin(\pi/5)\cdot\cos(\pi/5)\cdot\cos(2\pi/5)}{\sin(\pi/5)} = \frac{2\sin(2\pi/5)\cdot\cos(2\pi/5)}{2\sin(\pi/5)} =$$

$$= \frac{\sin(4\pi/5)}{2\sin(\pi/5)} = \frac{\sin(\pi-\pi/5)}{2\sin(\pi/5)} = \frac{\sin(\pi/5)}{2\sin(\pi/5)} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{2(\sqrt{2}-1)} = \frac{(\sqrt{2}+1)}{2(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{(\sqrt{2}+1)}{2(2-1)} = \frac{(\sqrt{2}+1)}{2}$$

$$a_1 = 1,2 = \frac{1,4+1}{2} < \frac{(\sqrt{2}+1)}{2} < \frac{1,5+1}{2} = 1,25 = a_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 1,2 < a < 1,25 \,.$$

Так как $\forall \widetilde{a} \;:\; \widetilde{a} \in [1,2\;,\; 1,25]$

$$|a - \widetilde{a}| \leqslant max\{|a_1 - \widetilde{a}| \;;\; |a_2 - \widetilde{a}|\} \leqslant 1,25 - 1,2 = 0,05 \,,$$

то в качестве приближенного значения a можно, например, взять $\widetilde{a} = 1,213$ или $\widetilde{a} = 1,207$ и т. п.

Ответ: $a \approx \widetilde{a} \;\; \forall \widetilde{a} \in [1,2\;,\; 1,25]$.

---

3. (ф-т ВМиК) Расположить в порядке возрастания числа:

$$\sqrt{\frac{2}{7}} \quad ; \quad \sin\frac{\pi}{7} \quad ; \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{5} \,.$$

Решение

Функции $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ возрастают на интервале $\left(0\;,\; \frac{\pi}{2}\right)$, следовательно,

из $0 < \frac{\pi}{7} < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ вытекает

$$\sin\frac{\pi}{7} < \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \;;$$

$$\frac{1}{2} \vee \sqrt{\frac{2}{7}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \vee \frac{2}{7} \Leftrightarrow 7 \cdot 1 \vee 2 \cdot 4 \;;\; 7 < 8 \Rightarrow \frac{1}{2} < \sqrt{\frac{2}{7}} \;;$$

$$\sqrt{\frac{2}{7}} \vee \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{2}{7} \vee \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2 \cdot 3 \vee 7 \cdot 1 \;;\; 6 < 7 \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{7}} < \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2}{7}} < \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{5} \,.$$

Ответ: $\sin\frac{\pi}{7} < \sqrt{\frac{2}{7}} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$.

---

4. (ф-т ВМиК) Указать хотя бы одно рациональное число a такое, что $|\sin 81^\circ - a| < 0,01$.

Решение

$$\sin 81^\circ = \sqrt{1-\cos^2 81^\circ} = \sqrt{1-\sin^2 9^\circ} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{20}} >$$

$$> \sqrt{1-\left(\frac{\pi}{20}\right)^2} > \sqrt{1-(0,16)^2} = \sqrt{0,9744} > \sqrt{0,9604} = 0,98$$

(так как из $0 < \frac{\pi}{20} < \frac{\pi}{2}$ вытекает $0 < \sin\frac{\pi}{20} < \frac{\pi}{20} < \frac{3,2}{20} = 0,16$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\ 0 < \sin^2\frac{\pi}{20} < \left(\frac{\pi}{20}\right)^2\ ,\ \Rightarrow\ -\sin^2\frac{\pi}{20} > -\left(\frac{\pi}{20}\right)^2\ ,$$

а поэтому $0,98 < \sin 81^\circ < 1$. Если в качестве a взять $a = 0,99$, то будем иметь:

$$0,98-a < \sin 81^\circ - a < 1-a \Leftrightarrow -0,01 < \sin 81^\circ - a < 0,01 \Leftrightarrow |\sin 81^\circ - a| < 0,01 .$$

Ответ: $a = 0,99$ (например).

---

5. (ф-т ВМиК) При всех значениях $\alpha \neq (\pi k)/2$, $k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots$ доказать выполнимость неравенства

$$3(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha) - 8(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha) + 10 \geqslant 0 .$$

Доказательство

Введем переменную $t = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$, тогда либо $t \leqslant -2$ (при $t < 0$) , либо $t \geqslant 2$ (при $t > 0$);

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - 2 = t^2 - 2$$

и неравенство принимает вид $3t^2 - 8t + 4 \geqslant 0$. Его решения: $t \leqslant 2/3$; $t \geqslant 2$, следовательно, при любом t : $t \leqslant -2$ или $t \geqslant 2$ неравенство выполняется, что и требовалось доказать.

---

6. (ф-т ВМиК) Определить, в какой четверти координатной плоскости находится точка пересечения графиков функций

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \quad \text{и} \quad y = \log_2 3^x - \log_5 8 \ .$$

Решение

Координаты точки пересечения $(x_0; y_0)$ определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} y = k_1 x + b_1 , \\ y = k_2 x + b_2 \end{cases} \Rightarrow x = x_0 = \frac{b_1 - b_2}{k_2 - k_1} , \; y = y_0 = \frac{k_2 b_1 - k_1 b_2}{k_2 - k_1}$$

$$k_1 = \frac{3}{2} , \; k_2 = \log_2 3 > \log_2 \sqrt{8} = \frac{3}{2} = k_1 \; \Rightarrow \; k_2 > k_1 > 0 \; \Rightarrow k_2 - k_1 > 0 ;$$

$$b_1 = -\frac{3}{2} , \; b_2 = -\log_5 8 = -\log_5 \sqrt{64} > -\log_5 \sqrt{125} = -\frac{3}{2} = b_1 , \; \Rightarrow$$

$$b_1 < b_2 < 0 , \; \Leftrightarrow \; -b_1 > -b_2 > 0 , \; \Rightarrow \; k_2(-b_1) > k_1(-b_2) \; \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; k_2 b_1 - k_1 b_2 < 0 ; \; b_1 - b_2 < 0 \; \Rightarrow x_0 < 0 , \; y_0 < 0 .$$

Ответ: в III четверти .

---

7. (ф-т ВМиК) В трапеции $ABCD$ точка M принадлежит боковой стороне CD , $\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{MD}$, K — точка пересечения диагонали AC и отрезка BM , $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KC}$. Найти такие числа α и β , чтобы имело место векторное равенство $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{AD}$.

Решение

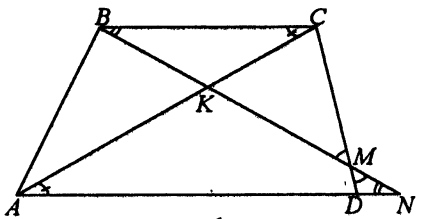


рис. 1

$\angle BNA = \angle NBC$, $\angle BCA = \angle NAC$ (как внутренние накрест лежащие при $AN \parallel BC$ и секущих BN , AC) $\Rightarrow \triangle BKC \sim \triangle AKN$ (по двум углам)

$$\Rightarrow \frac{|AD| + |DN|}{|BC|} = \frac{|AK|}{|KC|} \; \Leftrightarrow \; \frac{|DN|}{|BC|} = \frac{|AK|}{|KC|} - \frac{|AD|}{|BC|} \qquad (1)$$

$\angle BMC = \angle NMD$ (как вертикальные) $\Rightarrow \triangle MBC \sim \triangle NMD$ (по двум углам)

$$\Rightarrow \frac{|DN|}{|BC|} = \frac{|DM|}{|MC|} . \qquad (2)$$

Из (1) и (2) вытекает:

$$\frac{|AK|}{|KC|} = \frac{|AD|}{|BC|} + \frac{|DM|}{|MC|} . \qquad (3)$$

В силу $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KC}$ следует, $|AK|/|KC| = 3$, $\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{MD}$, следовательно, с учетом также равенства (3) получаем

$$\frac{|DM|}{|MC|} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{|DA|}{|BC|} = \frac{|AK|}{|KC|} - \frac{|DM|}{|MC|} = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \Rightarrow \qquad (4)$$

$$\Rightarrow |BC| = \frac{3}{8}|AD| \Rightarrow \frac{3}{8}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \frac{3}{8}\overrightarrow{AD} .$$

Ответ: $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{3}{8}$.

---

8. (ф-т ВМиК) В треугольной пирамиде $ABCD$ медианы граней ABC, BDC, ADC пересекаются соответственно в точках G, E, F. Площадь треугольника EFG равна 2. Найти объем пирамиды, если длина ее высоты, опущенной из вершины C, равна 1.

Решение

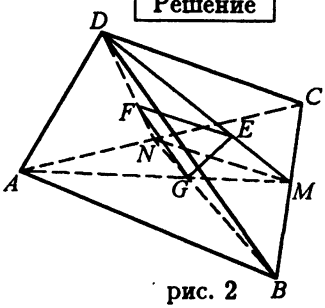


рис. 2

Пусть AM и DM — соответственно медианы треугольников ABC и BDC. Так как E и G — точки пересечения медиан $\triangle BDC$ и $\triangle ABC$ соответственно, то по свойству медиан треугольника получаем: $|ME| : |MD| = |MG| : |MA| = 1 : 3$, а так как у треугольников MGE и MAD $\angle AMD$ — общий, то $\triangle MGE \sim \triangle MAD$, откуда уже из определения подобных треугольников вытекает:

$$\angle MGE = \angle MDA \Rightarrow GE \parallel AD \text{ и } |GE| = \frac{1}{3}|AD| ; \qquad (1)$$

$$\text{аналогично } GF \parallel BD \text{ и } |GF| = \frac{1}{3}|BD| . \qquad (2)$$

Пусть BN и DN — соответственно медианы треугольников ABC и ADC. Так как F и E — соответственно точки пересечения медиан треугольников ADC и DBC, то по свойству медиан треугольника:

$$|DF| : |DN| = |DE| : |DM| = 2 : 3 . \tag{3}$$

У треугольников FDE и MDN $\angle NDM$ — общий, следовательно, они подобны, откуда

$$|FE| : |MN| = 2 : 3 , \tag{4}$$

а так как NM — средняя линия $\triangle ABC$, то

$$|MN| : |AB| = 1 : 2 . \tag{5}$$

Из (4) и (5), а также (1) и (2) следует

$$|GE| : |AD| = |GF| : |BD| = |FE| : |AB| = 1 : 3 , \tag{6}$$

а потому $\triangle GFE \sim \triangle DBA$ с коэффициентом подобия $k = 1 : 3$, следовательно,

$$S_{\triangle EGF} = \frac{1}{9} S_{\triangle ABD} . \tag{7}$$

Обозначим через h длину высоты, опущенной из вершины пирамиды C на грань (ADB), по условию $h = 1$, следовательно, с учетом (7) имеем:

$$V = V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} h S_{\triangle ADB} = 3 h S_{\triangle EGF} = 3 \cdot 1 \cdot 2 = 6 .$$

Ответ: $V = 6$.

---

9. (ф-т ВМиК) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ с диагоналями AC и BD на стороны CD и AB опущены соответственно высоты AE и DF. Известно, что $|AE| \geqslant |BD|$, $|DF| \geqslant |AC|$, $|AD| = 2|AB|$. Найти меры углов четырехугольника $ABCD$.

Решение

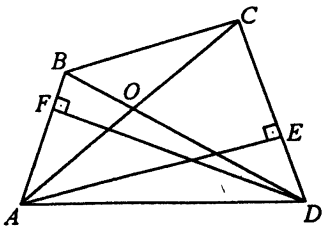


рис. 3 а)

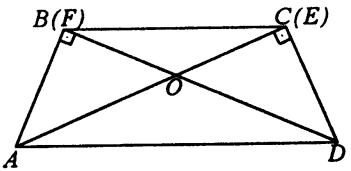


рис. 3 б)

Так как перпендикуляр короче всякой наклонной, то

$$|AC| \geqslant |AE| \; ; \; |BD| \geqslant |DF| \; . \tag{1}$$

По условию $|AE| \geqslant |BD| \; ; \; |FD| \geqslant |AC| \;\; \Rightarrow$

$$\Rightarrow \; |AC| \geqslant |AE| \geqslant |BD| \geqslant |DF| \geqslant |AC| \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; |AC| = |AE| = |BD| = |DF| = |AC| \; ,$$

стало быть, совпадают точки C и E, а также — точки B и F. Следовательно,

$$|AC| = |BD| \tag{2}$$

Так как у треугольников ABD и ACD AD — общая сторона, $|BD| = |AC|$ и они прямоугольные, то по катету и гипотенузе

$$\triangle ABD = \triangle ACD \; \Rightarrow \; |AB| = |CD| \; ; \tag{3}$$

$$\angle CAD = \angle BDA \; ; \; \angle BAD = \angle CDA \; \Rightarrow \tag{4}$$

$$\Rightarrow \; \angle BAO = \angle CDO \; .$$

Так как треугольники ABO и CDO — прямоугольные и $|AB| = |CD|$, то по катету и острому углу эти треугольники равны. Следовательно,

$$|AO| = |OD| \; , \; |BO| = |OC| \; . \tag{5}$$

У треугольников AOD и BOC $\angle AOD = \angle BOC$ как вертикальные, из (5) вытекает:

$$\frac{|BO|}{|OD|} = \frac{|CO|}{|OA|} \; \Rightarrow \; \triangle AOD \sim \triangle BOC \; \Rightarrow \; \angle BDA = \angle DBC \; \Rightarrow \; BC \parallel AD \; .$$

Следовательно, $ABCD$ — равнобедренная трапеция. По условию, $|AD| = 2|AB|$, а так как $AB \perp BD$, то

$$\cos \widehat{BAD} = \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{1}{2} \; \Rightarrow \; \widehat{BAD} = \widehat{ADC} = 60^\circ \; \Rightarrow \; \widehat{ABC} = \widehat{DCB} = 120^\circ \; .$$

Ответ: $\widehat{A} = \widehat{D} = 60^\circ, \;\; \widehat{B} = \widehat{C} = 120^\circ \; .$

---

10. (геолог. ф-т) В трапеции $ABCE$ $AB \parallel CE$, $|AB| = 6$, $|CE| = 4$. Прямая, параллельная основаниям и проходящая через точку пересечения диагоналей, пересекает боковые стороны трапеции в точках M и K соответственно. Найти длину отрезка MK.

Решение

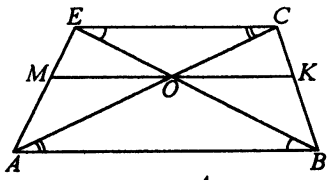


рис. 4

Пусть $|AB| = a$, $|CE| = b$ $(a = 6,\ b = 4)$. Так как $MO \parallel AB$, то $\triangle MEO \sim \triangle AEB \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{|MO|}{|AB|} = \frac{|EO|}{|EB|} = \frac{|EO|}{|EO| + |OB|} = \frac{1}{1 + |OB|/|OE|} . \qquad (1)$$

Так как $CE \parallel AB$, то $\angle OBA = \angle OEC$, $\angle ECO = \angle OAB$ (как внутренние накрест лежащие при параллельных AB и EC). Следовательно (по двум углам), $\triangle EOC \sim \triangle BOA$, откуда

$$\frac{|OB|}{|OE|} = \frac{|AB|}{|EC|} = \frac{a}{b} = \frac{|OA|}{|OC|} . \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем:

$$|MO| = \frac{|AB|}{1 + a/b} = \frac{a}{1 + a/b} = \frac{ab}{a + b} . \qquad (3)$$

Аналогично доказываются равенства:

$$|OK| = \frac{|AB|}{1 + |OA|/|OC|} = \frac{a}{1 + a/b} = \frac{ab}{a + b} = |MO| . \qquad (4)$$

Следовательно,

$$|MK| = |OK| + |MO| = \frac{2ab}{a + b} , \qquad (5)$$

при $a = 6$, $b = 4$ имеем $|MK| = \dfrac{2 \cdot 6 \cdot 4}{6 + 4} = \dfrac{48}{10} = 4,8$.

Ответ: $|MK| = 4,8$.

---

11. (геолог. ф-т) Периметр ромба равен 20, а сумма длин его диагоналей равна 14. Найти площадь ромба.

Решение

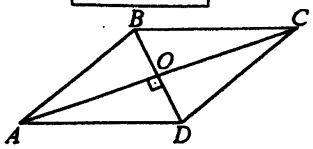


рис. 5

Так как $ABCD$ — ромб, то $AC \perp BD$ и

$$\frac{1}{2}|AC| = |AO| = |OC|, \quad \frac{1}{2}|BD| = |BO| = |OD| ; \tag{1}$$

$$|AD| = |AB| = |BC| = |CD| = \frac{1}{4} \cdot 20 = 5 ; \tag{2}$$

$$|BO| + |OA| = \frac{1}{2}(|BD| + |AC|) = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7 . \tag{3}$$

Пусть $|BO| = x$, $|AO| = y$, по теореме Пифагора, а также на основе (3) имеем:

$$\begin{cases} x + y = 7 , \\ x^2 + y^2 = 25 . \end{cases} \qquad S_{\#} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot |BO||AO| = 2xy$$

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 49 - 2xy = 25 \;\Rightarrow\; 2xy = S_{\#} = 24 .$$

Ответ: 24 .

---

12. (геолог. ф-т) В равнобедренном треугольнике с величиной угла при вершине 120° длина боковой стороны равна 2. Найти радиус вписанной в него окружности.

Решение

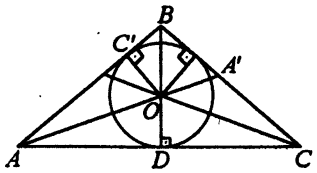


рис. 6

Воспользуемся формулой $S_{\triangle} = pr$, где p — полупериметр треугольника, а r — радиус вписанной в него окружности. Пусть $BD \perp AC$, следовательно, в силу свойств равнобедренного треугольника $\widehat{ABD} = \widehat{DBC} = 60°$ и $|AD| = |DC|$, поэтому

$$|BD| = |AB| \cos 60° = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 ; \tag{1}$$

$$|AD| = \sqrt{|AB|^2 - |BD|^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3} = |DC|, \Rightarrow |AC| = 2\sqrt{3}\,; \quad (2)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD| = |AD|\cdot|BD| = \sqrt{3}\cdot 1 = \sqrt{3}\,; \quad (3)$$

$$p = \frac{|AB|+|BC|+|AC|}{2} = \frac{2+2+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}\,; \quad (4)$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{4-3} = 2\sqrt{3}-3\,. \quad (5)$$

Ответ: $r = 2\sqrt{3}-3$.

---

13. (геолог. ф-т) **Построить графики функций:**

а) $y = |x+1||x-3|$; б) $y = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$; в) $y = 1 - \dfrac{1}{|x|}$;

г) $y = \dfrac{x^3+5x^2+6x}{|x|-x}$; д) $y = \log_{1-x} x \cdot \lg(1-x)$;

е) $y = |\sin x|\cdot \operatorname{ctg} x$.

Решения

а) $y = \begin{cases} x^2-2x-3 = (x+1)(x-3) \text{ при } x \leqslant -1 \text{ или } x \geqslant 3\,; \\ -(x^2-2x-3) = -(x+1)(x-3) \text{ при } -1 \leqslant x \leqslant 3\,, \end{cases}$

график функции имеет вид:

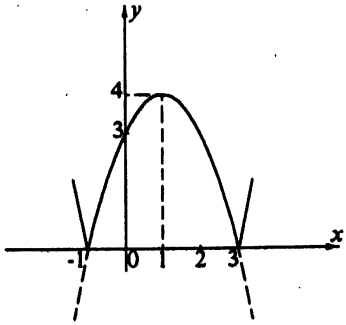


рис. 7

б) $y = \dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x}} = \dfrac{\sin x}{|\cos x|} = \begin{cases} \operatorname{tg} x \text{ при } \cos x > 0 ; \\ -\operatorname{tg} x \text{ при } \cos x < 0 , \end{cases}$

график функции имеет вид:

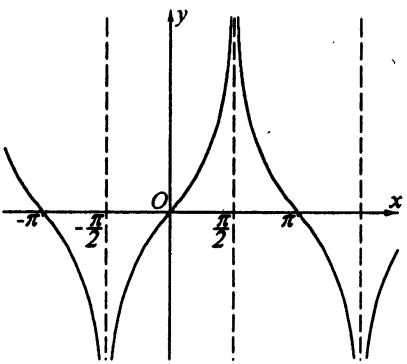


рис. 8

в) функция является четной, поэтому ее график симметричен относительно оси ординат. На правой полуплоскости он строится на основе правил преобразований графиков функций, исходя из графика функции

$$y = \frac{1}{x} ,$$

следующим образом: путем его симметричного отражения относительно оси абсцисс, а затем — сдвига на единицу вверх вдоль оси ординат; к полученному таким образом графику надо еще добавить его симметричное отражение относительно оси ординат,

окончательный график функции имеет вид

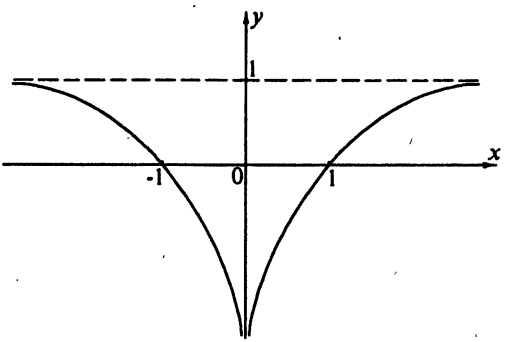


рис. 9

г) так как $\forall x \in R:\ x \geqslant 0 \Rightarrow |x| - x = 0$ и $\forall x \in R:\ x < 0 \Rightarrow |x| - x = -2x$, то функция $y(x)$ определена только на $(-\infty\ ,\ 0)$ и потому имеет вид:

$$y = \left[\begin{array}{l} -(x^2 + 5x + 6) = -(x+3)(x+2) \text{ при } x < 0\ ; \\ \text{не определена при } x \geqslant 0\ , \end{array} \right.$$

поэтому график функции имеет вид:

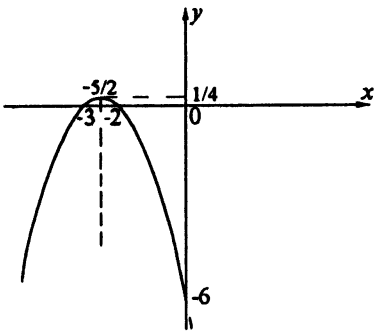


рис. 10

д) функция определена только при $0 < x < 1$, при указанных значениях x $y = \dfrac{\lg x}{\lg(1-x)} \cdot \lg(1-x) = \lg x$, поэтому функция $y(x)$ имеет вид:

$$y = \left[\begin{array}{l} \lg x \text{ при } 0 < x < 1\ ; \\ \text{не определена при } x \leqslant 0 \text{ и при } x \geqslant 1\ , \end{array} \right.$$

график функции имеет вид:

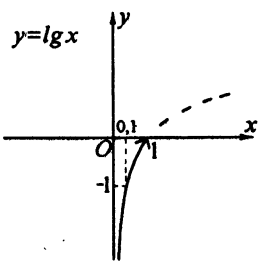


рис. 11

е) раскрывая $|\sin x|$ и используя определение функции ctg x , приведем функцию $y(x)$ к виду:

$$y = \begin{cases} \cos x \text{ при } \sin x > 0 \Leftrightarrow 2\pi n < x < (2n+1)\pi ; \\ \text{не определена при } \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n ; \\ -\cos x \text{ при } \sin x < 0 \Leftrightarrow (2n-1)\pi n < x < 2\pi n . \end{cases}$$

$$n = 0 ; \pm 1 ; \pm 2 ; \ldots ,$$

отметим также, что в силу периодичности с периодом π функций $y = |\sin x|$ и $y = \text{ctg } x$, данная функция также является периодической с периодом π , таким образом,

график функции имеет вид:

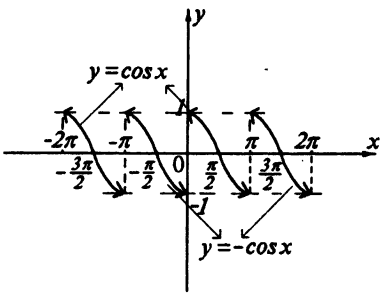


рис. 12

---

14. (геолог. ф-т) Сравнить числа 3^{400} и 4^{300} .

Решение

$$3^{400} = (3^4)^{100} = 81^{100} ; \; 4^{300} = (4^3)^{100} ;$$

$$81 > 64 \Leftrightarrow 81^{100} > 64^{100} , \; 3^{400} > 4^{300} .$$

Ответ: $3^{400} > 4^{300}$.

---

15. (геолог. ф-т) Решить уравнение

$$\frac{x-4}{\sqrt{x}+2} = x-8 .$$

Решение

ОДЗ $x \geqslant 0$. Отметим, что $\forall x \geqslant 0 \Rightarrow \sqrt{x}+2 \geqslant 2$.

$$x-4 = (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2) ,$$

следовательно, исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt{x}-2 = x-8 \;\Leftrightarrow\; x-\sqrt{x}-6 = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2) = 0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x}-3 = 0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x} = 3 \;\Leftrightarrow\; x = 9 .$$

Ответ: $x = 9$.

16. (геолог. ф-т) Решить уравнение

$$2\sin^2 x - \cos^2 x - 1 = 0 .$$

Решение

В силу основного тригонометрического тождества $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, а потому исходное уравнение равносильно уравнению

$$2\sin^2 x - 1 + \sin^2 x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; 3\sin^2 x = 2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \sin^2 x = \frac{2}{3} \;\Leftrightarrow\; |\sin x| = \sqrt{\frac{2}{3}} \;\Leftrightarrow\; \sin x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} .$$

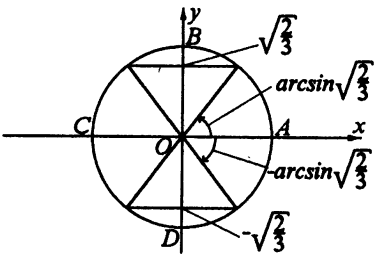


рис. 13

Ответ: $x = \pm \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} + \pi n$, $n = 0 ; \pm 1 ; \pm 2 ; \ldots$.

17. (геолог. ф-т) Решить уравнение

$$\lg(\arcsin x) = 0 .$$

Решение

В силу определения десятичного логарифма $\arcsin x = 10^0 = 1$, а так как при всех x таких, что $-1 \leqslant x \leqslant 1$ $\sin(\arcsin x) = x$, то получаем, что решение уравнения есть $x = \sin 1$.

Ответ: $x = \sin 1$.

---

18. (геолог ф-т) На координатной плоскости указать множество точек $\{M(x;y)\}$, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 , \\ 1 - x \leqslant y \leqslant \sqrt{1 - x^2} . \end{cases}$$

Решение

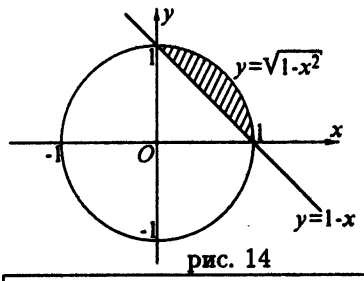


рис. 14

Ответ: заштрихованная область .

Следующие три задачи на построение на плоскости с помощью циркуля и линейки решаются по обычному плану для таких задач :

1) анализ; 2) построение; 3) доказательство; 4) исследование.

При этом считается известным, как с помощью линейки провести прямую, луч, отрезок через две различные точки, как с помощью циркуля отложить от данной точки на данной прямой отрезок заданной длины и провести окружность с данным центром данного радиуса; как с помощью циркуля и линейки: построить серединный перпендикуляр к отрезку; построить биссектрису угла; от данной точки на данной прямой в данную полуплоскость отложить угол заданной величины; через точку, не лежащую на данной прямой, провести параллельную ей прямую; а также как решать и другие приведенные в учебниках стандартные задачи на построение.

19.* (ф-т ВМиК) Построить треугольник по заданным отрезкам медианы, биссектрисы и высоты, проведенных из одной его вершины.

В данной книге приводится более подробное решение этой задачи, чем в других источниках. В частности, будет дан ответ на вопрос о возможных соотношениях длин указанных высоты, биссектрисы и медианы и их взаимном расположении.

Решение

Пусть h_a, l_a, m_a — соответственно длины заданных отрезков высоты, биссектрисы и медианы.

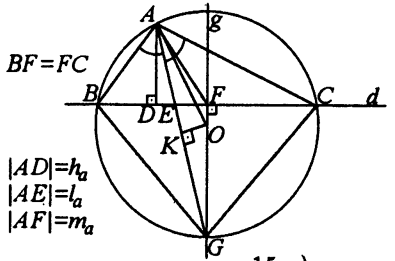


рис. 15 а)

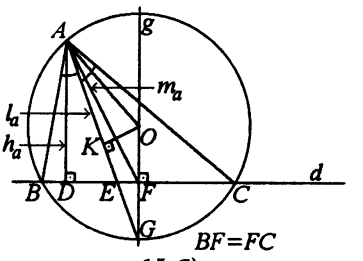


рис. 15 б)

1) *Анализ.* Допустим, что треугольник ABC построен (см. рис. 15 а).

Если провести высоту AD, биссектрису AE и медиану AF, то, описав около него окружность с центром в точке O и продолжая AE до пересечения с окружностью в точке G, получим, что из равенства углов BAE и EAC вытекает равенство дуг BG и GC, откуда следует равенство хорд BG и GC. Из равенства $BF = FC$ и того, что в равнобедренном треугольнике BGC медиана GF является высотой, вытекает: $GF \perp BC$, а потому центр окружности O лежит на прямой GF. Если провести $OK \perp AG$, то так как $OG = OA$ (как радиусы окружности) в силу признака серединного перпендикуляра к отрезку $GK = KA$. Стало быть, центр окружности O является точкой пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам BC и AG.

---

2) *Построение* (см. рис. 15 б). Проводим прямую d. В произвольной ее точке D проводим к ней перпендикулярную прямую и откладываем на ней отрезок DA длины h_a. Так как $h_a > 0$, то точка A не лежит на прямой d. Из точки A откладываем: отрезок AE длины l_a и отрезок AF длины m_a, где точки E и F принадлежат прямой d.

Если h_a, l_a и m_a не равны (а это $\Leftrightarrow AB \neq AC$), то точка E лежит между точками D и F. Это утверждение будет доказано ниже, в

---

* означает, что эта задача повышенной трудности.

части 4) — исследование.

Восставим из точки F перпендикуляр g к прямой d и продолжим AE до пересечения с ним в точке G. Из середины отрезка AG восставим перпендикуляр до его пересечения с g в точке O. В силу свойства серединного перпендикуляра к отрезку $OA = OG$. Проведем окружность с центром в точке O радиуса $r = |OA| = |OG|$, которая, стало быть, пройдёт через точки A и G. Пусть B и C — точки пересечения этой окружности с прямой d. Треугольник ABC — искомый.

---

3) *Доказательство.* Прежде всего докажем существование точек G, O, A и B.

Случай $h_a = l_a = m_a$ рассмотрим в части 4) — исследование.

Отметим, что если $h_a = l_a$, или $h_a = m_a$, или $l_a = m_a$, то $AB = AC$ (то есть $\triangle ABC$ — равнобедренный), а потому $h_a = l_a = m_a$. Это вытекает из того, что (см. ниже рис. 19) :
в случае $h_a = l_a$ у прямоугольных треугольников ADB и ADC общий катет AD и соответственно равные острые углы $\angle BAD = \angle CAD$, а потому они равны по катету и острому углу, откуда $AB = AC$;
в случае $h_a = m_a$ у прямоугольных треугольников ADB и ADC общий катет AD и соответственно равные стороны $BD = CD$, а потому они равны по двум катетам, откуда $AB = AC$;
в случае $l_a = m_a$ по свойству биссектрисы угла треугольника
$|AB| : |AC| = |BD| : |CD| = 1 \Rightarrow AB = AC$.

Итак, пусть $h_a \neq l_a$, $l_a \neq m_a$, $m_a \neq h_a$. Выше отмечалось, что при этом точки D, E и F различны. Следовательно, прямые AD и g различны и, будучи перпендикулярными прямой d, — параллельны. Так как прямые AD и d имеют единственную общую точку D, то прямые AD и AE различны и, стало быть, пересекаются в точке A. А поэтому в силу транзитивности свойства параллельности прямых прямая AE пересечет прямую g в некоторой точке G. Поскольку точки A и G лежат на различных параллельных прямых, то потому они различны.

Предполагая, что серединный перпендикуляр к отрезку AG параллелен прямой g, мы получим, что он будет также параллелен и AD, откуда будет вытекать его перпендикулярность прямой d. Следовательно, так как две прямые, перпендикулярные одной прямой (на плоскости), параллельны, то $AG \parallel d$, что противоречит пересечению прямых AG и d в точке E. Следовательно, указанный серединный перпендикуляр к отрезку AG пересечет прямую g в некоторой точке O. Отметим, что так как середина отрезка AG (основание указанного перпендикуляра) — точка K отлична от каждой из точек A и G, то она не лежит ни

на какой из прямых AD и g, ибо в противном случае в силу аксиомы единственности прямой, проходящей через две различные точки, все три точки A, K, G будут на одной из прямых AD или g, что неверно. Поскольку точка O лежит на прямой g, то поэтому точки K и O — различные.

Так как прямые $AD \perp d$ и $FG \perp d$, то $AD \parallel GF$. Точка E лежит между точками D и F, поэтому точки D и E лежат в одной полуплоскости относительно прямой GF, что и вся параллельная ей прямая AD.

Аналогичным образом точки F и E лежат в одной полуплоскости относительно прямой AD, где и параллельная ей прямая GF.

Следовательно, отрезок AE не пересекает прямую GF и отрезок GE не пересекает прямую AD, а потому точка A не лежит между точками E и G и точка G не лежит между точками A и E. Следовательно, точка E лежит между точками A и G. *

Так как отрезок AG пересекает прямую d в точке E, то, следовательно, точки A и G лежат в различных полуплоскостях относительно прямой d.

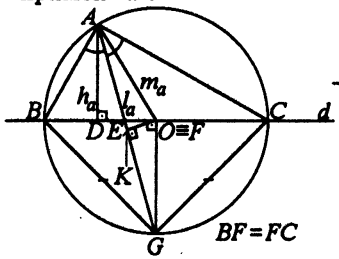


рис. 16 а)

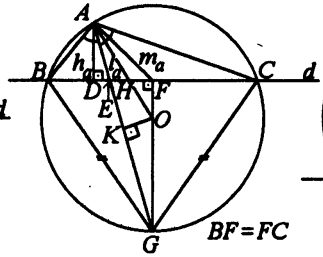


рис. 16 б)

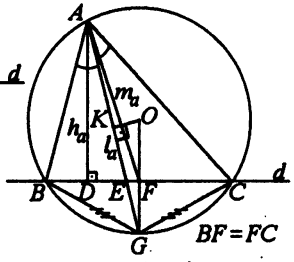


рис. 16 в)

Рассмотрим $\triangle AOG$: прямая d пересекает его сторону AG в точке E. В силу одной из аксиом порядка элементарной геометрии (аксиомы Паша) прямая d обязательно пересечет либо сторону AO, например, в точке H, либо — сторону OG в точке F, либо пройдет через точку O (см. рис. 16).

Если прямая d пересекает отрезок OG в точке F (отрезок OA в точке H), то $\rho(O;d) = |OF| < |OG| = r$ ($\rho(O;d) \leqslant |OH| < |OA| = r$), если точка $O \in d$, то она просто совпадает с точкой F и $\rho(O;d) = 0$.

Следовательно, во всех этих трех случаях $\rho(O;d) < r$ и в силу теоремы о взаимном расположении окружности и прямой построенная окружность пересечет прямую d в двух точках, которые мы обозначим за B и C.

---

* По поводу расположения трех точек на прямой см. п. 2.3.0 раздела "Геометрия" методических материалов ответов на вопросы билетов устного экзамена по математике.

Теперь доказательство того, что $\triangle ABC$ — искомый, уже провести достаточно просто. Так как $OF \perp BC$, то $BF = FC$ и $|AF| = m_a$, следовательно, AF — заданная медиана. Так как у $\triangle BGC$ $BF = FC$ и $GF \perp BC$, то в силу свойства серединного перпендикуляра к отрезку $BG = GC$, откуда вытекает равенство дуг BG и GC, а в свою очередь отсюда вытекает, что $\angle BAE = \angle EAC$, а так как $|AE| = l_a$, то AE — заданная биссектриса угла BAC $\triangle ABC$. По построению $AD \perp BC$ и $|AD| = h_a$, следовательно, AD — заданная высота $\triangle ABC$. Таким образом, полностью доказано, что $\triangle ABC$ — искомый.

Замечание. В приведенном доказательстве использовались также утверждения о том, что точки серединного перпендикуляра к отрезку и только они равноудалены от его концов; радиус (диаметр) окружности, перпендикулярен отличной от диаметра хорде этой окружности тогда и только тогда, когда он проходит через середину этой хорды; дуги окружности равны тогда и только тогда, когда равны стягиваемые их хорды этой окружности, а также — тогда и только тогда, когда равны вписанные в эту окружность углы, на них опирающиеся (последнее утверждение вытекает из теоремы о вписанном в окружность угле). Неявно использовалась и аксиома параллельности прямых на плоскости.

---

4) *Исследование.* Будем использовать утверждения о соотношении длин наклонных, проведенных из одной точки к прямой, и длин отвечающих им проекций на этой прямой: равным наклонным (проекциям) отвечают равные проекции (наклонные), большей (меньшей) наклонной отвечает большая (меньшая) проекция, соответственно большей (меньшей) проекции отвечает большая (меньшая) наклонная; утверждения о том, что против большего (меньшего) внутреннего угла в треугольнике лежит большая (меньшая) сторона, соответственно против большей (меньшей) стороны в треугольнике лежит больший (меньший) угол.

Отметим, что помимо непосредственного исследования возможности построения треугольника и единственности решения задачи будут либо сформулированы, либо доказаны и другие утверждения, имеющие самостоятельный интерес, о чем уже говорилось выше перед началом решения этой задачи.

Рассмотрим два случая: А) $AB \neq AC$;) $AB = AC$.

А) Для определенности предположим, что $AB < AC$, так как случай $AB > AC$ рассматривается совершенно аналогично.

Отметим, что из определений длины отрезка и одного отрезка больше (меньше) другого отрезка, а также свойств соотношений "равенства", "больше", "меньше" между отрезками и свойств длины отрезка вытекает:

$AB < (>) AC \Leftrightarrow |AB| < (>)|AC|$, $AB = AC \Leftrightarrow |AB| = |AC|$.

Пусть AD , AE , AF — соответственно высота, биссектриса и медиана, проведенные из вершины A в $\triangle ABC$.

Так как $AB < AC$, то $\angle ABC > \angle ACB$. (*)

Отметим, что из определений меры угла и одного угла больше (меньше) другого угла, а также свойств соотношений "равенства", "больше", "меньше" между углами и свойств меры угла вытекает:

$\angle ABC < (>) \angle ACB \Leftrightarrow \overset{\frown}{ABC} < (>) \overset{\frown}{ACB}$; $\angle ABC = \angle ACB \Leftrightarrow \overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{ACB}$.

В приводимых ниже рассуждениях будут использованы и другие свойства операций сравнения отрезков и углов и связанные с ними соответствующие свойства их длин и мер, которые в свою очередь основаны на свойствах взаимного расположения трех точек на прямой и трех лучей (полупрямых) с общим началом.

В силу свойства биссектрисы угла BAC треугольника ABC

$$\frac{|BE|}{|EC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$$, и так как $|AB| < |AC|$, то $|BE| < |EC| \Rightarrow$

$$\Rightarrow |BE| = \frac{|BE| + |BE|}{2} < \frac{|BE| + |EC|}{2} = \frac{|BC|}{2} = |BF| ,$$

а потому точка E лежит между точками B и F .

Далее случай $AB < AC$ разбивается еще на три подслучая: А1 ; А2 ; А3 (см. рис. 17 а), б), в) соответственно).

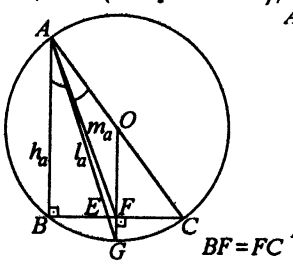


рис. 17 а)

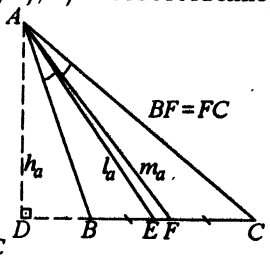


рис. 17 б)

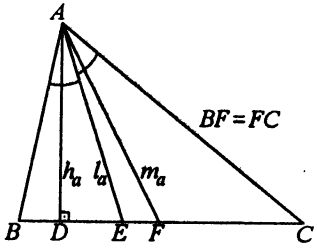


рис. 17 в)

А1) Угол ABC — прямой, тогда точки B и D совпадают, очевидно и обратное этому утверждение.

А2) Угол ABC — тупой, тогда на прямой BC именно точка B лежит между D и C , так как согласно 1 совпадение точек B и D при этом исключается. Если предположить, что точка D лежит между точками B и C, то в прямоугольном треугольнике ABD с прямым углом ADB окажется острым угол ABD , что не соответствует рассматриваемому

случаю. Если предположить, что будут совпадать точка D с точкой C, снова получим, что угол ABC — острый. Если, наконец, предположить, что точка C лежит между точками B и D, то совершенно аналогичным образом мы опять получим, что угол ABC — острый.

А3) Угол ABC — острый, тогда в силу А1 и А2 исключаются возможности расположения точки B между точками D и C, а также — совпадения точек D и B, далее, предполагая совпадение точек D и C, мы получим, что в прямоугольном треугольнике ABC AB — гипотенуза, а потому $|AB| > |AC|$, а если предположить, что точка C лежит между точками B и D, то $|AD| = |AC| + |CD| > |CD|$, а потому соответствующее соотношение между наклонными таково: $|AB| > |AC|$. Следовательно, последние две возможности не соответствуют рассматриваемому случаю $AB < AC$, а потому остается единственная возможность — точка D расположена между точками B и C, при этом угол ACB также будет острым.

Рассмотрим случай А2. Так как точка B лежит между точками D и C, то эти точки расположены на разных полупрямых прямой BC относительно точки B. В то же время так как точки E и F расположены на отрезке BC, то каждая из них лежит между точками B и C, а стало быть, — на той же полупрямой относительно точки B, что и точка C. А так как точка D лежит на другой полупрямой, то точка B лежит между точками D и E и — между точками D и F. Напомним, что выше нами получено расположение точки E между точками B и F. Следовательно,

$$|DF| = |DB| + |BF| = |DB| + |BE| + |EF| > |DB| + |BE| = |DE|,$$

а потому в силу свойств перпендикуляра, который короче всякой наклонной, и наклонных, проведенных из одной точки к прямой, о которых упоминалось выше,

$$|AD| < |AE| < |AF|, \quad \text{что означает} \quad h_a < l_a < m_a.$$

В точности такой же результат сразу получается в подслучае А1.

Отметим еще, что неравенство $|DF| > |DE|$ исключает расположение точки F между точками D и E. Однако, если предположить, что точка D лежит между точками E и F, то это будет означать, что эта точка принадлежит отрезку EF. Но поскольку точки C и B не лежат между точками E и F, то весь отрезок EF, в том числе и точка D будут лежать между точками B и C, что противоречит подслучаям как А2, так и А1. Таким образом, точка E лежит между точками D и F.

Рассмотрим подслучай А3). Так как (см. выше (*))

$$\angle ABC > \angle ACB \Leftrightarrow \overset{\frown}{ABC} > \overset{\frown}{ACB}\ ;\ AD \perp BC\ ,\ \text{откуда}$$

$$\overset{\frown}{BAD} + \overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{CAD} + \overset{\frown}{ACB} = 90^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BAD} < \overset{\frown}{DAC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BAD} = \frac{\overset{\frown}{BAD} + \overset{\frown}{BAD}}{2} < \frac{\overset{\frown}{BAD} + \overset{\frown}{DAC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BAC}}{2} = \overset{\frown}{BAE}\ ,$$

то $\angle BAD < \angle BAE$, следовательно, AD проходит внутри угла $\angle BAE$, а потому AD пересекает отрезок BE в точке D, стало быть, точка D лежит между точками B и E. Следовательно,

$$|BF| = |BE| + |EF| = (|BD| + |DE|) + |EF| = |BD| + (|DE| + |EF|) > |BD|\ .$$

Так как точки D и F лежат между точками B и C, то, стало быть, они принадлежат одной полупрямой на прямой BC относительно точки B. Следовательно, так как $|BF| > |BD|$, то именно точка D лежит между точками B и F. Поэтому

$|BF| = |BD| + |DF| = |BD| + (|DE| + |EF|) \Rightarrow |DF| = |DE| + |EF| > |DE|$, а это и означает, что точка E лежит между точками D и F. Проводя далее в точности такие же рассуждения, что и в случае А2), мы получим, что

$$|AD| < |AE| < |AF|\ ,\ \text{что означает}\ h_a < l_a < m_a\ .$$

Получив также во всех трех подслучаях А1 — А3, что точка E лежит между точками D и F, мы получим: луч AE пересекает отрезок DF с концами на сторонах угла FAD.

Следовательно, в случае А

биссектриса $\triangle BAC$, проведенная из вершины A, проходит между высотой и медианой, проведенными из этой же вершины, то есть во внутренней области образованного ими угла.

Таким образом, в случае А задача имеет решение (возможна) лишь при условиях:

$$h_a < l_a < m_a\ .$$

Если расположение точек A, E, F при построении треугольника жестко фиксировать, то и точки G и O будут определены однозначно, а потому — однозначно будут определены окружность с центром в точке O и вершины C и B $\triangle BAC$, то есть задача будет иметь единственное решение.

В общем случае А) $\triangle BAC$ будет определен однозначно с точностью до симметричного треугольника либо относительно серединного перпендикуляра к отрезку BC, либо — относительно прямой BC, либо — середины BC (см. рис. 18 а), б), в) соответственно).

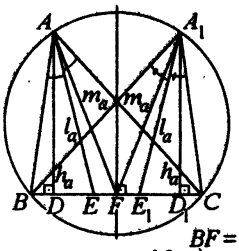


рис. 18 а)

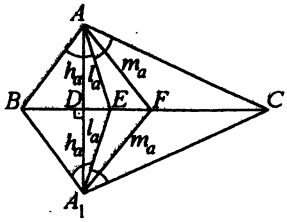


рис. 18 б)

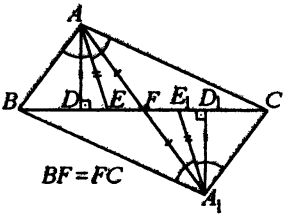


рис. 18 в)

Б) Если $h_a = l_a = m_a$ (это означает, что фактически задан только один элемент треугольника, а для построения треугольника необходимо задать как минимум три элемента), то точки D, E, F, совпадают и любой равнобедренный $\triangle BAC$, у которого $AD \perp BC$, $|AD| = h_a$, $BD = DC$, удовлетворяет условию задачи. Поэтому задача имеет бесчисленное множество решений (на рис. 19 указаны два возможных треугольника).

Отметим, что, например, в задаче на построение равностороннего треугольника по заданной стороне неявно присутствует три элемента (три его стороны, равные между собой).

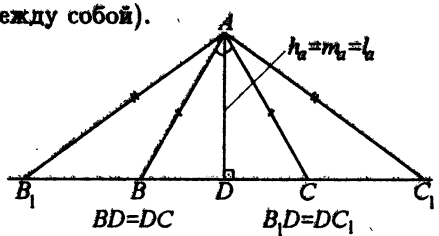


рис. 19

---

20. (ф-т ВМиК) Построить треугольник по заданной стороне, противолежащему ей углу и проведенной к ней высоте.

Решение

Пусть длина стороны треугольника равна a, длина проведенной к ней высоты равна h_a, а величина противолежащего ей угла равна α.

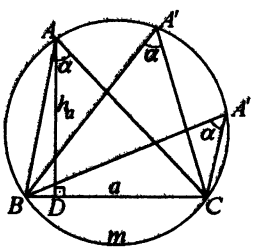


рис. 20 а)

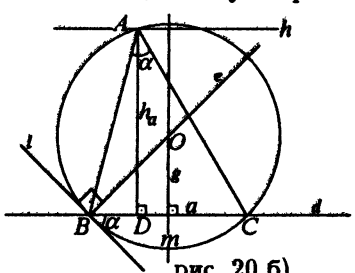


рис. 20 б)

1) *Анализ.* Допустим, что треугольник ABC построен. Тогда, если около него описать окружность, то, выбрав произвольную точку A' на дуге BAC, мы получим, что $\overset{\frown}{BA'C} = \overset{\frown}{BAC} = \alpha$, так как $\angle BAC$ и $\angle BA'C$ — вписанные в эту окружность и опираются на одну дугу BmC.

Поэтому при решении задачи используется как часть задача на построение Г.М.Т. (геометрического места точек), из которых данный отрезок "виден" под заданным углом (см. рис. 20 а).

2) *Построение.* (см. рис. 20 б). На прямой d откладываем отрезок BC длины a. Проведем к нему серединный перпендикуляр g. Под углом заданной величины α из одного из концов отрезка BC, например, B проведем прямую l, а затем из точки B проведем к l перпендикулярную прямую e, пересекающуюся с прямой g в точке O.

Такая точка O существует, так как в противном случае прямые e и g были бы параллельны и, следовательно, было бы $e \perp d$ и также $e \perp l$, откуда следует, что $l \parallel d$, а это уже явно противоречит очевидному пересечению прямых d и l в точке B, так как по смыслу задачи $0 < \alpha < \pi$.

Из центра O проведем окружность радиуса OB. В силу свойства серединного перпендикуляра к отрезку $OB = OC$, поэтому эта окружность пройдет и через точку C.

На расстоянии равном h_a от прямой d проведем прямую h, параллельную прямой d.

Прямую $h \parallel d$ можно, например, провести через точку на серединном к отрезку BC перпендикуляре, находящуюся на расстоянии h_a от этой середины, что осуществляется откладыванием от середины BC на прямой g отрезка длины h_a.

Обозначая через A общую точку прямой h и построенной окружности (если такая существует), соединяя отрезками точку A с B и A с C, мы и получим искомый $\triangle ABC$.

3) *Доказательство.* В силу того, что по построению $OB \perp l$, прямая l будет касательной к построенной окружности, B — точка касания. В силу теорем об измерении вписанных в окружность углов и углов, образованных касательной и хордой $\overset{\frown}{BAC} = \alpha$. По построению $|BC| = a$, а так как $\rho(A; d) = h_a$, то длина опущенной на сторону BC высоты построенного треугольника равна h_a. Следовательно, $\triangle BAC$ — искомый.

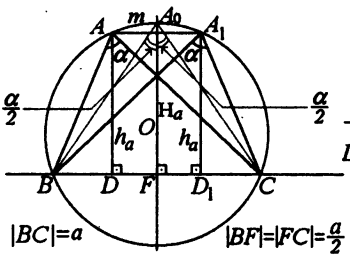


рис. 21 а)

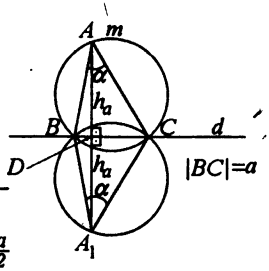


рис. 21 б)

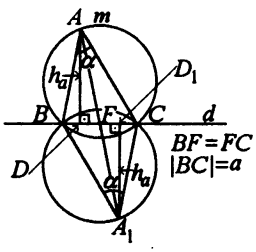


рис. 21 в)

4) *Исследование.* Задача имеет единственное решение (исходя из способа построения треугольника) с точностью до треугольника, симметричного относительно серединного перпендикуляра к отрезку BC, или — относительно прямой d; или — или относительно середины F отрезка BC, (см. рис. 21 а), б) в) соответственно). Построение треугольника с такими данными возможно только при

$$h_a \leqslant \frac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = H_a ,$$

(см. рис. 21 а), H_a — длина высоты кругового сегмента BmC (круговой сегмент — часть круга, ограниченная хордой и стягиваемой ей дугой соответствующей окружности, см. также рис. 21 б) и в).

---

21. (геолог. ф-т) Построить треугольник по двум углам и биссектрисе третьего угла.

Решение

Пусть заданы величины углов α и β и длина биссектрисы третьего угла l_c.

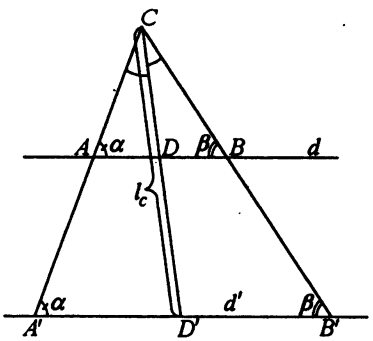


рис. 22 а)

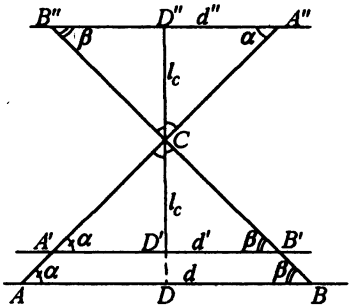


рис. 22 б)

1) *Анализ.* Предположим, что $\triangle ABC$ построен. В любом $\triangle A'B'C \sim \triangle ABC$, где $AB \parallel A'B'$, CD' будет, очевидно, биссектрисой угла $A'CB'$, где CD — биссектриса угла ACB и точка D' лежит на луче CD. Отсюда ясен способ построения искомого треугольника.

2) *Построение.* (см. рис. 22 а) На данной прямой d выбираем две точки A и B и строим от точек A и B в одну и ту же полуплоскость относительно прямой d под углами величин α и β соответственно две прямые. Если $\alpha + \beta < \pi$, то в этой же полуплоскости эти прямые пересекутся в некоторой точке C. Проведем биссектрису угла ACB и отложим на прямой, содержащей эту биссектрису, от точки C отрезок заданной длины l_c — CD'. Если окажется, что точка D' будет на отрезке AB, то $\triangle ABC$ построен. В противном случае через точку D' проводим прямую $d' \parallel d$, которая пересечет (доказать это самостоятельно) прямые CA и CB в точках A' и B' соответственно. $\triangle CA'B'$ — искомый.

3) *Доказательство.* $\angle CA'B' = \angle CAB$ и $\angle CB'A' = \angle CBA$ как соответственные углы при $AB \parallel A'B'$ и секущих AA' и BB'; $|CD'| = l_c$ и по построению $\angle A'CD' = \angle D'CB'$. Следовательно, $\triangle CA'B'$ — искомый.

4) *Исследование.* В силу единственности построенных углов заданных величин в данной полуплоскости, однозначно полученной точки C, единственности биссектрисы угла ACB и единственности откладывания от точки C на данной полупрямой отрезка заданной длины, а затем единственности прямой, параллельной данной и проходящей через данную точку, эта задача имеет единственное решение с точностью до симметричного относительно вершины, из которой проведена биссектриса данной длины, треугольника. Причем, если точка C построена в фиксированной полуплоскости относительно выбранной прямой d (см. выше рис. 22 б).

В силу теоремы о сумме углов треугольника задача имеет решение (возможна) только при условии, если сумма заданных углов меньше развернутого угла или $\alpha + \beta < \pi$.

---

22. (геолог. ф-т) Доказать, что все прямоугольные треугольники, стороны которых образуют арифметическую прогрессию, подобны "египетскому" треугольнику (длины его сторон равны 3 ; 4 ; 5).

Доказательство

Пусть d — разность прогрессии, $x - d$; x — длины катетов, $x + d$ — длина гипотенузы.

Так как $x + d > x$; $x + d > x - d$, то $d > 0$, следовательно, по теореме

Пифагора

$$(x-d)^2+x^2=(x+d)^2 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; 2x^2-2xd=x^2+2xd \;\Leftrightarrow\; x^2=4xd \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; x=4d \;\Leftrightarrow\; x-d=3d\,;\; x+d=5d\,.$$

Так как

$$\frac{3d}{3}=\frac{4d}{4}=\frac{5d}{5}=d\,,$$

то указанный треугольник $\sim$ "египетскому".

---

23. (ф-т ВМиК) Доказать, что сумма кубов трех последовательных целых чисел делится на 9 .

Доказательство

Три последовательных целых числа удобно представить как

$$a-1\,;\; a\,;\; a+1,\ \text{где } a\in Z\,.$$

Тогда

$$(a-1)^3+a^3+(a+1)^3=a^3+(a-1)^3+(a+1)^3=$$
$$=a^3+2a((a-1)^2+(a+1)^2-(a-1)(a+1))=$$
$$=a^3+2a(a^2+3)=a(3a^2+6)=3a(a^2+2)\,.$$

Следовательно, достаточно доказать, что

$$\forall a\in Z\;:\; a(a^2+2)\,\vdots\,3\,.$$

Возможны случаи :

$$1)\ a=3k\,,\ k\in Z\ \Rightarrow\ a(a^2+2)=3k(9k^2+2)\,\vdots\,3\,;$$

$$2)\ a=3k+1\,,\ k\in Z\ \Rightarrow\ a^2+2=(3k+1)^2+2=9k^2+6k+3=3(3k^2+2+1)\,\vdots\,3\,;$$

$$3)\ a=3k+2\,,\ k\in Z\ \Rightarrow\ a^2+2=(3k+2)^2+2=9k^2+12k+6=3(3k^2+4k+2)\,\vdots\,3\,.$$

Следовательно, в любом случае либо $a\,\vdots\,3$, либо $(a^2+2)\,\vdots\,3\ \Rightarrow\ a(a^2+2)\,\vdots\,3$, что и требовалось доказать.

---

24. (ф-т ВМиК) Дан параллелограмм $ABCD$. На стороне BC выбрана точка E так, что $|BE|:|EC|=3:1$, а на стороне AD — точка F так, что $|AF|:|FD|=4:1$. На сколько процентов площадь треугольника ABE больше площади треугольника FCD ? На сколько процентов площадь треугольника FCD меньше площади треугольника ABE ?

Решение

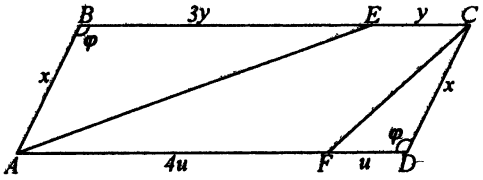


рис. 23

См. рис. 23 Пусть

$$|AB| = |CD| = x\ ,\ |BE| = 3y\ \Rightarrow\ |EC| = y\ ,\ |AF| = 4u\ \Rightarrow\ |FD| = u\ .$$

$$S_{\triangle CDF} = \frac{1}{2}\cdot xu\sin\varphi\ ,\ S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}\cdot 3yx\sin\varphi\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle CDF}} = \frac{3y}{u}\ .$$

Так как $|BC| = |AD|$, то $3y + y = 4u + u\ \Rightarrow\ y = 5u/4$. Следовательно,

$$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle CDF}} = \frac{15}{4}\frac{u}{u} = \frac{15}{4} = 3,75\ .$$

Последнее равенство можно записать в следующем виде:

$$S_{\triangle ABE} = S_{\triangle CDF} + 2,75S_{\triangle CDF}\ .$$

Если $S_{\triangle CDF} = 100\%$, то $(S_{\triangle ABE} - S_{\triangle CDF})100\% = 2,75\cdot 100\% = 275\%$;

$$S_{\triangle CDF} = \frac{S_{\triangle ABE}}{3,75} = S_{\triangle ABE}\cdot\frac{4}{15} = S_{\triangle ABE} - \frac{11}{15}\cdot S_{\triangle ABE}\ ;$$

$$\frac{11}{15}\cdot S_{\triangle ABE} = 73\frac{1}{3}\,\%S_{\triangle ABE}\ .$$

Ответ: больше на 275%, меньше на $73\frac{1}{3}\,\%$.

---

25. (ф-т ВМиК) Найти все целые числа x и y, которые удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} -1 < x - y < 2\ , \\ 2 < 2y + x < 5\ . \end{cases}$$

Решение

$$\begin{cases} -1 < x - y < 2\,, \\ 2 < 2y + x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 2x - 2y < 4\,, \\ 2 < 2y + x < 5\,. \end{cases}$$

Почленно складывая последние неравенства, получим $0 < 3x < 9$, откуда с учетом $x \in Z$ и $y \in Z$ получаем:

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 < 1 - y < 2\,, \\ 2 < 2y + 1 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < y < 2\,, \\ 1 < 2y < 4 \end{cases} \Rightarrow y = 1\,; \\ x = 2 \Rightarrow \begin{cases} -1 < 2 - y < 2\,, \\ 2 < 2y + 2 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < y < 3\,, \\ 0 < 2y < 3 \end{cases} \Rightarrow y = 1\,. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 1\,,\ y = 1\ \ ;\ \ x = 2\,,\ y = 1\,.$

---

26. (ф-т ВМиК) Является ли функция $f(x) = (2+\sqrt{3})^{\frac{1}{x}} - (2-\sqrt{3})^{\frac{1}{x}}$ четной, нечетной или ни той, ни другой ?

Решение

Положим $a = 2 + \sqrt{3}$, тогда так как $(2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$, то $2 - \sqrt{3} = \dfrac{1}{a}$ и потому функция $f(x)$ примет вид:

$$f(x) = a^{\frac{1}{x}} - a^{-\frac{1}{x}}\,.$$

Область определения этой функции — $(-\infty\,,\ 0) \cup (0\,,\ +\infty)$, очевидно, симметрична относительно точки $x_0 = 0$ и также легко видеть, что $\forall x \in R$: $x \neq 0 \ \Rightarrow\ f(-x) = a^{-\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x}} = -f(x)$, откуда и получаем ответ.

Ответ: нечетная функция .

---

27. (ф-т ВМиК) Какое из чисел больше :

$$\sqrt{2\cos 2 + 4\cos 1 + 3} - 2\cos 1 \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}\ ?$$

Решение

$$\sqrt{2\cos(2\cdot 1) + 4\cos 1 + 3} - 2\cos 1 = \sqrt{4\cos^2 1 + 4\cos 1 + 1} - 2\cos 1 =$$

$$= \sqrt{(2\cos 1 + 1)^2} - 2\cos 1 = |2\cos 1 + 1| - 2\cos 1\,.$$

Так как $0 < 1 < \pi/2$, то $\cos 1 > 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow\ |2\cos 1 + 1| - 2\cos 1 = (2\cos 1 + 1) - 2\cos 1 = 1 > 1/2\,.$

Ответ: первое число больше .

---

28. (ф-т ВМиК) Найти все пары натуральных чисел p и q, для которых

$$4p^2 = q^2 - 9 .$$

Решение

$q^2 - 4p^2 = 9 \Leftrightarrow (q-2p)(q+2p) = 9$. Так как $p, q \in N$, то $q+2p \geqslant 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} q+2p = 3 , \\ q-2p = 3 ; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} q+2p = 9 , \\ q-2p = 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \\ \Rightarrow \end{array} \left\{ \begin{array}{l} p = 0 \notin N , \\ q = 3 \in N ; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} p = 2 \in N , \\ q = 5 \in N . \end{array} \right.$$

Следовательно, условию задачи удовлетворяет только пара $p = 2$, $q = 5$.

Ответ: $p = 2$, $q = 5$.

---

29. (ф-т ВМиК) Решить уравнение $\sin^3 x - \cos^7 x = 1$.

Решение

В силу того, что $\forall x \in R \ -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ и $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ мы имеем

$$\sin^3 x \leqslant \sin^2 x , \ -\cos^7 x \leqslant \cos^2 x \ \Rightarrow \ \sin^3 x - \cos^7 x \leqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1 ,$$

поэтому в силу свойств неравенств равенство $\sin^3 x - \cos^7 x = 1$ возможно только при выполнении условий

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x = 1 , \\ \cos x = 0 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin x = 0 , \\ \cos x = -1 , \end{array} \right.$$

из которых и следует ответ.

Ответ: $x = \pi/2 + 2\pi n$, $x = \pi + 2\pi n$, $n = 0 ; \pm 1 ; \pm 2 ; \ldots$.

---

30. (ф-т ВМиК) Определить первый знак после запятой у числа $\sin 80^\circ$.

Решение

В силу возрастания функции синус на отрезке $[0^\circ , 90^\circ]$

$$1 = \sin 90^\circ > \sin 80^\circ > \sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} > \frac{1,7+1}{\sqrt{8}} > \frac{2,7}{\sqrt{9}} = \frac{2,7}{3} = 0,9 ,$$

то есть $0,9 < \sin 80^\circ < 1$, откуда следует ответ. **Ответ:** 9.

---

31. (ф-т ВМиК) Доказать, что для любых трех положительных действительных чисел a, b, c выполняется нерввенство

$$(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9$$

и указать в каком случае выполняется равенство.

Доказательство

Перемножая скобки в левой части неравенства и воспользовавшись неравенством для суммы двух взаимно обратных положительных чисел, получим:

$$3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\geqslant 3+2+2+2=9\,,$$

так как в неравенстве для суммы двух взаимно обратных положительных чисел равенство выполняется только в случае их равенства 1, то данное неравенство обращается в равенство только в случае $a=b=c$.

---

32. (ф-т ВМиК) Доказать справедливость неравенства

$$\arcsin x\cdot\arccos x\leqslant\tfrac{\pi^2}{16}\,.$$

Для каких значений x оно выполняется и при каких значениях x достигается равенство ?

Решение

$\arcsin x$ и $\arccos x$ определены и принимают действительные значения только при $-1\leqslant x\leqslant 1$. Положим $a=\arcsin x$, тогда $\arccos x=\pi/2-a$ и $-\pi/2\leqslant a\leqslant\pi/2$. Применяя операцию выделения полного квадрата, получим:

$$\arcsin x\cdot\arccos x=a\cdot\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=-\left(a^2-\frac{\pi}{2}\cdot a\right)=-\left[\left(a-\frac{\pi}{4}\right)^2\right]+\frac{\pi^2}{16}\,,$$

откуда непосредственно вытекает доказываемое неравенство. Оно обращается в равенство только при $a=\pi/4\ \Leftrightarrow\ x=1/\sqrt{2}$.

Ответ: $-1\leqslant x\leqslant 1$, $x=1/\sqrt{2}$.

---

33. (ф-т ВМиК) Доказать иррациональность числа $\operatorname{tg} 5^\circ$.

Доказательство

Предположим, что $\operatorname{tg} 5^\circ \in Q$ (то есть рационально), тогда, применяя формулы тангенса двойного аргумента и тангенса суммы двух аргументов, а также тот факт, что сумма, разность, произведение, частное рациональных чисел — числа рациональные, получим:

$$\operatorname{tg} 10^\circ = \frac{2\operatorname{tg} 5^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 5^\circ} \in Q\ ,\ \operatorname{tg} 20^\circ = \frac{2\operatorname{tg} 10^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 10^\circ} \in Q\ ,$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 10^\circ}{1-\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 10^\circ} \in Q \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3} = 3\operatorname{tg} 30^\circ \in Q\ ,$$

а последнее неверно, стало быть мы пришли к противоречию, которое и доказывает утверждение.

Докажем также иррациональность числа $\sqrt{3}$. Предположим, что $\sqrt{3} \in Q$, тогда $\exists m, n \in N\ : \sqrt{3} = \frac{m}{n}$, причем можно считать дробь $\frac{m}{n}$ несократимой, то есть Н.О.Д.$(m;n) = 1$ (в противном случае ее можно сократить на общий множитель числителя и знаменателя так, что она заменится равной ей несократимой дробью). Тогда $3 = \frac{m^2}{n^2} \ \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2 = 3n^2 \ \Rightarrow \ m^2 \vdots 3$. Представляя число m в виде $m = 3q + r$, где $q \in N$, $r = 0\ ;\ 1\ ;\ 2$, получим: $m^2 = (3q+r)^2 = 9q^2 + 6qr + r^2 \ \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = m^2 - 9q^2 - 6qr = 3 \cdot (n^2 - 3q^2 - 2qr) \ \Rightarrow \ r^2 \vdots 3$. Из указанных значений r последнее условие выполняется только при $r = 0$, следовательно $m = 3q$, то есть $m \vdots 3 \ \Rightarrow \ m^2 = 3n^2 \Leftrightarrow \ (3q)^2 = 3n^2 \ \Leftrightarrow \ n^2 = 3q^2 \ \Rightarrow \ n^2 \vdots 3$, откуда уже по доказанному для случая числа m вытекает, что и $n \vdots 3$. Таким образом, по крайней мере Н.О.Д.$(m;n) \geqslant 3$. Пришли к противоречию, которое доказывает иррациональность числа $\sqrt{3}$.

---

34. (ф-т ВМиК) Пусть x_1 , x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 + px - q = 0$. Найти $x_1^3 + x_2^3$, не вычисляя этих корней.

Решение

Действительные корни уравнения существуют при $p^2 + 4q \geqslant 0$. Используя соотношения

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)\ ,\ x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\ ,$$

а также теорему Виета : $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = -q$, получим ответ

Ответ: $-p(p^2+3q)\ ,\ p^2+4q \geqslant 0\ .$

---

35. (геолог. ф-т) Решить уравнение $\sin^2(\pi x)+\sqrt{x^2+3x+2}=0\ .$

Решение

Так как выражение, стоящее в левой части уравнения неотрицательно, то это уравнение сводится к следующей системе :

$$\begin{cases}\sin(\pi x)=0\ ,\\ x^2+3x+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\pi x=\pi n\ \forall n\in Z\ ,\\ (x+1)(x+2)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=n\ ,\\ x=-1\ ;\\ x=-2\ ,\end{array}\right.\\ \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\ ;\\ x=-2\ .\end{array}\right.$$

Ответ: $x=-1\ ,\ x=-2\ .$

---

36. (геолог. ф-т) Доказать, что $\forall n\in N \quad (n^3-n)\ \vdots\ 6\ .$

Доказательство

$n^3-n=n(n^2-1)=(n-1)n(n+1)$ — произведение трех последовательных целых чисел, из которых по крайней мере одно делится на 2 и по крайней мере одно делится на 3, а потому все произведение, одновременно делясь нацело на числа 2 и 3, будет делиться и на их произведение, число 6 (поскольку числа 2 и 3 — взаимно простые, то есть Н.О.Д. $(2;3)=1$).

Замечание. Утверждение о том, что число $a\ \vdots\ (mn) \Leftrightarrow a\ \vdots\ m\ ,\ a\ \vdots\ n\ ,$ если Н.О.Д. $(m;n)=1$ вытекает из теоремы о представлении любого натурального числа $a\geqslant 2$ в виде произведения простых множителей единственным (с точностью до порядка сомножителей) образом (см. утверждение 5 в п. 2.0.3).

---

37. (геолог. ф-т) Решить неравенство $\log_3(\log_{\frac{1}{5}}x)\leqslant 0\ .$

Решение

Воспользовавшись тем, что логарифмическая функция $f(x)=\log_a x$ определена при любом $x>0$, возрастает при $a>1$ и убывает при $0<a<1$, мы получим:

$$\log_3(\log_{\frac{1}{5}}x)\leqslant 0 \ \Leftrightarrow\ \log_3(\log_{\frac{1}{5}}x)\leqslant \log_3 1 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \log_{\frac{1}{5}}1=0<\log_{\frac{1}{5}}x\leqslant 1=\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{5} \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{5}\leqslant x<1\ .$$

Ответ: $1/5\leqslant x<1\ .$

---

38. (геолог. ф-т) Известно, что $\log_3 18 = a$, $\log_5 15 = b$, вычислить $\log_2 10$.

Решение

Применяя свойства логарифмов, произведем следующие преобразования:

$$a = \log_3 18 = \log_3(9\cdot 2) = \log_3 9 + \log_3 2 = 2 + \log_3 2 \Rightarrow a-2 = \log_3 2,$$

$$b = \log_5 15 = \log_5(3\cdot 5) = \log_5 5 + \log_5 3 = 1 + \log_5 3 \Rightarrow b-1 = \log_5 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-2)(b-1) = (\log_5 3)\cdot(\log_3 2) = \log_5 2 = \frac{1}{\log_2 5} = \frac{1}{\log_2(10:2)} =$$

$$= \frac{1}{\log_2 10 - \log_2 2} = \frac{1}{\log_2 10 - 1} \quad \Rightarrow \quad \text{ответ}.$$

Ответ: $1 + \dfrac{1}{(a-2)(b-1)}$.

39. (ф-т ВМиК и геолог. ф-т) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$. Доказать, что для его площади S имеет место неравенство $S \leqslant \dfrac{ab+cd}{2}$. В каких случаях это неравенство обращается в равенство?

Доказательство

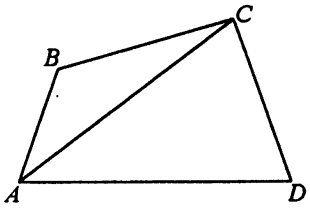


рис. 24 а)

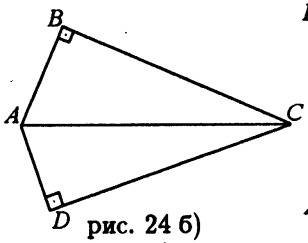


рис. 24 б)

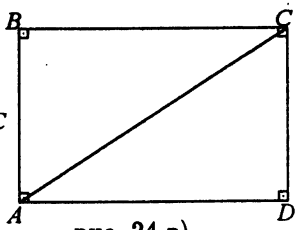


рис. 24 в)

Проведем диагональ AC этого четырехугольника (см. рис. 24 а), тогда $S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = \dfrac{1}{2}\cdot(ab\sin\widehat{B} + cd\sin\widehat{D}) \leqslant \dfrac{1}{2}\cdot(ab+cd)$, поскольку $0 < \sin\widehat{B} \leqslant 1$, $0 < \sin\widehat{D} \leqslant 1$. Очевидно, что доказанное неравенство обращается в равенство только в случае $\sin\widehat{B} = \sin\widehat{D} = 1$, то есть когда углы B и D — прямые. Последнее, в частности имеет место, когда $ABCD$ — прямоугольник (см. рис. 24 в), однако — не только в случае прямоугольника (см. рис. 24 б).

Ответ: $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$.

---

40. (геолог. ф-т) В треугольнике ABC проведены биссектриса CE и медиана BD , которые пересекаются в точке O . Длина стороны BC в два раза больше длины стороны AC . Найти отношение длины отрезка BO к длине отрезка OD и отношение площади треугольника DOC к площади треугольника BOC .

Решение

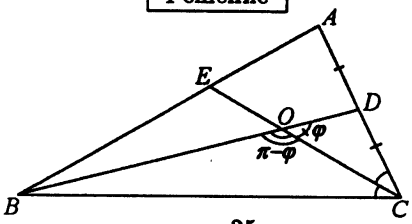


рис. 25

По свойству биссектрисы угла треугольника (см. рис. 25)

$$\frac{|BO|}{|OD|} = \frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|BC|}{|AC|/2} = \frac{2|BC|}{|AC|} = 2 \cdot 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{|BO|}{|OD|} = 4 \, ;$$

$$\frac{S_{\triangle COD}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |OD| \cdot |OC| \cdot \sin\varphi}{\frac{1}{2} \cdot |OB| \cdot |OC| \cdot \sin(\pi - \varphi)} = \frac{|OD| \cdot \sin\varphi}{|OB| \cdot \sin\varphi} = \frac{|OD|}{|OB|} = \frac{1}{4} \, .$$

Ответ: $|BO| : |OD| = 4$, $S_{\triangle COD} : S_{\triangle BOC} = 1 : 4$.

---

41. (геолог. ф-т) Найти область определения функции $y = \sqrt{\log_3(\sin 2x)}$.

Решение

$D[y] = \{x \, : \, \log_3(\sin 2x) \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; \log_3(\sin 2x) \geqslant \log_3 1 \;\Leftrightarrow\; \sin 2x \geqslant 1 \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin 2x = 1$, откуда получаем ответ.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n = 0 \, ; \, \pm 1 \, ; \, \pm 2 \, ; \, \ldots$.

---

42. (геолог. ф-т) Вычислить $\frac{22}{\pi} \arcsin\left(\cos\frac{35\pi}{11}\right)$.

Решение

$$\frac{22}{\pi}\arcsin\left(\cos\frac{35\pi}{11}\right)=\frac{22}{\pi}\arcsin\left(-\cos\left(\frac{35\pi}{11}-3\pi\right)\right)=$$

$$=-\frac{22}{\pi}\arcsin\left(\cos\frac{2\pi}{11}\right)=-\frac{22}{\pi}\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{11}\right)\right)=$$

$$=-\frac{22}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{22}\right)=\left\{\frac{7\pi}{22}\in\left[-\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{\pi}{2}\right]\right\}=-\frac{22}{\pi}\cdot\frac{7\pi}{22}=-7\,.$$

Ответ: -7.

---

43. (геолог. ф-т) Сравнить $\dfrac{1}{\log_2 3}+\dfrac{1}{\log_3 2}$ и 2.

Решение

$\dfrac{1}{\log_2 3}+\dfrac{1}{\log_3 2}\vee 2\Leftrightarrow \log_3 2+\dfrac{1}{\log_3 2}\vee 2$. Так как $\forall x>0\ \Rightarrow\ x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$, причем $x+\dfrac{1}{x}=2\ \Leftrightarrow\ x=1$, и $0<\log_3 2\neq 1$, то $\log_3 2+\dfrac{1}{\log_3 2}>2$.

Ответ: $\log_3 2+\dfrac{1}{\log_3 2}>2$.

---

44. (геолог. ф-т) Решить уравнение $\sin x+\cos x+\sin x\cdot\cos x=1$.

Решение

$\sin x+\cos x+\sin x\cdot\cos x=1\Leftrightarrow \sin x+\cos x=1-\sin x\cdot\cos x\Rightarrow$
$\Rightarrow(\sin x+\cos x)^2=(1-\sin x\cdot\cos x)^2\Leftrightarrow \sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=$
$=1-2\sin x\cdot\cos x+\sin^2 x\cdot\cos^2 x\ \Leftrightarrow\ \{\forall x\in R\ \Rightarrow\ \sin^2 x+\cos^2 x=1,$
$z=\sin x\cdot\cos x=(\sin 2x)/2\}\ \Leftrightarrow\ z^2-4z=0\ \Leftrightarrow\ \{|z|\leqslant 1/2\}\ \Leftrightarrow\ z=0\ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x+\cos x=1\,,\\ \sin x\cdot\cos x=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{cases}\sin x=0\,,\\ \cos x=1\,;\end{cases}\begin{cases}\cos x=0\,,\\ \sin x=1\end{cases}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\pi n\,;\\ x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\,,\end{array}\right.\quad n=0\,;\ \pm1\,;\ \pm2\,;\ \ldots\,.$$

Ответ: $x=2\pi n\,;\ x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\,,\ n=0\,;\ \pm1\,;\ \pm2\,;\ \ldots\,.$

---

45. (геолог. ф-т) Найти наибольшее целое значение параметра a, при котором уравнение $(3-x)^5 = |x+a|^5$ не имеет решений.

Решение

1 способ (аналитический)

Равенство $u^5 = v^5 \Leftrightarrow u = v$ поскольку в силу свойств отношения " = " между числами из $u = v \Rightarrow u^5 = v^5$; если предположить, что для некоторых чисел u' и v' из $u'^5 = v'^5$ не следует равенство $u' = v'$, то либо $u' > v'$, либо $u' < v'$, тогда в силу возрастания функции $y = x^5$ на $(-\infty\ ,\ +\infty)$ соответственно вытекает, что либо $u'^5 > v'^5$, либо $u'^5 < v'^5$, оба этих варианта противоречат равенству $u'^5 = v'^5$, таким образом, $u^5 = v^5 \Rightarrow$ $\Rightarrow u = v$. Итак, уравнение $(3-x)^5 = |x+a|^5 \Leftrightarrow 3 - x = |x+a|$, поэтому достаточно найти наибольшее целое значение a, при котором $\forall x \in R \Rightarrow$

$$\Rightarrow |x+a| \neq 3-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 3\ , \\ x+a \neq 3-x\ , \\ x+a \neq x-3\ ; \end{array}\right. \\ x > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 3\ , \\ x+a \neq 3-x\ , \\ x+a \neq x-3\ ; \end{array}\right. \\ x > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \leqslant 3\ , \\ x \neq (3-a)/2\ , \\ a \neq -3\ ; \end{array}\right. \\ x > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{3-a}{2} > 3 \Leftrightarrow 3-a > 6 \Leftrightarrow a < -3\ .$$

Следовательно, максимальное целое значение a, удовлетворяющее условию задачи, это $a = -4$.

2 способ (графический, см. рис. 26)

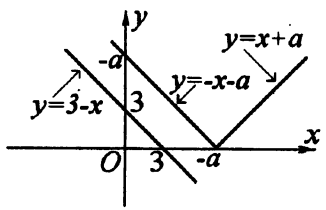


рис. 26

Так же, как и в первом способе решения задачи, сведем задачу к исследованию отсутствия решения уравнения $|x+a| = 3-x$. График правой части последнего уравнения (график функции $y = 3-x$) — прямая на координатной плоскости, проходящая через точки $(3;0)$ и $(0;3)$, а график левой части уравнения (график функции $y = |x+a|$) — угол с вершиной в точке $(-a;0)$ (два луча : $y = x+a$, если $x \geqslant -a$, и $y = -x-a$, если $x \leqslant -a$). Геометрический смысл отсутствия решений уравнения $|x+a| = 3-x$ это

отсутствие общих точек графиков функций левой и правой частей этого уравнения. При $-a \neq 3 \Leftrightarrow a \neq -3$ следует, что луч $y = -x - a$, где $x \leqslant -a$ параллелен прямой $y = -x + 3$, а луч $y = x + a$, где $x \geqslant -a$ не имеет общих точек с прямой $y = -x + 3$ тогда и только тогда, когда $-a > 3 \Leftrightarrow a < -3$. Откуда максимальное целое значение a, удовлетворяющее условию задачи, это $a = -4$.

Ответ: $a = -4$.

---

46. (геолог. ф-т) Найти значение a, при котором минимально расстояние между корнями уравнения $x^2 + (a - 34)x - 35a - 36 = 0$.

Решение

Корни уравнения $x^2 + bx + c = 0$ при $D = b^2 - 4c \geqslant 0$ имеют вид

$$x = x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \; ; \; x = x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; \rho(x_1; x_2) = |x_2 - x_1| = \sqrt{b^2 - 4c} \; .$$

Следовательно, надо вычислить это выражение применительно к данному уравнению и найти его наименьшее значение по a.

$D = b^2 - 4c = (a - 34)^2 + 4(35a + 36) = a^2 - 68a + 1156 + 140a + 144 =$
$= a^2 + 72a + 1300 = a^2 + 72a + 1296 + 4 = (a + 36)^2 + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow \min\sqrt{b^2 - 4c} = \min\sqrt{(a + 36)^2 + 4} = \sqrt{4} = 2$ при $a = -36$.

Ответ: $a = -36$.

---

47. (геолог. ф-т) Найти период T функции $y = 2\sin\frac{2x}{15} - 3\cos\frac{8x}{35}$, удовлетворяющий условию $0 < T < 500$.

Решение

В силу периодичности функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ с периодами $2\pi n$, $(n = \pm 1 \; ; \; \pm 2 \; ; \; \ldots)$ $2\sin\frac{2x}{15} = 2\sin\left(\frac{2x}{15} + 2\pi n\right) = 2\sin\frac{2(x + 15\pi n)}{15}$, следовательно, в частности, 15π — период функции $2\sin\frac{2x}{15}$;

$3\cos\frac{8x}{35} = 3\cos\left(\frac{8x}{35} + 8\pi n\right) = 3\cos\frac{8(x + 35\pi n)}{35}$, следовательно, в частности, 35π — период функции $3\cos\frac{8x}{35}$; общим периодом обеих этих

функций, а потому — и функции $y(x)$ будет Н.О.К.$(15;35)\pi = 105\pi$. Так как $105\pi < 105\cdot 4 = 420 < 500$, то это число удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 105π .

---

48. (геолог. ф-т) Сумма n первых членов последовательности $\{a_n\}$ определяется по формуле $S_n = 2n^2 + 3n$. Определить эту последовательность.

Решение

$S_{n-1} = 2(n-1)^2+3(n-1)$, а потому $a_n = S_n - S_{n-1} = 2(n^2-(n-1)^2)+3 = 2(2n-1)+3 = 4n+1$. Формула общего члена искомой последовательности $a_n = 4n + 1 = 5 + 4(n-1)$. Эта последовательность — арифметическая прогрессия $(\div)$, ее разность $d = 4$, а первый член $a_1 = 5$.

Ответ: $a_n = 5 + 4(n-1)$.

---

49. (геолог. ф-т) Найти расстояния между основаниями высот треугольника, если длины его сторон равны 2 , $8/3$ и $10/3$.

Решение

Прежде всего постараемся выяснить вид треугольника по теореме косинусов, записанной относительно его большей стороны.

$$\frac{100}{9} = \frac{64}{9} + 4 - 2\cdot 2\cdot \frac{8}{3}\cdot \cos\varphi \;\Rightarrow\; \cos\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \varphi = \frac{\pi}{2} ,$$

где φ — величина угла треугольника, противолежащего его большей стороне. Следовательно, этот треугольник — прямоугольный, а потому одно из этих расстояний равно 0 , а два других равны длине высоты, опущенной из вершины прямого угла этого треугольника на гипотенузу. Применяя формулу площади треугольника (через длины его стороны и опущенной на нее высоты), получим $h_c = \dfrac{2S}{c} = \dfrac{2\cdot 8/3}{10/3} = \dfrac{8}{5}$.

Ответ: $0\,;\ \dfrac{8}{5}$.

---

50. (геолог. ф-т) Для всех значений параметра a решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x} + \sqrt{1 - x} = a .$$

Решение

$$\text{ОДЗ} — \left\{\begin{array}{l} x^2 - x \geqslant 0\,, \\ x \geqslant 0\,, \\ 1 - x \geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x(x-1) \geqslant 0\,, \\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x \geqslant 1\,; \\ x \leqslant 0\,, \end{array}\right. \\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\,; \\ x = 1\,. \end{array}\right.$$

При подстановке значения $x = 0$ в левую часть уравнения получаем, что $a = 1$; а при подстановке значения $x = 1$ в левую часть уравнения получаем, что $a = -1$; следовательно, при остальных значениях a уравнение не имеет решений.

Ответ: $x = 1$ при $a = -1$;
$x = 0$ при $a = 1$;
решений нет при $a \neq -1$ и $a \neq 1$.

---

51. (геолог. ф-т) Найти сумму цифр в десятичной записи числа $N = 10^{1999} - 1999$.

Решение

$10^{1999} = 1\underbrace{000\ldots000}_{1999} \Rightarrow 10^{1999} - 1999 = \underbrace{999\ldots999}_{1995}8001$. Следовательно, искомая сумма равна $9 \cdot 1995 + 8 + 1 = 9 \cdot 1995 + 9 = 9 \cdot 1996 = 17964$.

Ответ: 17964 .

---

52. (геолог. ф-т) Решить уравнение $1 + 7 + 13 + \ldots + x = 280$.

Решение

В левой части уравнения сумма членов арифметической прогрессии $(\div)$ с первым членом $a_1 = 1$ и разностью $d = 6$. Пусть $x = a_n$, где по формулам общего члена и суммы n первых членов $\div$ следует $a_n = 1 + 6(n-1)$, $S_n = (2a_1 n + d(n-1)n)/2 = n + 3(n-1)n = 280 \Rightarrow 3n^2 - 2n - 280 = 0$. Поскольку нас интересует целый положительный корень последнего уравнения, то $n = (1 + \sqrt{1^2 + 280 \cdot 3})/3 = (1 + \sqrt{841})/3 = (1 + 29)/3 = 10 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = a_{10} = 1 + 6 \cdot (10 - 1) = 55$.

Ответ: $x = 55$.

---

53. (геолог. ф-т) Середины сторон выпуклого четырехугольника последовательно соединены отрезками прямых. Площадь получившегося четырехугольника равна S. Определить площадь первоначального четырехугольника.

Решение

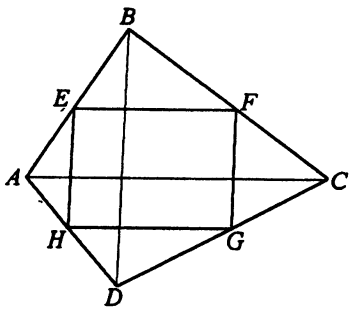


рис. 27

Проведем диагонали BD и AC в четырехугольнике $ABCD$ (см. рис. 27). Тогда EH и FG будут средними линиями треугольников ABD и BCD соответственно. В силу свойств средней линии треугольника $EH \parallel BD$, $FG \parallel BD$ и $EH = BD/2 = FG$, откуда следует, что $\triangle AEH \sim \triangle ABD$ и $\triangle CFG \sim \triangle CBD$, коэффициенты подобия в обоих случаях равны $k = 1/2$. Следовательно, $S_{\triangle AEH} = k^2 S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABD}/4$ и $S_{\triangle CFG} = k^2 S_{\triangle CBD} = S_{\triangle CBD}/4$, поэтому

$$S_{\triangle AEH} + S_{\triangle CFG} = \frac{S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD}}{4} = \frac{S_{ABCD}}{4},$$

аналогично можно получить, что

$$S_{\triangle BEF} + S_{\triangle DHG} = \frac{S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC}}{4} = \frac{S_{ABCD}}{4},$$

следовательно,

$$S_{\triangle AEH} + S_{\triangle CFG} + S_{\triangle BEF} + S_{\triangle DHG} = \frac{S_{ABCD}}{4} + \frac{S_{ABCD}}{4} = \frac{S_{ABCD}}{2} =$$

$$= S_{ABCD} - S_{EFGH} = S_{ABCD} - S \Rightarrow S = S_{ABCD} - \frac{S_{ABCD}}{2} = \frac{S_{ABCD}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S_{ABCD} = 2S.$$

Ответ: $2S$.

54. (ф-т ВМиК) Доказать, что для любого натурального числа $n > 1$ число $n^3 - n + 3$ — составное.

Доказательство

$n^3 - n + 3 = n(n^2 - 1) + 3 = (n-1)n(n+1) + 3 = 3(p+1)$, где $p = (n-1)n(n+1)/3 \in N$, так как $(n-1)n(n+1)$ — произведение трех последовательных натуральных чисел, из которых всегда одно делится на число 3, следовательно, $p + 1 \in N$, $(p+1) \geqslant 2$, а потому $n^3 - n + 3$ — составное число, так как $(n-1)n(n+1) + 3 \vdots 3$ и $(n-1)n(n+1) + 3 \geqslant 6$.

---

55. (ф-т ВМиК) Решить в целых числах уравнение $9^x = 4y + 1$.

Решение

$9^x = 4y + 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{9^x - 1}{4}$, при $x \leqslant -1 \Rightarrow -1 < 9^x - 1 \leqslant -\dfrac{8}{9} \Rightarrow y \notin Z$, а потому целочисленные решения уравнения надо искать только при условии $x \geqslant 0$. При $x = 0$ получаем, что и $y = 0$, при $x = n \in N \Rightarrow 9^x - 1 =$

$= 9^n - 1 = (9-1)(9^{n-1} + 9^{n-2} + \ldots + 9 + 1) = 8(9^{n-1} + 9^{n-2} + \ldots + 9 + 1) \vdots 4$, поэтому целочисленными решениями уравнения являются пары

$x = n$, $y = \dfrac{9^n - 1}{4}$, $n = 0\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ \ldots$.

Ответ: $x = n$, $y = \dfrac{9^n - 1}{4}$, $n = 0\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ \ldots$.

---

56. (ф-т ВМиК) Сравнить числа a и b, если $5(a-1) = a^2 + b$.

Решение

Так как $5(a-1) = a^2 + b \Leftrightarrow b = -a^2 + 5a - 5$, то $b - a = -a^2 + 4a - 5 =$ $= -(a^2 - 4a + 4) - 1 = -(a-2)^2 - 1 \leqslant -1 < 0$, следовательно при условии $5(a-1) = a^2 + b$ всегда $b - a < 0 \Leftrightarrow a > b$.

Ответ: $a > b$.

---

57. (ф-т ВМиК) Решить уравнение $\dfrac{1}{2^{\sin^2 x}} + \dfrac{1}{2^{\cos^2 x}} = \sin x + \cos x$.

Решение

$\frac{1}{2^{\sin^2 x}} + \frac{1}{2^{\cos^2 x}} = \sin x + \cos x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2^{\sin^2 x}} + \frac{\sqrt{2}}{2^{\cos^2 x}} = \sqrt{2}(\sin x + \cos x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2^{\sin^2 x}} + \frac{\sqrt{2}}{2^{\cos^2 x}} = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ (в последнем переходе к правой части уравнения применена формула преобразования выражения вида $a\sin x + b\cos x$ с помощью вспомогательного аргумента) ; поскольку $\frac{\sqrt{2}}{2^{\sin^2 x}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2^{\cos^2 x}} = \frac{2}{2^{\sin^2 x + \cos^2 x}} = \frac{2}{2^1} = 1$, то выражения $\frac{\sqrt{2}}{2^{\sin^2 x}}$ и $\frac{\sqrt{2}}{2^{\cos^2 x}}$ являются взаимно обратными, а так как они еще и положительны, то $\frac{\sqrt{2}}{2^{\sin^2 x}} + \frac{\sqrt{2}}{2^{\cos^2 x}} \geqslant 2$, причем $\frac{\sqrt{2}}{2^{\sin^2 x}} + \frac{\sqrt{2}}{2^{\cos^2 x}} = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2^{\sin^2 x}} = \frac{\sqrt{2}}{2^{\cos^2 x}} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\sin^2 x} = \sqrt{2}\,, \\ 2^{\cos^2 x} = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\sin^2 x} = 2^{1/2}\,, \\ 2^{\cos^2 x} = 2^{1/2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = \frac{1}{2}\,, \\ \cos^2 x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{\forall x \in R \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1\} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n = 0\,;\ \pm 1\,;\ \pm 2\,;\ \ldots\ ;$ правая часть уравнения $2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 2$ $(\forall x \in R)$, $2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n = 0\,;\ \pm 1\,;\ \pm 2\,;\ \ldots\ ;$ следовательно, решениями уравнения являются те и только те значения x , при которых обе части почленно умноженного на $\sqrt{2}$ исходного уравнения равны 2 , из проведенных рассуждений вытекает, что это следующие значения x :

$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n = 0\,;\ \pm 1\,;\ \pm 2\,;\ \ldots$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n = 0\,;\ \pm 1\,;\ \pm 2\,;\ \ldots$.

---

58. (ф-т ВМиК) При каких значениях параметра a уравнение $\sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x = a$ имеет решения ?

Решение

$\sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x = a \Leftrightarrow \sin x + \cos x = a - \sin x \cdot \cos x \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ (\sin x+\cos x)^2=(a-\sin x\cdot\cos x)^2\ \Leftrightarrow\ \sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x=$$
$$=a^2-2a\sin x\cdot\cos x+\sin^2 x\cdot\cos^2 x\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\sin x\cdot\cos x)^2-2(a+1)\sin x\cdot\cos x+a^2-1=0\Leftrightarrow$$
$$\{z=\sin x\cdot\cos x=(\sin 2x)/2\Rightarrow|z|\leqslant 1/2\}\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ z^2-2(a+1)z+a^2-1=0\ .$$

Последнее уравнение имеет действительные корни:

$$z_{1,2}=a+1\pm\sqrt{(a+1)^2-a^2+1}=a+1\pm\sqrt{2(a+1)}\ \Leftrightarrow\ a\geqslant -1\ .$$

Следовательно, исходное уравнение имеет решения тогда и только тогда, когда

$$\left\{\begin{array}{l} a\geqslant -1\ , \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2}\leqslant a+1-\sqrt{2(a+1)}\leqslant\dfrac{1}{2}\ ; \\ -\dfrac{1}{2}\leqslant a+1+\sqrt{2(a+1)}\leqslant\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{array}\right.\ \Leftrightarrow\ \left\{\begin{array}{l} u=\sqrt{2(a+1)}\quad\Rightarrow \\ \Rightarrow\ (a+1)=\dfrac{u^2}{2}\ ,\ u\geqslant 0\ . \end{array}\right\}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \left\{\begin{array}{l} u\geqslant 0\ , \\ \left[\begin{array}{l} -1\leqslant u^2-2u\leqslant 1\ ; \\ -1\leqslant u^2+2u\leqslant 1 \end{array}\right. \end{array}\right.\ \Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} u\geqslant 0\ , \\ \left[\begin{array}{l} 0\leqslant u^2-2u+1\leqslant 2\ ; \\ 0\leqslant u^2+2u+1\leqslant 2 \end{array}\right. \end{array}\right.\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \left\{\begin{array}{l} u\geqslant 0\ , \\ \left[\begin{array}{l} 0\leqslant (u-1)^2\leqslant 2\ ; \\ 0\leqslant (u+1)^2\leqslant 2 \end{array}\right. \end{array}\right.\ \Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} u\geqslant 0\ , \\ \left[\begin{array}{l} 1-\sqrt{2}\leqslant u\leqslant 1+\sqrt{2}\ ; \\ -1-\sqrt{2}\leqslant u\leqslant -1+\sqrt{2} \end{array}\right. \end{array}\right.\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0\leqslant u\leqslant\sqrt{2}+1\Leftrightarrow 0\leqslant a+1\leqslant\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2}=\frac{3}{2}+\sqrt{2}\Leftrightarrow -1\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}+\sqrt{2}\ .$$

Ответ: $-1\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}\ .$

---

59. (ф-т ВМиК) Доказать, что если длины всех высот треугольника меньше 1, то радиус вписанной в него окружности меньше $\dfrac{1}{3}$.

Доказательство

Обозначим за a, b, c длины сторон треугольника, за h_a, h_b, h_c длины соответственно опущенных на них высот, площадь треугольника обозначим за S, а радиус вписанной в нее окружности обозначим за r. Тогда, применяя формулы площади треугольника через длины стороны и проведенной к ней высоты, а также через периметр треугольника и радиус

вписанной в нее окружности, получим $S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 3S = \frac{a \cdot h_a + b \cdot h_b + c \cdot h_c}{2} < \frac{a+b+c}{2} \Leftrightarrow S < \frac{a+b+c}{6}$.

С другой стороны, $S = \frac{(a+b+c)r}{2} \Rightarrow \frac{(a+b+c)r}{2} < \frac{a+b+c}{6} \Leftrightarrow r < \frac{1}{3}$.

---

60. (ф-т ВМиК) Доказать, что в любом треугольнике сумма длин всех трех его медиан больше трех четвертых его периметра и меньше его периметра.

Доказательство

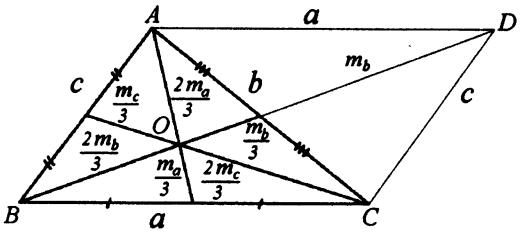


рис. 28

Обозначим вершины треугольника за A , B , C , длины противолежащих им сторон — соответственно за a , b , c , а длины проведенных из этих вершин медиан — соответственно за m_a , m_b , m_c . Тогда, обозначая за O точку пересечения медиан $\triangle ABC$ и используя отношение $2:1$, в котором делятся медианы треугольника в точке их пересечения, считая от его вершин, получим, что (см. рис. 28)

$$|AO| = \frac{2m_a}{3} \ , \ |BO| = \frac{2m_b}{3} \ , \ |CO| = \frac{2m_c}{3} \ .$$

Применим неравенство треугольника (длина каждой стороны треугольника меньше суммы длин двух других его сторон) к треугольникам BOC , COA , AOB , соответственно получим:

$$\begin{cases} |BO| + |CO| > |BC| \ , \\ |CO| + |AO| > |AC| \ , \\ |AO| + |BO| > |AB| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m_b + 2m_c}{3} > a \ , \\ \frac{2m_c + 2m_a}{3} > b \ , \\ \frac{2m_a + 2m_b}{3} > c \ . \end{cases}$$

Складывая почленно неравенства последней системы, мы получим:

$$\frac{4m_a+4m_b+4m_c}{3} > a+b+c \Leftrightarrow m_a+m_b+m_c > \frac{3(a+b+c)}{4},$$

первая часть утверждения доказана.

Для доказательства второй части утверждения достроим $\triangle ABC$ до параллелограмма $ABCD$ (см. рис. 28), в котором $BC \parallel AD$, $AB \parallel DC$, сторона AC $\triangle ABC$ — одна из его диагоналей. В силу свойств сторон и диагоналей параллелограмма $|CD| = |AB| = c$, $|BD| = 2m_b$. Применяя неравенство треугольника к $\triangle ABC$, получим неравенство $|BC| + |CD| > |BD| \Leftrightarrow a + c > 2m_b$, аналогично, если достроить $\triangle ABC$ до параллелограмма сначала так, что сторона BC — одна из его диагоналей, а затем так, что сторона AB — одна из его диагоналей, мы соответственно получим: $c + b > 2m_a$, $a + b > 2m_c$. Сложим почленно неравенства

$$\begin{cases} a+c > 2m_b, \\ c+b > 2m_a, \\ a+b > 2m_c \end{cases} \Rightarrow 2(a+b+c) > 2(m_a+m_b+m_c) \Leftrightarrow m_a+m_b+m_c < a+b+c,$$

тем самым, утверждение полностью доказано.

---

61. (ф-т ВМиК) Доказать, что при любом целом значении n выражение $n^2 + 3n + 5$ не делится нацело на число 121.

Доказательство

1 способ

Представим выражение $n^2 + 3n + 5$ следующим образом $n^2 + 3n + 5 = n^2 + 7n - 4n - 28 + 33 = (n+7)(n-4) + 33$. Так как $(n+7) - (n-4) = 11$, то числа $n+7$ и $n-4$ делятся и не делятся на число 11 одновременно.

Если $n+7 \vdots 11$ и $n-4 \vdots 11$, то $n+7 = 11p$, $n-4 = 11q$, где p, $q \in Z$, тогда $(n+7)(n-4) = 121pq \vdots 121$, $33 \not\vdots 121 \Rightarrow n^2 + 3n + 5 = (n+7)(n-4) + 33 \not\vdots 121$;

если же $n+7 \not\vdots 11$ и $n-4 \not\vdots 11$, то поскольку 11 — простое число, применяя теорему единственности разложения на простые множители (с точностью лишь до порядка сомножителей) натурального числа, получим, что ни одно из чисел $n+7$ и $n-4$ не сожержит при разложении на простые множители число 11, следовательно, не сожержит при разложении на простые множители числа 11 и произведение $(n+7)(n-4) \Rightarrow (n+7)(n-4) \not\vdots 11$, а так как $33 \vdots 11$, то $(n+7)(n-4) + 33 \not\vdots 11 \Rightarrow (n+7)(n-4) \not\vdots 121$, утверждение полностью доказано.

2 способ

Предположим, что $n^2+3n+5 \vdots 121$, тогда существует $k \in Z$, что $n^2+3n+5=121k$, а потому n является корнем квадратного уравнения $n^2+3n+5-121k=0$, то есть

$$n=n_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+484k-20}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{484k-11}}{2},$$

(причем поскольку $n \in Z (\Rightarrow n \in R)$, то $484k-11 \geqslant 0$, при этом случай $484k-11=0$ исключается по двум причинам: при $484k-11=0 \Rightarrow k=$ $=1/44 \notin Z$, $n=-3/2 \notin Z$), следовательно, $484k-11=(2n+3)^2$, то есть число $484k-11$ — квадрат целого числа, отличного от нуля. Из теоремы единственности разложения на простые множители (с точностью лишь до порядка сомножителей) натурального числа, получим, что все простые множители числа $484k-11$ должны встречаться четное число раз, однако $484k-11=11(44k-1)$, а $44k-1 \not\vdots 11$, поэтому по крайней мере простое число 11 входит в разложение на множители числа $484k-1$ только один раз (то есть нечетное число раз), пришли к противоречию, которое и доказывает утверждение.

---

62. (ф-т ВМиК) Доказать, что уравнение $x^2-5y^2=3$ не имеет решений в целых числах.

Доказательство

Предположим, что существует пара $x=n$, $y=m$, где $m,n \in Z$, удовлетворяющая уравнению, тогда $n^2=5m^2+3$. Поскольку $5m^2 \vdots 5$ и $5m^2 \geqslant 0$, то целое число $5m^2$ оканчивается или цифрой 0 , или цифрой 5 , при этом в силу равенства $n^2=5m^2+3$ целое число n^2 при целом n будет соответственно оканчиваться или цифрой 3 , или цифрой 8 , но это невозможно, так как квадрат любого целого числа может оканчиваться следующими цифрами 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9 . Полученное противоречие доказывает утверждение.

---

63. (ф-т ВМиК) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3+y^3=1, \\ x^4+y^4=1. \end{cases}$$

Решение

Так как $\forall x,y \in R \Rightarrow x^4 \geqslant 0$, $y^4 \geqslant 0$, то из второго уравнения имеем $1=x^4+y^4 \geqslant x^4$ и $1=x^4+y^4 \geqslant y^4$, то есть $x^4 \leqslant 1 \Leftrightarrow |x| \leqslant 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant x^3 \leqslant 1$ и $y^4 \leqslant 1 \Leftrightarrow |y| \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant y \leqslant 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -1 \leqslant y^3 \leqslant 1$. Если либо $-1 \leqslant x < 0$, либо $-1 \leqslant y < 0$, то соответственно $x^3 + y^3 < y^3 \leqslant 1 \Rightarrow x^3 + y^3 < 1$, $x^3 + y^3 < x^3 \leqslant 1 \Rightarrow x^3 + y^3 < 1$, поэтому у системы не существует решений $(x;y)$, где $x < 0$ или $y < 0$. Если $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$, то, вычитая почленно из первого уравнения системы второе, получим $x^3 - x^4 + y^3 - y^4 = 0 \Leftrightarrow x^3(1-x) + y^3(1-y) = 0$. Поскольку при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$ следует $x^3(1-x) \geqslant 0$ и $y^3(1-y) \geqslant 0$, то равенство

$$x^3(1-x) + y^3(1-y) = 0 \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} x^3(1-x) = 0\,; \\ y^3(1-y) = 0 \end{array} \right. \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = 0\,; \\ x = 1\,, \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} y = 0\,; \\ y = 1\,. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Последней системе формально удовлетворяют четыре пары значений $(x;y)$, это $(0;0)$; $(0;1)$; $(1;0)$; $(1;1)$. Непосредственной подстановкой в исходную систему уравнений всех этих пар убеждаемся, что ее решениями являются пары $(0;1)$ и $(1;0)$.

Ответ: $x = 0$, $y = 1$; $x = 1$, $y = 0$.

---

64. (ф-т ВМиК) Действительные числа x , y , a таковы, что выполнены равенства

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = a - 1\,, \\ xy = a^2 - 7a + 14\,. \end{array} \right.$$

При каких значениях a $x^2 + y^2$ принимает наибольшее значение ?

Решение

В силу обратной теоремы Виета и того, что x , y , $a \in R \Rightarrow x$, y — корни квадратного уравнения $t^2 - (a-1)t + a^2 - 7a + 14 = 0$, дискриминант которого $D = (a-1)^2 - 4(a^2 - 7a + 14) \geqslant 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 - 4a^2 + 28a - 56 \geqslant$ $\geqslant 0 \Leftrightarrow -3a^2 + 26a - 55 \geqslant 0 \Leftrightarrow 3a^2 - 26a + 55 \leqslant 0 \Leftrightarrow (3a - 11)(a - 5) \leqslant 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 11/3 \leqslant a \leqslant 5$. $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (a-1)^2 - 2(a^2 - 7a + 14) =$ $= a^2 - 2a + 1 - 2a^2 + 14a - 28 = -a^2 + 12a - 27 = -(a^2 - 12a + 36) + 9 =$ $= -(a-6)^2 + 9$. В силу возрастания функции $f(a) = -(a-6)^2 + 9$ на отрезке $[\,11/3\,,\,5\,]$ ее наибольшее достигается на нем при $a = 5$.

Ответ: $a = 5$.

---

65. (ф-т ВМиК) Найти наибольшее значение функции

$$y(x) = 4x + \frac{\pi}{x} - \cos 4x^2 \quad \text{при} \quad x < 0\,.$$

Решение

В силу неравенства для суммы двух взаимно обратных чисел $\forall t < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow\ t + 1/t \leqslant -2\ ,\ t + 1/t = -2 \Leftrightarrow t = -1$ получим

$$\forall x < 0 \ \Rightarrow\ 4x + \frac{\pi}{x} = 2\sqrt{\pi}\left(\frac{2x}{\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2x}\right) \leqslant -4\sqrt{\pi}\ ,\ -\cos 4x^2 \leqslant 1\ .$$

Поскольку при $x = -\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow 4x^2 = \dfrac{4\pi}{4} = \pi\ \ 4x + \dfrac{\pi}{x} = -4\sqrt{\pi}\ ,\ -\cos 4x^2 =$ $= -\cos\pi = 1$, то наибольшее значение функции $y(x)$ и равно $1 - 4\sqrt{\pi}$, (оно достигается при $x = -\sqrt{\pi}/2$) .

Ответ: $1 - 4\sqrt{\pi}$.

---

66. (ф-т ВМиК) Вычислить $\arcsin(\cos\arcsin x) + \arccos(\sin\arccos x)$.

Решение

Выражения $\arcsin x$ и $\arccos x$ определены при $-1 \leqslant x \leqslant 1$, при любом из этих значений x с учетом определений $\arcsin x$ и $\arccos x$ $\sin(\arcsin x) = x$, $\cos(\arccos x) \doteq x$, $-\pi/2 \leqslant \arcsin x \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$, поэтому $\cos(\arcsin x) = +\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$ и $\sin(\arccos x) = +\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$, следовательно, исходное выражение принимает вид $\arcsin\sqrt{1 - x^2} + \arccos\sqrt{1 - x^2}$. Сложим почленно для $-1 \leqslant a \leqslant 1$ неравенства

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arcsin a \leqslant \dfrac{\pi}{2}\ , \\ 0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi\ , \end{cases} \Rightarrow\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin a + \arccos a \leqslant \frac{3\pi}{2}\ ,$$ при этом

эти неравенства обращались бы в равенства соответственно при условиях

$$\begin{cases} \arcsin a = -\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow a = -1\ , \\ \arccos a = 0 \Leftrightarrow a = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \arcsin a = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow a = 1\ , \\ \arccos a = \pi \Leftrightarrow a = -1\ , \end{cases}$$

теперь видно, что оба этих варианта невозможны, следовательно

$$\forall a \in [\,-1\ ,\ 1\,] \ \Rightarrow\ -\frac{\pi}{2} < \arcsin a + \arccos a < \frac{3\pi}{2}\ ,$$

так как $\cos(\arcsin a + \arccos a) = \cos(\arcsin a)\cdot\cos(\arccos a) -$ $- \sin(\arcsin a)\cdot\sin(\arccos a) = \sqrt{1 - a^2}\cdot a - a\cdot\sqrt{1 - a^2} = 0$, то получаем, что $\forall a \in [\,-1\ ,\ 1\,] \ \Rightarrow\ \arcsin a + \arccos a = \dfrac{\pi}{2}$, а потому окончательно исходное выражение, равное

$$\arcsin\sqrt{1-x^2}+\arccos\sqrt{1-x^2}=\frac{\pi}{2}\,.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}$.

---

67. (ф-т ВМиК) Дан отрезок длины $\sqrt{5}$. Построить отрезок длины 2.

Решение

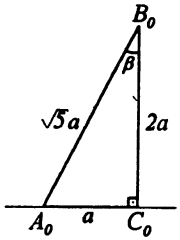


рис. 29 а)

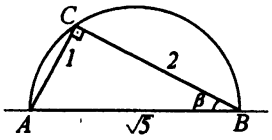


рис. 29 б)

Построение отрезка можно провести, используя метод подобия, учитывая, что $1^2+2^2=(\sqrt{5})^2$. Выберем произвольный отрезок (допустим, что его длина равна a) , под прямым углом к нему из одного из его концов строим отрезок длины $2a$, затем, соединяя другие концы построенных отрезков, на основе теоремы Пифагора получим, что длина полученного третьего отрезка будет равна $\sqrt{5}a$ (см. на рис. 29 а) $\triangle A_0B_0C_0$). Очевидно, что полученный прямоугольный треугольник $A_0B_0C_0$ подобен прямоугольному треугольнику ABC с гипотенузой длины $\sqrt{5}$. Взяв заданный отрезок длины $\sqrt{5}$, построив на нем как на диаметре окружность, а затем, откладывая под углом, равным углу между сторонами треугольника $A_0B_0C_0$ с длинами $2a$ и $\sqrt{5}a$, ($\widehat{ABC}=\widehat{A_0B_0C_0}$) отрезок с концами один в конце диаметра, другой на полуокружности (отрезок BC), соединяя также эту точку (точку C) с другим концом диаметра (точкой A), получим прямоугольный треугольник, длины катетов которого равны 2 и 1
(см. рис. 29 б). Искомый отрезок — отрезок BC .

Обращаем внимание читателей на то, что в журнале "Математика в школе", N 1, стр.48—49 за 1994 г. опубликованы примеры задач, предлагавшихся на устном экзамене на факультете ВМиК в 1993 г.

3.2. Задачи для самостоятельного решения

1. (ф-т ВМиК) Имеет ли смысл выражение

а) $\sqrt{\log_2 3 - \log_5 11}$; б) $\arcsin\left(\sqrt{32}\sin\frac{\pi}{11}\right)$?

2. (ф-т ВМиК) Получить десятичное приближение числа a с точностью 0,05, где

а) $a = \frac{1}{\sqrt{3}-2}\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right)$; б) $\sqrt{32}\cos 5^\circ \cos 55^\circ \cos 65^\circ$.

3. (ф-т ВМиК) Расположить в порядке возрастания числа:

а) $\log_9 10$; $\frac{6}{5}$; $\lg 11$; б) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{5}}$; $\frac{1}{\sqrt[12]{6}}$; $\sqrt[15]{0,1}$.

4. (ф-т ВМиК) Указать хотя бы одно рациональное число a такое, что

а) $\left|\frac{10}{\sqrt{18}-\sqrt{17}} - a\right| < 0,1$; б) $|(\sqrt{3})^{\sqrt{2}} - a| < 1$.

5. (ф-т ВМиК) При всех значениях $\beta \neq \pi k/2$, $(k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots)$ доказать неравенство

$$\frac{3(1+\cos^2 2\beta)}{\sin^2 2\beta} - \frac{8}{\sin 2\beta} + 5 \geqslant 0 .$$

6. (ф-т ВМиК) Определить, в какой четверти координатной плоскости находится точка пересечения графиков функций:

а) $y = x\sin 226^\circ - \log_2 3$ и $y = x\cos 137^\circ - \frac{3}{2}$;

б) $y = x\sin\frac{5\pi}{12} + 5^{\frac{1}{7}}$ и $y = \frac{9x}{10} + 2^{\frac{1}{3}}$.

7. (ф-т ВМиК) В трапеции $KLMN$ точка Q принадлежит боковой стороне MN, $\overrightarrow{QM} = 2\overrightarrow{NQ}$, P — точка пересечения диагонали KM и отрезка LQ, $\overrightarrow{KP} = 2\overrightarrow{PM}$. Найти такие числа α и β, чтобы имело место векторное равенство

$$\overrightarrow{PN} = \alpha\overrightarrow{LM} + \beta\overrightarrow{KM} .$$

8. (ф-т ВМиК) В трапеции $ABCD$ точка E принадлежит стороне AB, $\overrightarrow{EA} = 3\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD}$ F — точка пересечения отрезков AC и DE. Найти такие числа α и β, чтобы имело место векторное равенство

$$\overrightarrow{BF} = \alpha\overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{BC} .$$

9. (ф-т ВМиК) В треугольной пирамиде $ABCD$, объем которой равен 6, медианы граней ABC, ABD, ADC пересекаются соответственно в точках G, E, F. Длина высоты пирамиды, опущенной из вершины A, равна 2. Найти площадь треугольника EFG .

10. (ф-т ВМиК) В треугольной пирамиде $ABCD$ медианы граней ABC, ADC, ADB пересекаются соответственно в точках G, E, F. Объем пирамиды равен 2, а площадь треугольника EFG равна 1. Найти длину ее высоты, опущенной из вершины A .

11. (ф-т ВМиК) В выпуклом четырехугольнике $MNPQ$ с диагоналями MP и NQ на стороны PQ и MN опущены соответственно высоты MK и QL. Известно, что $|MK| \geqslant |NQ|$, $|QL| \geqslant |MP|$, $|MQ| = 4$. Найти радиус окружности, описанной около четырехугольника $MNPQ$.

12. (ф-т ВМиК) В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ с диагоналями LN и KM на стороны MN и KL опущены соответственно высоты KP и NQ. Известно, что $|KP| \geqslant |LN|$, $|NQ| \geqslant |KM|$, $|KL| = 3$, $|KN| = 5$. Найти $|KM|$.

13. (геолог. ф-т) В остроугольном треугольнике длины двух его сторон соответственно равны 4 и 6, а его площадь равна $6\sqrt{3}$. Найти длину третьей стороны.

14. (геолог. ф-т) Определить величины углов ромба, если его площадь равна 8, а площадь вписанного в него круга равна π .

15. (геолог. ф-т) В треугольнике известны длины двух его сторон 6 и 3. Полусумма длин высот, опущенных на эти стороны, равна длине третьей высоты. Найти длину его третьей стороны.

16. (геолог. ф-т) Построить графики функций:

а) $y = ||x| - 2|$; б) $y = x^2 + 7|x| + 10$; в) $y = 3^{\log_{\sqrt{3}}(x-2)}$;

г) $y = \dfrac{1}{|x| - 1}$; д) $y = 1 - \sqrt{|x|}$; е) $y = 3\cos 2x$.

17. (геолог. ф-т) Сравнить числа 3^{500} и 4^{400} .

18. (геолог. ф-т) Решить уравнение

$$\frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} = x + 1 .$$

19. (геолог. ф-т) Решить уравнение

$$2\cos^2 x - \sin^2 x - 1 = 0 .$$

20. (геолог. ф-т) Решить уравнения:

а) $\lg(\arccos x) = 0$; б) $\arccos(\pi \log_3 \operatorname{tg} x) = 0$.

21. (геолог. ф-т) На координатной плоскости указать множество точек $\{M(x;y)\}$, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} y \leqslant 2x , \\ 2y - x \geqslant 0 , \\ xy \leqslant 2 . \end{cases}$$

22. Построить треугольник по заданным периметру и двум углам.

23. (геолог. ф-т) Доказать, что в прямоугольном треугольнике длины всех его не могут быть нечетными числами.

24. (ф-т ВМиК) Построить треугольник по заданной стороне, противолежащему ей углу и проведенной к ней медиане.

25. (геолог. ф-т) Построить треугольник по двум углам и

а) высоте, проведенной из третьего угла ; б) медиане, проведенной из третьего угла.

26. (ф-т ВМиК) Доказать, что $\forall n \in N \quad (8^{2n-1} - 1) \vdots 7$.

27. (ф-т ВМиК) Дан параллелограмм $ABCD$. На его сторонах BC , AD , AB , CD соответственно выбраны точки E , H , F , G так, что $|BE| : |EC| = 4 : 5$, $|AH| : |HD| = 8 : 3$, $|AF| : |FB| = 1 : 3$, $|CG| : |GD| = 2 : 7$. На сколько процентов площадь треугольника BFE больше площади треугольника GDH ? На сколько процентов площадь треугольника GDH меньше площади треугольника BFE ?

28. (ф-т ВМиК и геолог. ф-т) Дан пространственный четырехугольник $ABCD$ (т.е. не все 4 его вершины расположены в одной плоскости). Середины его сторон соединены отрезками. Какая фигура при этом получается ?

29. (ф-т ВМиК) Является ли функция $f(x) = (2+\sqrt{5})^{\frac{1}{x}} + (\sqrt{5}-2)^{\frac{1}{x}}$ четной, нечетной или ни той, ни другой ?

30. (ф-т ВМиК) Решить уравнение $\sin^5 x + \cos^{11} x = -1$.

31. (ф-т ВМиК) Вычислить $\cos\left(\arcsin\dfrac{5}{13} + \arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$.

32. (ф-т ВМиК) Определить первые 4 знака после запятой у числа $\sqrt[7]{0,9999}$.

33. (ф-т ВМиК) Доказать, что для любых четырех положительных действительных чисел a, b, c, d выполняется нерввенство

$$(a+b+c+d)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\geqslant 16$$

и указать в каком случае выполняется равенство.

34. (ф-т ВМиК) Пусть x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $x^2+px-q=0$. Найти $x_1^4+x_2^4$, не вычисляя этих корней.

35. (геолог. ф-т) Решить уравнение $\cos^2(\pi x)-\sqrt{x^2-5x+4}=1$.

36. (геолог. ф-т) Доказать, что $\forall n\in N \quad (n^3+3n^2+2n)\vdots 6$.

37. (геолог. ф-т) Решить неравенство $\log_{\frac{1}{4}}(\log_7 x)\geqslant 0$.

38. (ф-т ВМиК и геолог. ф-т) В треугольнике ABC известны длины сторон $|BC|=a$, $|AC|=b$ и величина угла между ними $\widehat{ACB}=\gamma$. Вывести формулу длины биссектрисы угла ACB этого треугольника.

39. (ф-т ВМиК) В треугольнике ABC заданы длины двух его сторон a и b. Доказать, что для его площади S справедливо неравенство

$$S\leqslant\frac{a^2+b^2}{4}.$$

В каком случае это неравенство обращается в равенство ?

40. (геолог. ф-т) На координатной плоскости изобразить множество точек $\{M\}$, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют условиям:

а) $|y-1|+|x+3|=2$; б) $|x-4|+|y+2|=3$.

41. (геолог. ф-т) Радиусы описанной около прямоугольного треугольника и вписанной в этот прямоугольный треугольник окружностей соответственно равны R и r. Найти периметр этого треугольника.

42. (геолог. ф-т) В трапеции $ABCD$ с острыми углами при основании AD проведена диагональ AC, которая разбивает его на два подобных треугольника. Длина основания AD равна a, а длина основания BC равна b. Вычислить длину диагонали AC.

43. (геолог. ф-т) Стороны треугольника образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Что больше знаменатель q этой прогрессии или число 2 ?

44. (геолог. ф-т) Найти область определения функции

$$y=\sqrt{\log_7(\cos 2x)}.$$

45. (геолог. ф-т) Решить неравенства:

а) $\log_{1-3x^2}(2x^2)>1$; б) $\log_{1-3x^2}(2x^2)<1$.

46. (геолог. ф-т) Вычислить:

а) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$; б) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)\right)$.

47. (геолог. ф-т) Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). Найти радиус вписанной в него окружности, если

а) длины сторон AB и AC соответственно равны c и b;

б) длина стороны AC равна b, величина угла $\angle ACB$ равна α.

48. (геолог. ф-т) Доказать тождество $\pi - \arcsin\frac{4}{5} = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$.

49. (геолог. ф-т) Решить уравнения:

а) $\frac{\sin x}{100x - 314} = 0$; б) $\frac{\sin x}{\log_{1998}(100x - 313)} = 0$.

50. (геолог. ф-т) Решить уравнение $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots x^{1998} = 0$.

51. (геолог. ф-т) Решить уравнение $3^{-2^x} = 2^{-1}$.

52. (геолог. ф-т) Решить уравнение

$$(\sin x) \cdot (1 + \cos x) = 1 + \cos x + \sin^2 x .$$

53. (геолог. ф-т) Образуют ли числа $(\log_3 2)^{-1}$; $(\log_6 2)^{-1}$; $(\log_{12} 2)^{-1}$ арифметическую прогрессию?

54. (ф-т ВМиК) Медианы, проведенные к сторонам треугольника взаимно перпендикулярны. Найти наибольшее возможное значение величины угла треугольника между этими сторонами.

55. (ф-т ВМиК) Известно, что натуральные числа p, $p + 10$ и $p + 14$ являются простыми. Найти все такие числа p.

56. (ф-т ВМиК) Длина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC равна 34, а длина катета BC равна 16. Найти длину перпендикуляра, восставленного из середины гипотенузы до пересечения с катетом AC.

57. (ф-т ВМиК) Имеет ли уравнение $5x^2 - 6y^2 = 8$ целочисленные решения?

58. (ф-т ВМиК) Доказать, иррациональность чисел:

а) $\sqrt{7} - \sqrt{3}$; б) $\sqrt[3]{2}$; в) $\sqrt[4]{5}$.

59. (ф-т ВМиК) В треугольнике ABC на сторонах AB и BC соответственно взяты точки E и D так, что $|AE| : |EB| = 1 : 3$ и $|BD| : |BC| = 2 : 7$. Пусть K — точка пересечения AD и CE. Найти отношение $|AK| : |KD|$.

60. (ф-т ВМиК) Равны ли два треугольника, если они имеют по три равных угла и по две равные стороны?

3.3. Ответы и указания

1. а) имеет; б) не имеет .

2. а) $a \approx \tilde{a}$ $\forall \tilde{a} \in [1,85\ ,\ 1,9]$; б) $a \approx \tilde{a}$ $\forall \tilde{a} \in [1,35\ ,\ 1,4]$.

3. а) $\lg 11$, $\log_9 10$, $6/5$; б) $(1/\sqrt{5})^{\frac{1}{5}}$, $\sqrt[15]{0,1}$, $1/\sqrt[12]{6}$.

4. а) $a = 83,7$; б) $a = 2$.

5. Указание: положить $t = \sin 2\beta$ и преобразовать левую часть неравенства к выражению, зависящему от t .

6. а) в IV четверти; б) в I четверти.

7. $\alpha = 3/2$, $\beta = -2/3$. 8. $\alpha = -7/10$, $\beta = 1$.

9. 1 . 10. $2/3$. 11. 2 . 12. 4 .

13. $2\sqrt{7}$. 14. $30°$; $150°$. 15. 4 .

16. Указания: а) и б) — воспользоваться четностью функции;

в) преобразовать функцию с учетом ее области определения и свойств логарифмов;

г) и д) — учесть четности функций;

е) применить теоремы о сжатии (растяжении) графиков применительно к графику функции $y = \cos x$.

17. $4^{400} > 3^{500}$. 18. $x = 4$. 19. $x = \pm \arccos \sqrt{2/3} + \pi n$, $n = 0\ ;\ \pm 1\ ;\ \pm 2\ ;\ \ldots$.

20. а) $\cos 1$; б) $\operatorname{arctg} 3^{\frac{1}{\pi}} + \pi n$, $n = 0\ ;\ \pm 1\ ;\ \pm 2\ ;\ \ldots$.

21. Указание. Искомое множество точек включает в себя начало координат и содержится в первой координатной четверти.

22. Указание. Свести задачу к задаче на построение треугольника по стороне и двум прилежащим ей углам и воспользоваться свойствами серединного перпендикуляра к отрезку и внешнего угла треугольника.

23. Указание. Воспользоваться теоремой Пифагора и тем, что сумма двух нечетных чисел — четное число, а произведение двух нечетных чисел — нечетное число.

24. Указание. Использовать задачу на построение Г.М.Т. плоскости, из которых данный отрезок виден под данным углом.

25. Указание к а) и б): см. решение задачи 21, разобранной в тексте.

26. Указание. Воспользоваться формулой суммы $2n-1$ первых членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$ со знаменателем $q = 8$ и первым членом $b_1 = 1$.

27. Больше на $(400/7)\%$; меньше на $(400/11)\%$.

28. Параллелограмм. Указание: воспользоваться свойствами средней линии треугольника.

29. Четная функция.

30. $-\pi/2 + 2\pi n$; $\pi + 2\pi n$, $n = 0\ ;\ \pm 1\ ;\ \pm 2\ ;\ \ldots$.

31. $-(12+5\sqrt{3})/26$.

32. Все знаки девятки. Указание: $0,9999 < \sqrt[7]{0.9999} < 1$.

33. Указание: задача решается аналогично задаче 31 п. 3.1,

$$a = b = c = d \ .$$

34. $(p^2+2q)^2 - 2q^2$, $p^2 + 4q \geqslant 0$. Указание: применить операцию выделения полного квадрата выражения $x_1^2 + x_2^2$ и затем теорему Виета.

35. 1 ; 4 .

36. Указание: разложить выражение на множители и далее применить аналогичные рассуждения, что и в задаче 36 п. 3.1.

37. $(1\ ,\ 7\ ]$.

38. $\dfrac{2ab\cos\dfrac{\gamma}{2}}{a+b}$.

Указание. Пусть CD биссектриса, длина которой определяется, тогда, применяя формулу площади треугольника по длинам двух сторон и синусу угла между ними, получить эту формулу из равенства

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD} \ .$$

39. Указание. Применить формулу площади треугольника по заданным длинам двух сторон и синусу угла между ними, затем оценить этот синус сверху максимальным значением и применить неравенство

$$2ab \leqslant a^2 + b^2 \ .$$

Равенство выполняется в случае, когда стороны, длины которых заданы являются катетами равнобедренного прямоугольного треугольника.

40. а) стороны четырехугольника $ABCD$, где

$$A(-5;1)\ ,\ B(-3;3)\ ,\ C(-1;1)\ ,\ D(-3;-1)\ ;$$

б) стороны четырехугольника $ABCD$, где

$$A(1;-2)\ ,\ B(4;1)\ ,\ C(7;-2)\ ,\ D(4;-5)\ .$$

41. $P = 2(r+2R)$.

42. $|AC| = \sqrt{ab}$. Указание: установить следующие равенства углов $\angle ABC = \angle ACD$ и $\angle BAC = \angle CDA$.

43. $2 > q$. Указание: пусть a — длина наименьшей стороны треугольника, воспользоваться неравенством треугольника

$$aq^2 < a + aq \ .$$

44. πn , $n = 0\ ;\ \pm 1\ ;\ \pm 2\ ;\ \ldots$.

45. а) $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\,,\,0\right)\cup\left(0\,,\,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$; б) $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\,-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\,,\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

46. а) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$; б) $-\frac{1}{4\sqrt{3}}$.

47. а) $\frac{b}{2}\sqrt{\frac{2c-b}{2c+b}}$; б) $\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

48. Указание: вычислить косинус от обеих частей данного равенства.

49. а) πn , $n=0$; ±1 ; ±2 ; ... ; б) πn , $n=1$; 2 ; ... .

50. $\varnothing$.

51. $\log_2\log_3 2$.

52. $\pi+2\pi n$, $n=0$; ±1 ; ±2 ; ... .

53. Образуют.

54. $\arccos\frac{4}{5}$. Указание: задачу можно решать векторным методом, применяя свойства линейных операций над векторами и свойства скалярного произведения векторов.

55. 3 .

56. $\frac{136}{15}$.

57. Не имеет. Указание: применить аналогичные рассуждения, что и при решении задачи 5 п. 3.1.11, раздел III, стр. 119.

58. Указание: доказывать от противного, сводя в случае а) к доказательству иррациональности числа $\sqrt{21}$, затем надо предположить, что число $\sqrt{21}$ может быть представлено в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где $m, n \in N$; подобным образом доказывается иррациональность чисел в случаях б) и в).

59. $\frac{7}{15}$.

60. Нет. Указание: рассмотреть треугольники с длинами сторон 1, p, p^2 и p, p^2, p^3, они подобны; выяснить, при каких p эти треугольники не равны.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3

РАЗДЕЛ I 5

1. ПРОГРАММА ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В МГУ им. М.В. ЛОМОНОСОВА 5

1.1. Основные понятия 6

1.2. Содержание теоретической части устного экзамена 7

1.2.1. Алгебра 7
1.2.2. Геометрия 8

1.3. Требования к поступающему 9

2. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ТЕОРЕМЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ 10

2.1. Используемые обозначения 10

2.1.1. Алгебра и некоторые формулы векторной алгебры 10
2.1.2. Тригонометрия 16
2.1.3. Геометрия 17

2.2. Формулы и факты элементарной математики 19

2.2.1. Алгебра 19
2.2.2. Геометрия 25
2.2.3. Тригонометрия 32

РАЗДЕЛ II 40

1. КАК ГОТОВИТЬСЯ К ВСТУПИТЕЛЬНЫМ ЭКЗАМЕНАМ ПО МАТЕМАТИКЕ 40

1.1. О ПОРЯДКЕ ПРОВЕДЕНИЯ ПИСЬМЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ И О МАТЕРИАЛАХ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К НЕМУ 40

1.2. О ПОРЯДКЕ ПРОВЕДЕНИЯ УСТНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ И О МАТЕРИАЛАХ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К НЕМУ 44

РАЗДЕЛ III 47

1. О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ИЗЛОЖЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ И ПРОВЕДЕНИЯ ПИСЬМЕННЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ В 1993 — 2000 ГОДАХ 47

2. ХАРАКТЕРНЫЕ ОШИБКИ, ДОПУЩЕННЫЕ АБИТУРИЕНТАМИ НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ ПО МАТЕМАТИКЕ (ПИСЬМЕННО) В МГУ НА ФАКУЛЬТЕТЫ ВМиК, ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ, ЭКОНОМИЧЕСКИЙ, ИСАА и ВЫЕЗДНЫХ ЭКЗАМЕНАХ 48

2.1. Общие замечания об ошибках, допущенных абитуриентами в 1993 — 2000 годах. 48

2.2. Ошибки, допущенные абитуриентами на вступительных письменных экзаменах по математике в 1993 г. 50

2.3. Ошибки, допущенные абитуриентами на вступительных письменных экзаменах по математике в 1994 г. 52

2.3.1. Факультет ВМиК 52
2.3.2. Экономический факультет 53
2.3.3. Геологический факультет пробный экзамен (май) 54
2.3.4. Геологический факультет основной экзамен (июль) 55
2.3.5. ИСАА 56

2.4. Ошибки, допущенные абитуриентами на вступительных письменных экзаменах по математике в 1995 г. 57

2.4.1. Факультет ВМиК пробный экзамен (апрель) 57
2.4.2. Факультет ВМиК основной экзамен (июль) 58
2.4.3. Экономический факультет, отделение экономики 59
2.4.4. Экономический факультет, отделение менеджмента 59
2.4.5. Геологический факультет пробный экзамен (май) 60
2.4.6. Геологический факультет основной экзамен (июль) 62
2.4.7. ИСАА 63
2.4.8. Выездные экзамены 64

2.5. Ошибки, допущенные абитуриентами на вступительных письменных экзаменах по математике в 1996 г. 65

2.5.1. Факультет ВМиК пробный экзамен (апрель) 65
2.5.2. Факультет ВМиК основной экзамен (июль) 66
2.5.3. Экономический факультет, отделение экономики 66
2.5.4. Экономический факультет, отделение менеджмента 67

2.5.5. Геологический факультет пробный экзамен (май) 68
2.5.6. Геологический факультет основной экзамен (июль) 69
2.5.7. ИСАА 70
2.5.8. Выездные экзамены 71

3. ПРИМЕРЫ ВАРИАНТОВ, ПРЕДЛАГАВШИХСЯ НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ НА ФАКУЛЬТЕТАХ ВМиК, ЭКОНОМИЧЕСКОМ, ГЕОЛОГИЧЕСКОМ и ИСАА в 1993 — 1996 годах 73

3.1. Факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ (ВМиК) 73

3.1.1. Вариант с решениями задач 1993 г. 73
3.1.2. Вариант для самостоятельного решения 78
3.1.3. Вариант с решениями задач 1994 г. (май) 79
3.1.4. Вариант для самостоятельного решения 83
3.1.5. Вариант с решениями задач 1994 г. (июль) 84
3.1.6. Вариант для самостоятельного решения 88
3.1.7. Вариант с решениями задач 1995 г. (апрель) 89
3.1.8. Вариант для самостоятельного решения 102
3.1.9. Вариант с решениями задач 1995 г. (июль) 103
3.1.10. Вариант для самостоятельного решения 115
3.1.11. Вариант с решениями задач 1996 г. (апрель) 116
3.1.12. Вариант для самостоятельного решения 123
3.1.13. Вариант с решениями задач 1996 г. (июль) 124
3.1.14. Вариант для самостоятельного решения 133

3.2. Экономический факультет МГУ 134

3.2.1. Вариант с решениями задач 1993 г. 134
3.2.2. Вариант для самостоятельного решения 138
3.2.3. Вариант с решениями задач 1994 г. 139
3.2.4. Вариант для самостоятельного решения 144
3.2.5. Вариант с решениями задач (отделение экономики) 1995 г. . 145
3.2.6. Вариант для самостоятельного решения 149
3.2.7. Вариант с решениями задач (отделение менеджмента) 1995 г. 150
3.2.8. Вариант для самостоятельного решения 152
3.2.9. Вариант с решениями задач (отделение экономики) 1996 г. . 153
3.2.10. Вариант для самостоятельного решения 159
3.2.11. Вариант с решениями задач (отделение менеджмента) 1996 г. 160
3.2.12. Вариант для самостоятельного решения 163

3.3. Геологический факультет МГУ 164

3.3.1. Вариант с решениями задач 1993 г. 164
3.3.2. Вариант для самостоятельного решения 169
3.3.3. Вариант с решениями задач 1994 г. (май) 170
3.3.4. Вариант для самостоятельного решения 174
3.3.5. Вариант с решениями задач 1994 г. (июль) 175
3.3.6. Вариант для самостоятельного решения 182
3.3.7. Вариант с решениями задач 1995 г. (май) 184
3.3.8. Вариант для самостоятельного решения 192
3.3.9. Вариант с решениями задач 1995 г. (июль) 193
3.3.10. Вариант для самостоятельного решения 198
3.3.11. Вариант с решениями задач 1996 г. (май) 199
3.3.12. Вариант для самостоятельного решения 205
3.3.13. Вариант с решениями задач 1996 г. (июль) 206
3.3.14. Вариант для самостоятельного решения 211

3.4. Институт стран Азии и Африки МГУ (ИСАА)
(социально-экономическое отделение) 212

3.4.1. Вариант с решениями задач 1993 г. 212
3.4.2. Вариант для самостоятельного решения 215
3.4.3. Вариант с решениями задач 1994 г. 216
3.4.4. Вариант для самостоятельного решения 219
3.4.5. Вариант с решениями задач 1995 г. 220
3.4.6. Вариант для самостоятельного решения 224
3.4.7. Вариант с решениями задач 1996 г. 225
3.4.8. Вариант для самостоятельного решения 230

3.5. Варианты выездных письменных экзаменов по математике,
проводившихся в Обнинске, Якутске, Надыме, Элисте, Пангоды,
Нефтекамске, Магнитогорске, Челябинске, Архангельске, Мурманске,
Саяногорске, Петропавловске-Камчатском в 1995 и 1996 годах . . . 231

3.5.1. Вариант для самостоятельного решения (Обнинск) 231
3.5.2. Вариант для самостоятельного решения (Якутск) 232
3.5.3. Вариант для самостоятельного решения (Надым, Элиста) . . 233
3.5.4. Вариант для самостоятельного решения (Пангоды) 234
3.5.5. Вариант для самостоятельного решения (Надым, Саяногорск,
Нефтекамск, Мурманск) 235
3.5.6. Вариант для самостоятельного решения
(Элиста, Архангельск) 236

3.5.7. Вариант для самостоятельного решения (Магнитогорск, Петроповловск-Камчатский) . . . 237
3.5.8. Вариант для самостоятельного решения (Челябинск) . . . 238

3.6. Ответы . . . 239

Ответы к варианту 3.1.2. . . . 239
Ответы к варианту 3.1.4. . . . 239
Ответы к варианту 3.1.6. . . . 239
Ответы к варианту 3.1.8. . . . 239
Ответы к варианту 3.1.10. . . . 240
Ответы к варианту 3.1.12. . . . 240
Ответы к варианту 3.1.14. . . . 240

Ответы к варианту 3.2.2. . . . 240
Ответы к варианту 3.2.4. . . . 241
Ответы к варианту 3.2.6. . . . 241
Ответы к варианту 3.2.8. . . . 241
Ответы к варианту 3.2.10. . . . 241
Ответы к варианту 3.2.12. . . . 241

Ответы к варианту 3.3.2. . . . 242
Ответы к варианту 3.3.4. . . . 242
Ответы к варианту 3.3.6. . . . 242
Ответы к варианту 3.3.8. . . . 242
Ответы к варианту 3.3.10. . . . 243
Ответы к варианту 3.3.12. . . . 243
Ответы к варианту 3.3.14. . . . 243

Ответы к варианту 3.4.2. . . . 243
Ответы к варианту 3.4.4. . . . 244
Ответы к варианту 3.4.6. . . . 244
Ответы к варианту 3.4.8. . . . 244

Ответы к варианту 3.5.1. . . . 244
Ответы к варианту 3.5.2. . . . 245
Ответы к варианту 3.5.3. . . . 245
Ответы к варианту 3.5.4. . . . 245
Ответы к варианту 3.5.5. . . . 246
Ответы к варианту 3.5.6. . . . 246
Ответы к варианту 3.5.7. . . . 246
Ответы к варианту 3.5.8. . . . 247

РАЗДЕЛ IV 248

1. О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ИЗЛОЖЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ УСТНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ 248

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ К ОТВЕТАМ НА ВОПРОСЫ БИЛЕТОВ УСТНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ 249

ЛИТЕРАТУРА 249

2.0. Вводная часть 250
2.0.1. План исследования свойств функции $y = f(x)$ 250
2.0.2. Определения 250
2.0.3. О материале, который поступающие могут использовать на экзаменах без доказательств 252

2.1. Алгебра 260

Вопрос 1. Формулы сокращенного умножения. 260
Вопрос 2. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10. 260
Вопрос 3. Свойства числовых неравенств. 263
Дополнительный материал к вопросу 3 266
Вопрос 4. Свойства линейной функции и ее график. 270
Вопрос 5. Формула корней квадратного уравнения. Теорема Виета. 277
Вопрос 6. Теорема Виета. Теорема о разложении квадратного трехчлена на линейные множители. 279
Вопрос 7. Свойства квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ и ее график. 280
Вопрос 8. Свойства степеней с натуральными и целыми показателями. 282
Вопрос 9. Свойства арифметических корней n - ой степени. Свойства степеней с рациональными показателями. 285
Вопрос 10. Неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел. Неравенство для суммы двух взаимно обратных чисел. 289
Вопрос 11. Формулы общего члена и суммы n первых членов арифметической прогрессии. 290
Вопрос 12. Формулы общего члена и суммы n первых членов геометрической прогрессии. 291
Вопрос 13. Основное логарифмическое тождество. Логарифмы произведения, степени, частного. Формула перехода к новому основанию. 292

Вопрос 14. Свойства показательной функции и ее график. 294
Вопрос 15. Свойства логарифмической функции и ее график. . . . 297
Вопрос 16. Свойства степенной функции с целым показателем и ее график. 298
О методе математической индукции (дополнение к вопросам 11 и 12) 301

2.2. Тригонометрия 303

Вопрос 1. Основное тригонометрическое тождество. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. 311
Вопрос 2. Формулы сложения:
$\cos(\alpha \pm \beta)$, $\sin(\alpha \pm \beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$, $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta)$. 313
Вопрос 3. Формулы суммы и разности тригонометрических функций:
$\sin\alpha \pm \sin\beta$, $\cos\alpha \pm \cos\beta$, $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta$.
Преобразование в сумму произведений:
$\cos\alpha\cos\beta$, $\sin\alpha\sin\beta$, $\sin\alpha\cos\beta$. 316
Вопрос 4. Формулы двойного и половинного аргументов тригонометрических функций. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента. Формулы приведения. 317
Вопрос 5. Свойства тригонометрической функции $y = \sin x$ и ее график. Решение простейшего тригонометрического уравнения $\sin x = a$. . 322
Вопрос 6. Свойства тригонометрической функции $y = \cos x$ и ее график. Решение простейшего тригонометрического уравнения $\cos x = a$. . 323
Вопрос 7. Свойства тригонометрической функции $y = \operatorname{tg} x$ и ее график Решение простейшего тригонометрического уравнения $\operatorname{tg} x = a$. . . 323
Вопрос 8. Свойства тригонометрической функции $y = \operatorname{ctg} x$ и ее график Решение простейшего тригонометрического уравнения $\operatorname{ctg} x = a$. . . 324
Вопрос 9. Преобразование выражения $a\sin x + b\cos x$ с помощью вспомогательного аргумента. 324
Свойства тригонометрических функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ и их графики 326
Свойства тригонометрических функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ и их графики 331

2.3. Геометрия 337
2.3.0. Вводная часть. Об используемой системе основных (первичных) понятий и аксиом; об утверждениях геометрии, которые можно использовать на экзаменах без доказательств; о понятиях луча, отрезка, угла и их свойствах и измерениях. 338
I. Аксиомы принадлежности. 340
II. Аксиомы порядка. 342
III. Аксиомы наложения. 363
IV. Аксиомы непрерывности. 375
V. Аксиома параллельности прямых. 386
VI. О движении в геометрии и его видах. 386
VII. О требованиях, предъявляемых к системе аксиом. 388
2.3.1. Основная часть. Ответы на вопросы по геометрии. 389
Вопрос 1. Признаки равенства треугольников. 389
Вводная часть 389
Основная часть 392
Дополнительная часть 397
Вопрос 2. Свойства вертикальных и смежных углов. Теорема о внешнем угле треугольника. 397
Вводная часть 397
Основная часть 399
Дополнительная часть 402
Вопрос 3. Свойства равнобедренного треугольника. 404
Вводная часть 404
Основная часть 405
Дополнительная часть 406
Вопрос 4. Свойство серединного перпендикуляра к отрезку. Свойство биссектрисы угла. 410
Вводная часть 410
Основная часть 412
Дополнительная часть 414
Вопрос 5. Теоремы о параллельных прямых на плоскости. 417
Основная часть 417
Дополнительная часть 421
Вопрос 6. Теорема о сумме внутренних углов треугольника. Теорема о внешнем угле треугольника. Теорема о сумме внутренних углов выпуклого многоугольника. 421
Вводная часть 421
Основная часть 422

Дополнительная часть 426
О внутренней и внешней областях простого многоугольника. . . . 428
Вопрос 7. Признаки параллелограмма. Свойства параллелограмма. 429
Вводная часть 429
Основная часть 433
Дополнительная часть 436
Вопрос 8. Теорема Фалеса. Признаки подобия треугольников. . . . 440
Вводная часть 440
Основная часть 447
Дополнительная часть 452
Вопрос 9. Признаки равенства и подобия прямоугольных треугольников. Теорема Пифагора. 454
Вводная часть 454
Основная часть 458
Дополнительная часть 462
О тригонометрических функциях величины угла треугольника. . . 462
Вопрос 10. Пропорциональность отрезков в прямоугольном треугольника. Теорема Пифагора. 466
Вводная часть 466
Основная часть 466
Дополнительная часть 468
Вопрос 11. Свойство отрезков, на которые биссектриса треугольника делит противоположную сторону. 469
Основная часть 469
Дополнительная часть 470
Вопрос 12. Свойства средней линии треугольника. Свойства средней линии трапеции. 472
Вводная часть 472
Основная часть 474
Вопрос 13. Теорема косинусов для треугольника. 476
Основная часть 476
Дополнительная часть 478
Вопрос 14. Теоремы о пересечении медиан, пересечении биссектрис и пересечении высот треугольника. 479
Вводная часть 479
Основная часть 483
Дополнительная часть 485
Вопрос 15. Формула для вычисления расстояния между двумя точками на координатной плоскости. Уравнение окружности. . . . 488

Вводная часть 488
Основная часть 492
Дополнительная часть 495
О координатных полуосях, полуплоскостях и четвертях. 497
Об окружности и круге, их элементах и свойствах 499
Вопрос 16. Теоремы о вписанных углах.
Теорема об угле, образованном касательной и хордой.
Свойство четырехугольника, вписанного в окружность. 523
Вводная часть 523
Основная часть 524
Дополнительная часть 531
Вопрос 17. Теоремы об угле между двумя пересекающимися хордами и об угле между двумя секущими, выходящими из одной точки. . . . 536
Вводная часть 536
Основная часть 536
Дополнительная часть 538
Вопрос 18. Равенство произведений длин отрезков двух пересекающихся хорд. Равенство квадрата длины отрезка касательной произведению длины отрезка секущей на длину ее внешней части. 542
Вводная часть 542
Основная часть 542
Дополнительная часть 544
Вопрос 19. Теорема об окружности, описанной около треугольника. 545
Вводная часть 545
Основная часть 545
Дополнительная часть 546
Вопрос 20. Теорема синусов для треугольника. 548
Вводная часть 548
Основная часть 548
Дополнительная часть 550
Вопрос 21. Свойство касательной к окружности.
Равенство касательных, проведенных из одной точки к окружности.
Свойство четырехугольника, описанного около окружности. 551
Основная часть 551
Дополнительная часть 555
О взаимном расположении двух окружностей на плоскости 561
Вопрос 22. Теорема об окружности, вписанной в треугольник. . . . 570
Вводная часть 570
Основная часть 570
Дополнительная часть 572

Вопрос 23. Теоремы о параллельных прямых в пространстве. Признак параллельности прямой и плоскости. Признак параллельности плоскостей. 572
Вводная часть 572
Основная часть 574
Дополнительная часть 578
Вопрос 24. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Теорема об общем перпендикуляре к двум скрещивающимся прямым. . . . 581
Вводная часть 581
Основная часть 584
Дополнительная часть 588
Вопрос 25. Признак перпендикулярности плоскостей. Теорема о трех перпендикулярах. 590
Вводная часть 590
Основная часть 592
Дополнительная часть 594
2.3.2. Дополнительная часть 600

2.4. Приложения к методическим материалам вопросов устного экзамена по математике. О выпуклости функций. 612

2.4.1. Выпуклость линейной функции 614
2.4.2. Выпуклость квадратичной функции 614
2.4.3. Выпуклость показательной функции 614
2.4.4. Выпуклость логарифмической функции 615
2.4.5. Выпуклость степенной функции x^n с отрицательным показателем n 615
2.4.6. Выпуклость степенной функции x^n с положительным показателем n 616
2.4.7. Выпуклость тригонометрической функции $f(x) = \sin x$ . . . 616
2.4.8. Выпуклость тригонометрической функции $f(x) = \cos x$ . . . 617
2.4.9. Выпуклость тригонометрической функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ 618
2.4.10. Выпуклость тригонометрической функции $f(x) = \operatorname{ctg} x$ . . . 619

3. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ, ПРЕДЛАГАВШИХСЯ НА УСТНОМ ЭКЗАМЕНЕ ПО МАТЕМАТИКЕ В ПРЕДЫДУЩИЕ ГОДЫ . . . 620

3.1. Задачи с решениями 620
3.2. Задачи для самостоятельного решения 670
3.3. Ответы и указания 675

Учебное издание

Будак Александр Борисович
Щедрин Борис Михайлович

Элементарная математика

Руководство для поступающих в вузы

Серия: В помощь поступающим в вузы
(естественные дисциплины)

Издание третье, переработанное и дополненное

Выпускающий редактор *Барбашина А.С.*
Ответственный редактор *Щедрин Б.М.*
Компьютерный набор в LATEXe *Будак А.Б.*
Компьютерные рисунки в PAINTBRUSHe
Гладченко М.А., Будак А.Б., Будак Б.А.
Корректор *Семкин В.В.*

Издательский отдел
Учебно-научного центра довузовского образования
117246, Москва, ул. Обручева, д. 55 А;
119992, Москва, Ленинские горы, Г.З. МГУ, сектор "Ж", к. 105 а.
Тел./факс: (095) 718-69-66, 939-39-34.

ИД N 00545 от 06.12.99.

Подписано в печать 30.03.01. Формат 60x90/16.
Бум. газетная. Усл. печ. л. 43,25.
ТМО 7/1. Тираж 3000 экз. Зак. 1576.



Учебно-научный центр довузовского образования



Центр довузовского обучения МГУ им. М.В. Ломоносова

Подготовительные курсы
Вечерняя и заочная подготовка к поступлению в вузы
по предметам вступительных экзаменов
Тел.: 939-2137, 939-3310

Лекторий выходного дня
Лекции по предметам вступительных экзаменов
для абитуриентов и старшеклассников
Тел. 203-9812

Научно-исследовательская часть
Разработка и внедрение новых обучающих технологий
Тел. 939-1093

Вечерняя гимназия
Дополнительное образование школьников
Тел. 939-3214

Издательский отдел
Издание учебной, учебно-методической, тестовой
и научно-популярной литературы
для абитуриентов и старшеклассников
Тел.: 718-7767, 939-3934

Книжная Лавка Абитуриента
Литература для абитуриентов и старшеклассников
различных издательств
Опт, мелкий опт, наложенный платеж
Тел.: 718-6966

Мини-типография
Печать малотиражной учебной и методической литературы
Тел.: 718-7767, 939-1082

Центр «Телетестинг»
Компьютеризованное тестирование выпускников средних школ

117246, Москва,
Ул. Обручева, д. 55А
Тел./факс: 718-6966
Тел./факс: 718-7767

e-mail: center@esc.msu.ru
http://www.esc.msu.ru

119992, Москва,
Ленинские горы,
МГУ, ГЗ,
сектор "Ж", к.107а
Тел.: 939-10-93
Факс: 932-88-81

