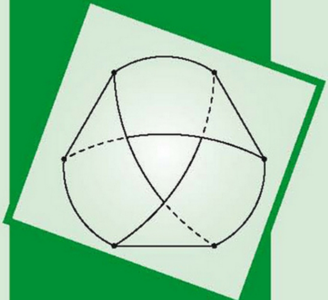
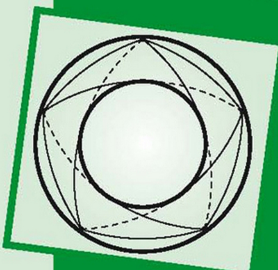
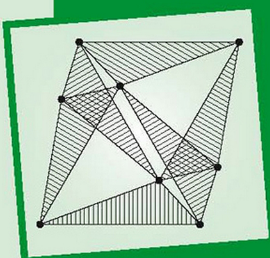
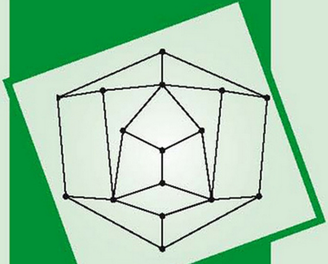
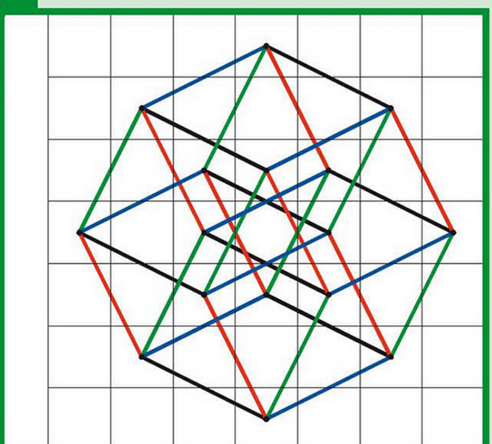
Элементы дискретной математики в задачах











А. А. Глибичук
А. Б. Дайняк
Д. Г. Ильинский
А. Б. Купавский
А. М. Райгородский
А. Б. Скопенков
А. А. Чернов

А. А. Глибичук, А. Б. Дайняк, Д. Г. Ильинский,
А. Б. Купавский, А. М. Райгородский,
А. Б. Скопенков, А. А. Чернов

Элементы дискретной математики в задачах

Рекомендовано Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации
по образованию в области прикладных математики и физики
в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся
по направлению «Прикладные математика и физика», а также
по другим математическим и естественнонаучным направлениям
и специальностям и смежным направлениям и специальностям
в области техники и технологий

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2016

УДК 519.1
ББК 22.176
Э45

Авторский коллектив:

А. А. Глибичук, А. Б. Дайняк, Д. Г. Ильинский, А. Б. Купавский,
А. М. Райгородский, А. Б. Скопенков, А. А. Чернов

Научные редакторы:

А. В. Шаповалов, И. Д. Шкредов

А. А. Глибичук и др.
Элементы дискретной математики в задачах
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2016
174 с.
ISBN 978-5-4439-3024-4

Мы приводим подборки задач по комбинаторным разделам математики. Эти задачи подобраны так, что в процессе их решения читатель освоит основы важных теорий — как классических, так и современных.

Книга будет полезна студентам, руководителям и участникам кружков для старшеклассников (в частности, ориентированных на олимпиады). Некоторые приводимые красивые задачи и важные темы малоизвестны в традиции кружков по математике, но полезны как для математического образования, так и для подготовки к олимпиадам. Решение этих задач (т. е. изучение соответствующих теорий) будет полезно также всем, кто хочет стать математиком, специалистом по computer science или программистом, работающим в наукоёмких отраслях информационных технологий.

Подготовлено на основе книги: Элементы дискретной математики в задачах / А. А. Глибичук и др. — М.: МЦНМО, 2016. — ISBN 978-5-4439-1024-6.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3024-4

Оглавление

Введение

Зачем эта книга? Мы приводим подборки задач по комбинаторным разделам математики. Эти задачи подобраны так, что в процессе их решения читатель (точнее, решатель) освоит основы важных теорий — как классических, так и современных. Ср. [ZSS, S2, J].

Книга будет полезна участникам кружков для младшекурсников и старшеклассников (в частности, ориентированных на олимпиады), а также их руководителям. Некоторые приводимые красивые задачи и важные темы малоизвестны в традиции кружков по математике, но полезны как для математического образования, так и для подготовки к олимпиадам.

По нашему мнению, знание этих разделов комбинаторики также полезно всем, кто хочет стать математиком, специалистом по computer science или программистом, работающим в наукоёмких отраслях информационных технологий. Именно таких специалистов мы готовим на факультете инноваций и высоких технологий (ФИВТ) Московского физико-технического института. Приведенные задачи используются при изучении курсов дискретных структур и дискретного анализа на этом факультете. Эти курсы читают А. Б. Дайняк и А. М. Райгородский, а остальные авторы ведут семинары по этим курсам. Некоторые материалы основаны на занятиях, проведенных А. Б. Скопенковым в Кировской ЛМШ, Московской выездной олимпиадной школе, школе «Интеллектуал», а также на кружках «Математический семинар» и «Олимпиады и математика».

Комбинаторика — один из самых красивых разделов современной математики. Постановки задач этого раздела зачастую доступны школьникам. А результаты, тем не менее, носят фундаментальный характер и важны как для развития других разделов математики, так и для приложений в информатике, биологии, экономике и др. Мы постараемся рассказать о тех мощных современных методах, благодаря которым комбинаторика приобретает новый облик, становясь серьезной научной дисциплиной. Среди этих методов, помимо более или менее стандартных, вероятностный и линейно-алгебраический методы. Они лежат в основе самых важных комбинаторных результатов, полученных за последние десятилетия.

В параграфах второй половины книги рассказывается об активно развивающихся областях математики. Хотя здесь изучаются только самые простые результаты и методы, они дают некоторое представление об основных направлениях научных исследований в соответствующих областях. С этой же целью приводятся *замечания*, которые не используются ни в формулировках, ни в решениях задач. Важные факты выделены словом «теорема» или «следствие».

Используемый материал. Формулировки большинства задач доступны старшеклассникам, интересующимся математикой[1]; мы приводим все необходимые определения, выходящие за рамки школьной программы и редко изучаемые на кружках. Без определения используются только простейшие понятия и результаты теории чисел [GIM, §§ 8, 9], [Vi, §§ 1—3], [ZSS, § 2 «Делимость и деление с остатком», § 3 «Умножение по простому модулю»]. Если в некотором разделе для понимания условий или для решения задач нужны дополнительные сведения, то в начале соответствующего раздела приводятся ссылки.

При этом многие задачи трудны: для их решения нужно предварительно прорешать другие приведённые задачи на данную тему.

Как устроена книга. Эту книгу необязательно читать (точнее, прорешивать) подряд. Параграфы и разделы книги практически независимы друг от друга (кроме разделов в § 3 и § 4, которые желательно прорешивать подряд). Если в задаче одного из разделов все-таки используется материал другого раздела, то либо эту задачу можно игнорировать, либо посмотреть конкретно указанный материал другого раздела. Основные обозначения приведены в конце введения. Основные понятия и обозначения теории графов введены в п. 2.1.

При этом параграфы расположены примерно в порядке возрастания сложности материала.

К многим задачам приводятся подсказки, указания и решения. Подсказки и указания расположены в конце каждого параграфа. Однако к ним стоит обращаться после прорешивания каждой задачи.

Общие замечания к формулировкам задач. Задачи обозначаются жирными цифрами. Если в условии задачи написано «найдите», то нужно дать ответ без знака суммы и многоточия. Если же условие задачи является формулировкой утверждения, то в задаче требуется это утверждение доказать. Как правило, мы приводим *формулировку* утверждения перед его *доказательством*[2]. В таких случаях для дока-

[1] Часть материала (например, п. 1.1) на некоторых кружках и летних школах изучается даже шестиклассниками. Однако приводимые подсказки, указания и решения рассчитаны на читателей с некоторой математической культурой (необходимой для освоения бóльшей части книги). Разбирать эти решения с шестиклассниками нужно по-другому, см., например, [GIF].

[2] Часто происходит обратное: формулировки красивых результатов и важных проблем, ради которых была придумана теория, приводятся только *после* продолжительного

зательства утверждения могут потребоваться следующие задачи. Это всегда явно оговаривается в подсказках, а иногда и прямо в тексте. (На занятии задача-подсказка выдается только тогда, когда школьник или студент немного подумал над самой задачей.)

Большинство задач не оригинальны, но установить первоисточник не представляется возможным. Многие задачи взяты из [IKR, ZSS, L] и из неопубликованных материалов кафедры дискретной математики ФИВТ МФТИ, в котором работают авторы.

О литературе. В списке литературы мы приводим только те *стандартные учебники* по комбинаторике и теории графов, которые по тем или иным причинам мы чаще используем в преподавании. Также мы приводим ссылки на всю известную нам более серьёзную учебно-научную литературу. Но этот список также не претендует на полноту, поскольку мы можем не знать о некоторых публикациях.

В списке литературы [Ga, GKP, Gri, Hal, Har, KS, Mk, R1, R2, R3, R4, S5, S6, VS, w8] и [AM, GIM, I, J, JLR, KR, KZP, Mn, P, PS, R5, R6, S1, S7, S8, S9, Vi, ZSS] — базовые учебники и статьи по темам этой книги или по близким к ней темам, [AS, BM, B, BF, Gra, L, NPP, S4, So, Ve, w1—w7] — более продвинутая литература. Остальное — источники замечаний, основное содержание которых может быть не связано с этой книгой, и опубликованные ранние версии отдельных частей книги.

Благодарности. Мы благодарим за полезные замечания редакторов книги А. В. Шаповалова и И. Д. Шкредова, а также А. А. Полянского, М. Б. Скопенкова, И. Н. Шнурникова и членов редколлегии сборника «Математическое просвещение». Мы благодарим студентов за каверзные вопросы и указания на неточности. Мы благодарим А. Ю. Веснина за разрешение использовать рис. 9.

Грантовая поддержка.

А. А. Глибичук поддержан грантами Мол-а-вед № 12-01-33080 и грантом РФФИ № 14-01-00332 А.

А. Б. Купавский поддержан грантом РФФИ 12-01-00683 и грантом Президента РФ МД-6277.2013.1.

А. М. Райгородский поддержан грантом РФФИ 12-01-00683, грантом Президента РФ МД-6277.2013.1 и грантом ведущих научных школ НШ-2519.2012.1.

А. Б. Скопенков частично поддержан грантом фонда Саймонса.

изучения этой теории (или не приводятся совсем). Это способствует появлению представления о математике как науке, изучающей немотивированные понятия и теории. Такое представление принижает ценность математики.

Основные обозначения

- $[x]$ — (нижняя) целая часть числа x
- $d \mid n$ — число n делится на число d (для целых d и n)
- НОД(m, n) — наибольший общий делитель чисел m и n
- $\mathscr{R}_n$ — множество $\{1, 2, \ldots, n\}$
- $\mathbb{N}$ — множество $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ целых положительных чисел
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ — множества всех действительных, рациональных и целых чисел соответственно
- $\mathbb{Z}_2$ — множество $\{0, 1\}$ остатков от деления на 2 с операциями сложения и умножения по модулю 2
- $\mathbb{Z}_m$ — множество $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ остатков от деления на m с операциями сложения и умножения по модулю m
- $\binom{n}{k}$ — количество k-элементных подмножеств n-элементного множества (другое обозначение: C_n^k)
- $\binom{X}{k}$ — множество всех k-элементных подмножеств множества X
- $|X|$ — число элементов во множестве X
- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$ — разность множеств A и B (не путайте этот знак с $/$)
- $A \sqcup B$ — дизъюнктное объединение множеств A и B. Результат этой операции совпадает с обычным объединением множеств A и B, но при этом подчёркивается, что $A \cap B = \varnothing$
- $A \subset B$ — «множество A содержится в множестве B». (В некоторых других книгах это обозначают $A \subseteq B$, а $A \subset B$ означает «множество A содержится в множестве B и не равно B».)
- $x := a$ означает фразу «обозначим $x = a$»

§ 1. Элементы комбинаторики

1.1. Подсчёт и комбинаторные тождества

1.1.1. (1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. (2) Найдите сумму $\binom{n}{0} + \ldots + \binom{n}{n}$.

1.1.2. (1) *Правило Паскаля.* $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$, если $0 \leqslant k \leqslant n-1$. (Подсказка приведена после задачи 1.1.4 (1).)

(2) $\left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} = (k+1)\left\{ {n \atop k+1} \right\} + \left\{ {n \atop k} \right\}$. Здесь $\left\{ {n \atop k} \right\}$ — количество разбиений n-элементного множества на k частей (т. е. непустых подмножеств); разбиения считаются неупорядоченными, т. е. разбиение множества $\{1, 2, 3\}$ на части $\{1, 2\}$ и $\{3\}$ и разбиение того же множества на части $\{3\}$ и $\{1, 2\}$ считаются одинаковыми. Ср. с задачей 1.4.7 (5).

Замечание. Числа $\left\{ {n \atop k} \right\}$ называются *числами Стирлинга второго рода*; подробнее о них см., например, [GKP, с. 287].

1.1.3. (1) Во скольких подмножествах множества $\mathcal{R}_{11}$ не найдётся двух подряд идущих чисел?

(2) То же для *трёх* подряд идущих чисел.

1.1.4. (1) $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

(2) *Бином Ньютона.* $(a+b)^n = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$.

Как решать задачи этого раздела? Мы предлагаем три метода, которые продемонстрируем на примере трёх доказательств правила Паскаля 1.1.2 (1). (Большинство задач этого раздела решаются несколькими методами из трёх предложенных. Но, конечно, не каждый метод применим к каждой задаче. Обычно в указаниях для краткости приводится только один способ решения.)

Первое доказательство: комбинаторные рассуждения. Неформально говоря, идея в следующем: чтобы выбрать $k+1$ футболистов, нужно либо выбрать $k+1$ полевых, либо вратаря и k полевых. Приведём строгое изложение этой идеи.

Количество $(k+1)$-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_{n+1}$,

• содержащих число $n+1$, равно $\binom{n}{k}$, так как такие подмножества при выкидывании числа $n+1$ становятся подмножествами в $\mathcal{R}_n$;

• не содержащих число $n+1$, равно $\binom{n}{k+1}$, так как такие подмножества являются также подмножествами в $\mathcal{R}_n$.

Другая запись этого решения. Определим отображение

$$f : \binom{\mathcal{R}_{n+1}}{k+1} \to \binom{\mathcal{R}_n}{k+1} \sqcup \binom{\mathcal{R}_n}{k} \quad \text{формулой} \quad f(A) := A \setminus \{n+1\}.$$

Остаётся доказать, что это — биекция, т. е. взаимно однозначное соответствие (например, определив явной формулой обратное отображение).

Второе доказательство: *использование явной формулы* 1.1.4 (1). Имеем

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k-1)!\,(k+1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\,k!} =$$
$$= \frac{n!}{(n-k-1)!\,k!}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k}\right) =$$
$$= \frac{n!}{(n-k-1)!\,k!} \cdot \frac{n+1}{(k+1)(n-k)} = \frac{(n+1)!}{(n-k)!\,(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Третье доказательство: использование бинома Ньютона 1.1.4 (2). Число $\binom{n+1}{k+1}$ является коэффициентом при x^{k+1} в многочлене

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) = x(1+x)^n + (1+x)^n.$$

Поэтому число $\binom{n+1}{k+1}$ равно сумме коэффициентов при степенях x^k и x^{k+1} у многочлена $(1+x)^n$. Отсюда следует требуемое равенство.

1.1.5. Найдите суммы:

(1) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}$;

(2) $\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$;

(3) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n}$;

(4) $\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k+1} + \ldots + \binom{n+m}{k+m}$;

(5) $\binom{n}{0}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2$;

(6) $\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \ldots + \binom{n}{k}\binom{m}{0}$;

(7) $\binom{2n}{0} - \binom{2n-1}{1} + \binom{2n-2}{2} - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}$;

(8) $\binom{2n}{n} + 2\binom{2n-1}{n} + 4\binom{2n-2}{n} + \ldots + 2^n\binom{n}{n}$.

1.1.6. Найдите явную формулу для
(1) $\sum\limits_{k\geqslant 0}\binom{n}{2k}$; (2) $\sum\limits_{k\geqslant 0}\binom{n}{4k}$; (3) $\sum\limits_{k\geqslant 0}\binom{n}{3k}$.

В ответе используйте только целочисленные функции целочисленного аргумента.

1.2. Формула включений и исключений

Обозначим через $\varphi(n)$ функцию Эйлера, т. е. количество чисел от 1 до n, взаимно простых с числом n.

1.2.1. (1) Найдите количество чисел, не превосходящих 1001 и не делящихся ни на одно из чисел 7, 11, 13.

(2) Найдите $\varphi(1)$, $\varphi(p)$, $\varphi(p^2)$, $\varphi(p^\alpha)$, где p — простое число, $\alpha > 2$.

(3) $\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_s}\right)$, где $n = p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_s^{\alpha_s}$ — каноническое разложение числа n.

1.2.2. (1) На полу комнаты площадью 24 м^2 расположены три ковра (произвольной формы) площади 12 м^2 каждый. Тогда площадь пересечения некоторых двух ковров не меньше 4 м^2.

(2) На кафтане расположено пять заплат (произвольной формы). Площадь каждой из них больше половины площади кафтана. Тогда площадь общей части некоторых двух заплат больше одной пятой площади кафтана.

1.2.3. *Формула включений и исключений*. Рассмотрим подмножества $A_1, \ldots, A_n$ конечного множества U. Положим по определению $\left|\bigcap\limits_{j\in\varnothing} A_j\right| := U$.

(1) Пусть число $\alpha_{|S|} := \left|\bigcap\limits_{j\in S} A_j\right|$ зависит только от размера $|S|$ набора $S \subset \mathcal{R}_n$ индексов, а не от самого набора. Тогда

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\alpha_k,$$

$$|U \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)| = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}\alpha_k.$$

(2) Обозначим $M_k := \sum\limits_{S\in\binom{\mathcal{R}_n}{k}}\left|\bigcap\limits_{j\in S} A_j\right|$. В частности, $M_0 := |U|$. Тогда

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = M_1 - M_2 + M_3 - \ldots + (-1)^{n+1}M_n,$$
$$|U \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)| = M_0 - M_1 + M_2 + \ldots + (-1)^{n}M_n.$$

(3) *Неравенства Бонферрони*. Для любого s, $s < \frac{n}{2}$,

$$M_1 - M_2 + M_3 - \ldots - M_{2s} \leqslant |A_1 \cup \ldots \cup A_n| \leqslant M_1 - M_2 + M_3 - \ldots + M_{2s+1},$$

$$M_0 - M_1 + M_2 - \ldots + M_{2s} \geqslant |U \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)| \geqslant$$
$$\geqslant M_0 - M_1 + M_2 - \ldots - M_{2s+1}.$$

В этом разделе предлагаются задачи следующего типа: дано конечное множество U и набор свойств (подмножеств) $A_k \subset U$, $k = 1, \ldots, n$. Требуется найти количество элементов, для которых выполнено хотя бы одно из свойств A_k (т. е. $|A_1 \cup \ldots \cup A_n|$), либо количество элементов, для которых не выполнено ни одно из свойств A_k (т. е. $|U \setminus (A_1 \cup \ldots \ldots \cup A_n)|$).

Для этого используется два варианта формулы включений и исключений (см. задачу 1.2.3 (2)). При этом если во всех пересечениях множеств набора число элементов зависит только от количества пересекаемых множеств, формулу можно упростить (см. задачу 1.2.3 (1)).

В задачах 1.2.4 (1) и 1.2.5 предполагается, что ответ записывается в виде суммы (аналогично формуле включений и исключений).

1.2.4. На полке стоят 10 различных книг.

(1) Сколькими способами их можно переставить так, чтобы ни одна книга не осталась на своем месте?

(2) Количество таких перестановок книг, при которых на месте остаётся ровно 4 книги, больше 50 000.

1.2.5. (1) Сколькими способами можно расселить 20 туристов по 5 различным домикам, чтобы ни один домик не оказался пустым?

(2) Сколько существует различных сюръекций $f : \mathcal{R}_k \to \mathcal{R}_n$?

1.2.6*. Докажите следующую формулу:

$$n! \cdot x_1 x_2 \ldots x_n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^n -$$
$$- \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-1} \leqslant n} (x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_{n-1}})^n +$$
$$+ \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-2} \leqslant n} (x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_{n-2}})^n - \ldots + (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^n.$$

1.3. Принцип Дирихле

1.3.1. (1) Если сумма n действительных чисел равна S, то найдётся слагаемое, не большее S/n, а также слагаемое, не меньшее S/n.

(2) Если сумма n целых чисел больше kn для некоторого целого k, то найдётся слагаемое, не меньшее $k + 1$.

(3) Если сумма n целых чисел меньше kn для некоторого целого k, то найдётся слагаемое, не большее $k-1$.

Утверждение 1.3.1 (1) применяется при решении задач, см., например, задачу 1.3.9. Его «дискретный аналог» утверждение 1.3.1 (2) называют *принципом Дирихле* и часто формулируют так: при любом распределении $nk+1$ или более предметов по n ящикам в каком-нибудь ящике окажется не менее $k+1$ предмета[1)].

1.3.2. В мешке лежат 32 красных шара, 29 зеленых шаров, 45 синих, 17 желтых и по 30 белых, черных и серых. Какое наименьшее число шаров надо взять, чтобы среди них наверняка нашлись шары

(1) всех 9 цветов? (2) 7 цветов?

1.3.3. (1) Среди 7-значных чисел, заканчивающихся на 3 пятерки, существует не менее 1200 чисел, имеющих один и тот же остаток от деления на 7.

(2) Для каждого 4-значного числа посчитали сумму цифр его квадрата. Докажите, что существует не менее 1200 чисел, для которых посчитанные суммы будут давать одинаковый остаток при делении на 7.

1.3.4. (1) Среди чисел, записываемых только единицами, есть число, которое делится на 1997.

(2) В строку записаны n целых чисел. Докажите, что из них можно выделить одно или несколько подряд идущих с суммой, кратной n.

1.3.5. (1) Среди любых n действительных чисел найдутся два, дробные части которых различаются не более чем на $\dfrac{1}{n-1}$.

(2) В таблице 10×10 расставлены целые числа, причем любые два числа в соседних по стороне клетках отличаются не более чем на 5. Докажите, что среди этих чисел найдутся два равных.

1.3.6. Теорема Дирихле. *Дано произвольное иррациональное число α.*

(1) *Для произвольного натурального N найдутся такие взаимно простые $p, q\in\mathbb{Z}$, что $0<q\leqslant N$ и*

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{qN}.$$

(2) *Существует бесконечно много пар взаимно простых чисел $p, q\in\mathbb{Z}$, для которых*

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q^2}.$$

[1)] Методически более грамотно [MS, Словарик, раздел «оценка»] было бы назвать п. 1.3 «Оценки от противного». Однако мы выбрали название, по которому большинство читателей смогут наиболее ясно представить себе содержание этого раздела.

Замечание. В формулировке утверждения 1.3.6 (2) можно избавиться от взаимной простоты, так как для каждой дроби $\frac{p}{q}$, для которой выполнено неравенство $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$, существует лишь конечное количество целых чисел $k > 0$ таких, что $\left|\alpha - \frac{pk}{qk}\right| \leqslant \frac{1}{(qk)^2}$.

1.3.7. Натуральные числа от 1 до 101 записаны в некотором порядке. Докажите, что в этой последовательности найдется либо возрастающая, либо убывающая подпоследовательность длины 11.

Замечание. В данном случае *подпоследовательность* — это то, что получается из последовательности вычеркиванием некоторых её членов.

1.3.8. Имеется 10 яблок, каждое из которых весит не более 100 г, и две одинаковые тарелки. Докажите, что можно положить в тарелки

(1) несколько яблок так, чтобы веса в тарелках отличались меньше чем на 1 г.

(2) по одинаковому количеству яблок так, чтобы веса в тарелках отличались меньше чем на 2 г.

При этом на тарелках должно лежать хотя бы одно яблоко, но не обязательно должны лежать все яблоки (и в п. (1) не обязательно, чтобы на *каждой* тарелке лежало хотя бы одно яблоко).

1.3.9. Для любых n векторов $v_1, \ldots, v_n$ длины 1 на плоскости существует такой набор $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1$, что

(1) $|\sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k| \leqslant \sqrt{n}$, (2) $|\sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k| \geqslant \sqrt{n}$.

1.4. Комбинаторика булева куба

1.4.1. Расставьте на шахматной доске нескольких коней, чтобы каждый бил четырёх других.

1.4.2. 33 буквы русского алфавита кодируются последовательностями из нулей и единиц.

(1) При каком наименьшей длине последовательности кодирование можно сделать однозначным?

(2) Если при получении сообщения возможна ошибка в не более чем одном разряде, т. е. если коды различных букв должны отличаться по крайней мере в трёх разрядах, то 8 разрядов не хватит.

(3) Если возможна ошибка в не более чем двух разрядах, то 10 разрядов не хватит.

(4)* Найдите наименьшее число разрядов, достаточное для кодирования из п. (2).

1.4.3. (1) При фиксированном n число $\binom{n}{k}$ максимально при $k = \left[\frac{n}{2}\right]$.

(2) *Best in their own ways*. В математической олимпиаде участвовало k школьников. Выяснилось, что для любых двух школьников A и B нашлась задача, которую решил A и не решил B, и задача, которую решил B, но не решил A. Какое наименьшее возможное количество задач могло быть при этом условии? Иными словами, найдите наименьшее возможное n, для которого найдётся такое семейство из k подмножеств n-элементного множества, что ни одно из подмножеств семейства не содержится (собственно) в другом.

1.4.4. Имеется табло с n горящими лампочками. Каждый переключатель может быть подсоединён к некоторым лампочкам. При нажатии на кнопку переключателя соединённые с ним лампочки меняют свое состояние: горящие тухнут, а не горящие загораются. Какое наименьшее число переключателей необходимо, чтобы можно было зажечь любой набор лампочек (не входящие в этот набор лампочки гореть не должны)?

1.4.5. В первый день своего правления король организует партии среди n своих подданных. На второй день советник приносит королю список фамилий некоторых подданных (в первый день этот список неизвестен). На третий день король может выбрать несколько партий и отправить в тюрьму всех подданных, участвующих в каждой из них. Какое наименьшее число партий необходимо организовать в первый день, чтобы в третий день заведомо можно было отправить в тюрьму всех подданных из принесенного списка (и только их)?

Замечание. Следующая важная конструкция полезна (хотя и не обязательна) для решения вышеприведённых (и многих других) задач. Нарисуем точки, соответствующие всем подмножествам множества $\mathcal{R}_n$. При этом на k-й *этаж* поместим точки, соответствующие k-элементным множествам. Соединим стрелкой те из них, которые получаются друг из друга добавлением одного элемента. Тогда соединяемые стрелкой точки лежат на соседних этажах. Полученный граф называется *n-мерным кубом*. Его вершины соответствуют векторам из $\mathbb{Z}_2^n$.

Определение множества $\mathbb{Z}_2^n$ приведено в начале п. 7.1. Подмножество $L \subset \mathbb{Z}_2^n$ называется *линейным подпространством*, если $x + y \in L$ для любых $x, y \in L$ (не обязательно различных). Иными словами, *линейное подпространство* — такое семейство подмножеств n-элементного множества, которое вместе с любыми двумя подмножествами содержит их симметрическую разность (т. е. сумму по модулю 2).

1.4.6. (1) Любое линейное подпространство содержит нулевой набор $(0,\ldots,0)$.

(2) Число элементов в любом линейном подпространстве является степенью двойки.

Обозначим через $\begin{vmatrix} n \\ k \end{vmatrix}$ количество линейных подпространств в $\mathbb{Z}_2^n$, состоящих из 2^k элементов (такие линейные подпространства в $\mathbb{Z}_2^n$ называют *k-мерными*, ср. п. 7.1).

1.4.7. (1) Найдите $\begin{vmatrix} 2 \\ k \end{vmatrix}$ для $k=0,1,2$.

(2) Найдите $\begin{vmatrix} 3 \\ k \end{vmatrix}$ для $k=0,1,2,3$.

(3) $\begin{vmatrix} n \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n \\ n \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} n \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n \\ n-1 \end{vmatrix} = 2^n-1.$

(4) $\begin{vmatrix} n \\ k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n \\ n-k \end{vmatrix}.$

(5) $\begin{vmatrix} n+1 \\ k+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n \\ k+1 \end{vmatrix} + 2^{n-k}\begin{vmatrix} n \\ k \end{vmatrix}.$

(6) Найдите $\begin{vmatrix} n \\ 2 \end{vmatrix}$.

(7) Найдите $\begin{vmatrix} n \\ k \end{vmatrix}$.

Для решения этой задачи нужны некоторые понятия, приведённые в начале п. 7.1.

1.5. Обращение Мёбиуса

Под значком $\sum\limits_{d|n}$ подразумевается сумма по всем натуральным делителям числа n.

Определим *функцию Мёбиуса* $\mu(n)$ следующим образом:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n=1; \\ (-1)^k, & \text{если } n \text{ является произведением} \\ & k \text{ различных простых делителей;} \\ 0, & \text{если } n \text{ делится на } p^2 \\ & \text{для некоторого простого числа } p. \end{cases}$$

1.5.1. (1) $\sum\limits_{d|n}\mu(d) = \begin{cases} 1, n=1; \\ 0, n\neq 1. \end{cases}$

(2) Найдите сумму значений функции Мёбиуса по тем и только тем делителям числа n, в каноническое разложение которых входит чётное количество простых множителей.

(3) *Формула обращения Мёбиуса.* Пусть $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ — произвольная функция, $g(n)=\sum\limits_{d|n} f(d)$. Тогда справедлива формула

$$f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)g(d).$$

Функция Эйлера $\varphi(n)$ определена в п. 1.2.

1.5.2. (1) Найдите сумму $\sum\limits_{d|n}\varphi(d)$.

(2) $\sum\limits_{d|n}\dfrac{\mu(d)}{d}=\left(1-\dfrac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{p_s}\right)$.

Замечание. Заметим, что, применяя формулу обращения Мёбиуса к функции $\varphi(n)$, можно немного другим способом доказать формулу для нахождения $\varphi(n)$ (см. утверждение 1.2.1 (3)).

Действительно, используя утверждения 1.5.2 (1, 2), получаем:

$$\varphi(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}=n\cdot\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_s}\right).$$

Обозначим через $T_r(n)$ количество способов раскрасить карусель из n вагончиков в r цветов, т. е. число раскрасок вершин правильного n-угольника в r цветов, если раскраски, совмещающиеся поворотом, неотличимы. При этом

• в раскраске могут быть использованы не все цвета;

• цвета различны: например, раскраски КККЖ и ЖЖЖК различны.

Приведём более формальное определение. Для любой раскраски карусели можно «разорвать» карусель между любыми двумя вагончиками и записать получившуюся последовательность цветов (раскраску поезда), начиная с места разрыва по часовой стрелке. Например, следующие последовательности соответствуют одной и той же раскраске карусели:

КЖЗС; ЖЗСК; ЗСКЖ; СКЖЗ.

С другой стороны, из каждой последовательности цветов можно получить раскраску карусели, «склеив» её начало и конец правильным образом.

Циклическим сдвигом последовательности $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется последовательность $(a_2, a_3, \ldots, a_1)$. *Раскраской карусели* (или, более учёно, *циклической последовательностью*) называется класс эквивалентности последовательностей с точностью до циклического сдвига.

Итак, $T_r(n)$ — количество циклических последовательностей длины n, элементы которых — числа $1, \ldots, r$.

1.5.3. (1) Найдите $T_r(n)$ при $n = 3, 4, 5, 6, 9$.

(2) $2^{2^n-n-1} < T_2(2^n) < 2^{2^n-n}$.

Назовем *периодом последовательности* минимальное положительное число d, такое что в результате d циклических сдвигов она перейдет в себя. Аналогично определяется *период карусели*.

1.5.4. (1) Период последовательности делит её длину.

(2) Если d делит n, то количество последовательностей длины n и периода d равно количеству последовательностей длины d и периода d.

1.5.5. Обозначим через $M_r(n)$ количество последовательностей длины n и периода n, элементы которых — числа $1, \ldots, r$.

(1) Найдите $\sum\limits_{d|n} M_r(d)$.

(2) Выразите $T_r(n)$ через все $M_r(d)$, где $d \mid n$.

(3) $T_r(n) = \sum\limits_{l|n} \frac{1}{l} \sum\limits_{d|l} \mu(d) r^{\frac{l}{d}}$.

(4) $T_r(n) = \frac{1}{n} \sum\limits_{d|n} \varphi(d) r^{\frac{n}{d}}$. (Более простой способ доказательства этой формулы приведён в п. 1.9.)

1.5.6. Найдите количество различных раскрасок карусели из n вагончиков в r цветов, в которых

(1) цвет s встречается n_s раз для каждого $s = 1, \ldots, r$ (здесь в качестве ответа принимается формула с суммированием по делителям, аналогичная 1.5.5 (3));

(2) присутствует ровно 4 цвета из $r = 5$ данных.

1.6. Подсчёт двумя способами

Мы приводим простейший вариант вероятностного метода в комбинаторике. Ср. п. 6.2, 6.3. Этот метод также применяется при решении задач 2.4.3, 2.6.5, 2.6.7, 2.7.2, 3.1.11 (2), 4.1.5, 4.3.4 и некоторых задач из п. 1.9.

Комбинаторные решения нижеприведённых задач можно изложить на вероятностном языке. Решения без явного построения вероятностного пространства могут привести к бессмыслице и ошибке. (Подумайте, например, с какой вероятностью случайный треугольник будет остроугольным.) Поэтому строгие решения на вероятностном языке должны начинаться с явного построения вероятностного пространства.

1.6.1. (1) Дано 21 девятиэлементное подмножество 30-элементного множества. Тогда какой-то элемент 30-элементного множества содержится по крайней мере в семи данных подмножествах.

(2) Комиссия собиралась 40 раз. На каждом заседании было ровно 10 человек, любые два не были вместе больше одного раза. Тогда в комиссии хотя бы 60 человек.

(3) В компании у любых двух знакомых друг с другом человек есть ровно 5 общих знакомых (кроме них самих). Тогда количество пар знакомых между собой людей в компании делится на 3.

(4) Обозначим через $P_n(k)$ число перестановок множества натуральных чисел от 1 до n, оставляющих ровно k чисел на своем месте. Тогда $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot P_n(k) = n!$.

1.6.2. Пусть $\mathscr{F}$ — любое семейство k-элементных подмножеств n-элементного множества.

(1) Если $k \geqslant l$ и каждое l-элементное подмножество n-элементного множества содержится в некотором подмножестве из $\mathscr{F}$, то $|\mathscr{F}| \geqslant \binom{n}{l} \Big/ \binom{k}{l}$.

(2) Количество $(k-1)$-элементных подмножеств n-элементного множества, целиком содержащихся хотя бы в одном из подмножеств семейства $\mathscr{F}$, не меньше $\dfrac{k|\mathscr{F}|}{n-k+1}$.

1.6.3. На планете Марс 100 государств объединены в блоки, в каждом из которых не больше 50 государств. Известно, что любые два государства состоят вместе хотя бы в одном блоке. Найдите минимально возможное число блоков. (Ср. с задачей 1.6.2 (1).)

1.6.4. Ровно 19 вершин правильного 97-угольника покрашены в белый цвет, остальные вершины покрашены в чёрный. Тогда число равнобедренных одноцветных треугольников с вершинами в вершинах 97-угольника не зависит от способа раскраски. (Треугольник одноцветный, если все его вершины или белые, или чёрные.)

1.6.5. Даны числа $n \geqslant k$ и множество S из n точек на плоскости. Если любые три точки из множества S не лежат на одной прямой и для любой точки $P \in S$ существуют хотя бы k различных точек из множества S, равноудаленных от P, то $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

1.6.6. В любом множестве из n различных натуральных чисел найдётся подмножество из более чем $n/3$ чисел, в котором нет трёх чисел, сумма двух из которых равна третьему.

1.6.7. По каждому из 100 видов работ в фирме имеется ровно 8 специалистов. Каждому сотруднику нужно дать выходной в субботу или в воскресенье. Докажите, что это можно сделать так, чтобы и в субботу, и в воскресенье для каждого вида работ на работе был специалист по нему.

Замечание. Понятно, что при данном числе k специалистов (в задаче 1.6.7 $k=8$) для малого числа видов работ так распределить выходные всегда можно. А при большом числе l видов работ это может уже не получиться. В следующей задаче мы находим асимптотическую оценку снизу для такого числа l.

Вот более учёная формулировка (обобщения) задачи 1.6.7. Имеется $l=2^{k-1}$ подмножеств некоторого множества, в каждом из которых ровно k элементов. Тогда элементы этого множества можно раскрасить в два цвета так, чтобы никакое из l подмножеств не было одноцветно. Ср. с задачей 6.2.1 (1).

1.6.8. (1) Если для некоторого чётного n

$$\left(1-2\frac{\binom{n/2}{k}}{\binom{n}{k}}\right)^{l} 2^n < 1,$$

то в n-элементном множестве найдётся l таких k-элементных подмножеств, что при любой раскраске элементов этого множества в два цвета хотя бы одно из этих l подмножеств одноцветно.

(2) Существует такое $c>0$, что для любого k существует не более чем $ck^2 2^k$ таких k-элементных подмножеств некоторого множества, что при любой раскраске элементов этого множества в два цвета одно из этих подмножеств одноцветно.

1.7. Перестановки

Задачи следующих трёх разделов не требуют для решения каких-либо предварительных знаний. (Кое-где в них — см. определение перестановки, в задачах 1.9.1, 1.9.4, 1.9.8 используются некоторые понятия теории графов, определения которых даны в п. 2.1.) Они естественным образом подводят читателя к понятию группы. Миникурс «Рождение понятия группы» можно составить из этих трёх разделов, статей [S7, S8], [ZSS, § 3 «Умножение по простому модулю», § 11 «Геометрические преобразования», § 24 «Группы»].

1.7.1. Пятнадцать школьников сидят на пятнадцати пронумерованных стульях. Каждую минуту добрый преподаватель пересаживает их по следующей схеме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 3 & 5 & 10 & 8 & 11 & 14 & 15 & 6 & 13 & 1 & 4 & 9 & 7 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Через сколько минут все школьники впервые окажутся на своих первоначальных местах?

Перестановкой множества называется запись элементов этого множества в произвольном порядке. Более строго, *перестановкой* множества называется взаимно однозначное отображение этого множества на себя (т. е. биекция). Перестановку f удобно изображать в виде ориентированного графа, вершины которого — элементы множества, а рёбра идут из вершины a_k в вершину $f(a_k)$. Перестановка множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, переводящая a_k в $f(a_k)$, записывается в виде

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \ldots & f(a_n) \end{pmatrix};$$

обычно $a_k = k$ для всех $k \in \mathscr{R}_n$. *Обратной* к f перестановкой называется перестановка f^{-1}, записывающаяся в виде

$$\begin{pmatrix} f(a_1) & f(a_2) & \ldots & f(a_n) \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}.$$

Циклом (длины n) называется перестановка вида

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_n & a_1 \end{pmatrix}.$$

Эта перестановка коротко обозначается через $(a_1 a_2 \ldots a_n)$.

Композицией перестановок f и g называется перестановка $f \circ g$, определённая формулой $(f \circ g)(x) := f(g(x))$.

1.7.2. Найдите композиции перестановок на множестве цифр

(1) $(12) \circ (13)$; (2) $(12) \circ (23)$; (3) $(23) \circ (12)$; (4) $(123) \circ (132)$; (5) $(12) \circ (13) \circ (12)$; (6) $(12345) \circ (12)$; (7) $(12345) \circ (56789)$.

Ответ дайте в виде композиции непересекающихся циклов. Например, $(123) \circ (234) = (12) \circ (34)$.

Далее знак композиции опускается.

1.7.3. Для любой перестановки f существует $k > 0$, для которого $f^k = \mathrm{id}$ (т. е. для которого после k-кратного применения перестановки f каждый элемент перейдет в себя).

Порядком перестановки f называется наименьшее $k > 0$, для которого $f^k = \mathrm{id}$.

1.7.4. Существуют ли перестановки 9-элементного множества порядков $7, 10, 12, 11$?

1.7.5. Чему равен порядок композиции непересекающихся циклов из $n_1, \ldots, n_k$ элементов соответственно?

Перестановки $(n_1 + \ldots + n_k)$-элементного множества из задачи 1.7.5 называются перестановками *типа* $\langle n_1, \ldots, n_k \rangle$. Например, перестановки (14)(253), (15)(432) типа $\langle 2, 3 \rangle$, а перестановка (1)(3)(245) — другого типа $\langle 1, 1, 3 \rangle$.

1.7.6. Найдите число перестановок типа

(1) $\langle 2, 3 \rangle$; (2) $\langle 3, 3 \rangle$; (3) $\langle 1, 2, 3, 4 \rangle$.

1.7.7. Любая перестановка представляется в виде композиции

(1) непересекающихся циклов;

(2) транспозиций, т. е. перестановок, каждая из которых меняет местами некоторые два элемента, а остальные оставляет на месте (иными словами, циклов длины 2);

(3) транспозиций $(1i)$, $i = 2, 3, \ldots, n$.

1.7.8. Найдите *две* перестановки, композициями которых можно получить любую перестановку n-элементного множества.

Перестановки a и b называются *сопряжёнными*, если $a = xbx^{-1}$ для некоторой перестановки x.

1.7.9. (1) Перестановки a и b сопряжены тогда и только тогда, когда их типы одинаковы.

(2) Пусть a и x — произвольные перестановки n-элементного множества. Тогда

$$xax^{-1} = \begin{pmatrix} x(1) & x(2) & \ldots & x(n) \\ x(a(1)) & x(a(2)) & \ldots & x(a(n)) \end{pmatrix}.$$

Иными словами, циклическое разложение перестановки xax^{-1} получается из циклического разложения перестановки a заменой каждого элемента на его x-образ: если $a = \prod_{j=1}^{q} (i_{j1}, i_{j2}, \ldots, i_{js_j})$, то

$$xax^{-1} = \prod_{j=1}^{q} (x(i_{j1}), x(i_{j2}), \ldots, x(i_{js_j})).$$

(3) Найдите $gf^{-1}g^{-1}f$ для $f := (1, 2, \ldots, N)$ и $g := (N, N+1, \ldots, L)$.

1.8. Чётность перестановок

1.8.1. (1) Любую ли перестановку можно представить в виде композиции нескольких циклов длины 3?

(2) Любую ли перестановку можно представить в виде композиции чётного числа транспозиций?

(3) *Игра в* 15. В квадратной коробочке размера 4×4 размещены 15 квадратных фишек размера 1×1 с номерами $1, 2, \ldots, 15$, а одно место осталось свободным. Первоначально фишки расставлены так, как на рисунке справа. Можно ли, последовательно сдвигая фишки на свободное место, получить расстановку фишек на рисунке слева?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	$*$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	$*$

Если задача 1.8.1 не получается, то читайте дальше.

Пусть f — перестановка множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Говорят, что пара (i, j), где $1 \leqslant i, j \leqslant n$, образует *беспорядок* для перестановки f, если $i < j$, но $f(i) > f(j)$. Перестановка называется *чётной*, если общее число её беспорядков чётно. Перестановка называется *нечётной*, если она не является чётной.

1.8.2. Как зависит чётность цикла длины n

(1) от порядка следования элементов цикла? (2) от n?

1.8.3. (1) Композиция чётной (нечётной) перестановки и транспозиции нечётна (чётна).

(2) Как определить чётность композиции перестановок, зная чётность сомножителей?

1.8.4. Каждое из следующих условий равносильно чётности перестановки:

(1) Перестановку можно представить в виде композиции чётного числа транспозиций.

(2) Любое представление перестановки в виде композиции транспозиций содержит чётное их число.

(3) Перестановку можно представить в виде композиции нескольких циклов длины 3.

1.8.5. (1) Каких перестановок n-элементного множества больше: чётных или нечётных?

(2) В какое минимальное количество транспозиций раскладывается перестановка n-элементного множества, состоящая из k непересекающихся циклов длины больше 1?

1.8.6*. Перестановка x *порождается перестановками* $p_1, p_2, \ldots, p_k$, если $x = x_1 x_2 \ldots x_n$, где для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ найдётся такое $1 \leqslant j \leqslant k$, что $x_i = p_j$.

(1) Множество всех чётных перестановок конечного множества порождается любой парой циклов (длины хотя бы 2 каждый), имеющих ровно один общий элемент и содержащих все элементы множества.

(2) Если nk чётно, $n > 1$, $k > 1$, то циклами $(1\ldots n)$ и $(n\ldots n+k-1)$ порождаются все перестановки множества $\mathscr{R}_{n+k-1}$.

(3) Если nk нечётно, $n > 1$, $k > 1$, то циклами $(1\ldots n)$ и $(n\ldots n+k-1)$ порождаются все чётные перестановки множества $\mathscr{R}_{n+k-1}$ и только они.

1.9. Комбинаторика классов эквивалентности

Этот раздел посвящён подсчёту числа классов эквивалентости (т. е. раскрасок и т. д.). Такой подсчёт подводит читателя к важным понятиям группы и действия группы на множестве, а также к элементарной формулировке леммы Бернсайда. Чтобы сделать этот и другие результаты менее доступными, их обычно формулируют и доказывают на языке абстрактной теории групп. Ср. [А, с. 62, комментарий к задаче 5]. Мы используем преобразования множеств, см. задачу 1.9.7. Изложение в этом разделе улучшено по сравнению с [S2, раздел «Комбинаторика классов эквивалентности»].

Задачи 1.9.1 и 1.9.2 — простые, их можно решить без идей, приводящих к лемме Бернсайда.

Раскраски, совмещающиеся вращением пространства (т. е. движением пространства, сохраняющим ориентацию), считаются одинаковыми (кроме задачи 1.9.1 (3)).

1.9.1. Сколько существует

(1) раскрасок незанумерованных граней куба в красный и серый цвета?

(2) различных (т. е. неизоморфных) неориентированных графов с 4 незанумерованными вершинами?

(3) раскрасок в r цветов незанумерованных вершин правильного тетраэдра? Здесь раскраски, совмещающиеся движением пространства (не обязательно сохраняющим ориентацию), считаются одинаковыми.

(4) раскрасок вершин полного графа на 4 незанумерованных вершинах в r цветов? Здесь раскраски, совмещающиеся перестановкой вершин (т. е. *автоморфизмом*) этого графа, считаются одинаковыми.

1.9.2. Для простого p найдите число замкнутых ориентированных связных p-звенных ломаных (возможно, самопересекающихся), проходящих через все вершины данного правильного p-угольника. Ломаные, совмещающиеся поворотом, неотличимы.

1.9.3. Найдите количество раскрасок карусели из n незанумерованных вагончиков в r цветов (т. е. число раскрасок вершин правильного n-угольника в r цветов, если раскраски, совмещающиеся поворотом, неотличимы) для (1) $n=5$; (2) $n=4$; (3) $n=6$.

Задачу 1.9.3 для произвольного n можно решить способом, аналогичным придуманному вами для малых n (п. 1.5). Однако решение будет громоздким. Приведём более простой (для «очень непростых» n) способ на примере решения задачи 1.9.3 (3).

Назовем *поездом* карусель из *занумерованных* вагончиков. Количество раскрасок поезда из 6 вагончиков в r цветов равно r^6.

Посчитаем двумя способами количество P пар (α, d), в которых $d \in \{0,1,2,3,4,5\}$ и α — раскраска поезда, переходящая в себя при циклическом сдвиге на d вагончиков. Циклический сдвиг на d переводит в себя ровно $r^{\text{НОД}(d,6)}$ раскрасок поезда. Поэтому

$$P = r^6 + r + r^2 + r^3 + r^2 + r.$$

С другой стороны, обозначим через $d(\alpha)$ наименьшую положительную величину циклического сдвига, при котором раскраска α поезда переходит в себя. Тогда количество тех $d \in \{0,1,2,3,4,5\}$, для которых циклический сдвиг на d переводит раскраску α поезда в себя, равно $6/d(\alpha)$. Поэтому

$$P = \sum_{\substack{\text{по всем раскраскам} \\ \alpha \text{ поездов}}} \frac{6}{d(\alpha)} = \sum_{\substack{\text{по всем раскраскам} \\ x \text{ каруселей}}} d(x) \cdot \frac{6}{d(x)} = 6Z.$$

Здесь Z — искомое количество раскрасок.

Второе равенство выполнено, поскольку

• для раскрасок α и α' поезда, переводящихся друг в друга циклическими сдвигами, $d(\alpha) = d(\alpha')$ (эти равные числа обозначаются $d(x)$, где x — соответствующая раскраска карусели);

• количество раскрасок поезда, получающихся циклическими сдвигами из данной раскраски α поезда (т. е. дающих ту же раскраску карусели), равно $d(\alpha)$.

Итак, $X = \dfrac{r^6 + 2r + 2r^2 + r^3}{6}$.

1.9.4. Найдите количество:

(1) раскрасок карусели из n вагончиков в r цветов (см. формализацию и другое решение в п. 1.5);

(2) r-цветных ожерелий из $n = 2k + 1$ бусин (ожерелья считаются одинаковыми, если они совмещаются либо поворотом вокруг центра ожерелья, либо осевой симметрией ожерелья);

(3) раскрасок незанумерованных граней куба в r цветов;

(4) раскрасок незанумерованных вершин куба в r цветов;

(5) раскрасок незанумерованных вершин графа $K_{3,3}$ (п. 2.1) в r цветов. Раскраски считаются одинаковыми, если они совмещаются автоморфизмом этого графа.

Указание к п. (2)—(5). Если не получается, читайте дальше.

1.9.5. Перечислите все вращения куба (т. е. вращения пространства, переводящие куб в себя).

1.9.6. Назовём *замороженной раскраской* раскраску занумерованых граней куба. (Тогда всего имеется r^6 замороженных раскрасок.)

(1) Для каждого вращения s куба найдите количество $\mathrm{fix}(s)$ замороженных раскрасок, переходящих в себя при вращении s.

(2) Найдите количество P пар (α, s), в которых s — вращение куба и α — замороженная раскраска, переходящая в себя при вращении s.

(3) $P = \sum \mathrm{st}\,\alpha$, где $\mathrm{st}\,\alpha$ — количество вращений куба, переводящих в себя замороженную раскраску α, а суммирование ведётся по всем замороженным раскраскам α.

(4) Если существует вращение, переводящее замороженную раскраску α в замороженную раскраску α', то количество таких вращений равно $\mathrm{st}\,\alpha$.

(5) Для замороженных раскрасок α и α', переходящих друг в друга при некотором вращении, $\mathrm{st}\,\alpha = \mathrm{st}\,\alpha'$.

(Эти равные числа обозначаются $\mathrm{st}\,x$, где x — соответствующая раскраска незанумерованных граней куба.)

(6) $P = \sum \mathrm{st}\,x \cdot N_x$, где N_x — количество замороженных раскрасок, отвечающих раскраске x, а суммирование ведется по всем раскраскам x незанумерованных граней.

(7) $\mathrm{st}\,x \cdot N_x$ равно количеству вращений куба для любой раскраски x.

Как сформулировать общий результат, который можно было применять вместо повторения намеченных решений задач 1.9.4 (1, 3)?

1.9.7. Лемма Бернсайда. *Пусть заданы конечное множество M и семейство $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ преобразований этого множества, замкнутое относительно взятия композиции и взятия обратного элемента. Назовем элементы множества M* эквивалентными, *если один можно перевести в другой одним из данных преобразований. Тогда количество клас-*

сов эквивалентности равно $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{fix}(g_k)$, *где* $\operatorname{fix}(g_k)$ — *количество элементов множества* M, *которые преобразование* g_k *переводит в себя.*

1.9.8. Найдите количество графов с n вершинами с точностью до изоморфизма. (Ответ можно оставить в виде суммы.)

1.9.9. (1) Найдите количество b_n отображений $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ с точностью до перестановки переменных.

(2) Докажите, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!\,b_n}{2^{2^n}}$, и найдите этот предел.

1.10. Подсказки

1.1.1. (1) Постройте биекцию (т. е. взаимно однозначное соответствие) $\binom{\mathscr{R}_n}{k} \to \binom{\mathscr{R}_n}{n-k}$ между семействами k-элементных и $(n-k)$-элементных подмножеств множества $\mathscr{R}_n$.

1.1.5. (1) Ответ: $\begin{cases} 1, & n=0; \\ 0, & n\neq 0. \end{cases}$

(2) Докажите, что $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$.

(3) Докажите, что $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

(4) Используйте правило Паскаля (задача 1.1.2 (1)).

(5) Решается аналогично предыдущей задаче.

(6) Ответ:

$$\begin{cases} 1, & \text{если } n=3k, \\ -1, & \text{если } n=3k+1, \\ 0, & \text{если } n=3k-1. \end{cases}$$

1.1.6. Будут полезны *тригонометрическая форма комплексного числа*

$$a+bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \text{где} \quad r=\sqrt{a^2+b^2} \quad \text{и} \quad \varphi - \operatorname{arctg}\frac{b}{a} \in \{0,\pi\},$$

и *формула Муавра*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

1.3.2. (1) Ответ: 57.

1.4.1. Сначала расставьте нескольких коней, чтобы каждый бил *одного* другого. Затем расставьте нескольких коней, чтобы каждый бил *двух* других.

1.4.3. (2) Ответ: наименьшее $n=n(k)$, для которого $\binom{n}{[n/2]} \geqslant k$.

1.4.4. Ответ: n.

1.4.7. (1) Ответ: $1, 3, 1$. (2) Ответ: $1, 7, 7, 1$.

(3) Ответ: $(2^n-1)(2^{n-1}-1)/3$.

(4) Используйте ортогональное дополнение.

(5) Выбрать в n-мерном линейном пространстве над $\mathbb{Z}_2$ упорядоченную пару линейно независимых векторов можно $(2^n-1)(2^n-2)$ способами.

(6) Выбрать в n-мерном линейном пространстве над $\mathbb{Z}_2$ упорядоченный набор из k линейно независимых векторов можно $(2^n-2^0)\times \times(2^n-2^1)\cdot\ldots\cdot(2^n-2^{k-1})$ способами.

1.5.2. (1) Ответ: $\sum\limits_{d|n}\varphi(d)=n$.

1.5.3. (1) Для раскраски α карусели рассмотрите все возможные значения периода $d(\alpha)$ (он определен после задачи 1.5.3).

1.5.6. (2) Выразите ответ через $T_k(10)$, $k=1,2,3,4$.

1.6.3. Сначала докажите, что каждая страна участвует не менее чем в трёх блоках.

1.6.6. Используйте то, что среди чисел $k+1, k+2, \ldots, 2k, 2k+1$ ни одно не равно сумме двух других.

1.7.1. Ответ: через 105 минут.

1.7.2. Ответы: (1) (132); (2) (123); (3) (132); (4) id; (5) (23); (6) (1345); (7) (123456789).

1.7.4. Ответ: нужной перестановки порядка 11 не существует, остальные существуют.

1.7.5. Ответ: НОК$(n_1, \ldots, n_k)$.

1.7.6. Ответы: (1) 20; (2) $4\binom{6}{3}/2=40$; (3) $10!/4!$.

1.7.8. Ответ: например, (12) и $(123\ldots n)$.

1.7.9. (3) Ответ: $(N-1, N, N+1)$.

1.8.1. Ответы: (1) нет; (2) нет; (3) нет.

1.8.2. Ответ: цикл длины n чётен при n нечётном и нечётен при n чётном.

1.8.3. (2) Просуммируйте чётности сомножителей по модулю 2.

1.8.5. Ответы: (1) поровну; (2) $n-k$.

1.9.1. Ответы: (1) 10; (2) 11; (3), (4) $\dfrac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{24}$.

1.9.2. Ответ: $p-2+\dfrac{(p-1)!+1}{p}$.

1.9.3. Ответы: (1) $\dfrac{r^5+4r}{5}$; (2) $\dfrac{r^4+r^2+2r}{4}$; (3) $\dfrac{r^6+r^3+2r^2+2r}{6}$.

1.9.4. (1) Ответ: $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{d|n}\varphi\left(\dfrac{n}{d}\right)r^d$. Функция Эйлера $\varphi(n)$ определена в п. 1.2.

1.11. Указания

1.1.1. (1) Каждому k-элементному множеству поставим в соответствие его дополнение до всего множества $\mathcal{R}_n$. Построенное таким образом отображение является биекцией (т. е. взаимно однозначным соответствием). Следовательно, количества k-элементных и $(n-k)$-элементных подмножеств равны.

(2) Количество всех подмножеств множества $\mathcal{R}_n$ равно 2^n. Количество подмножеств, состоящих ровно из k элементов, равно $\binom{n}{k}$. Отсюда $\binom{n}{0}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$.

1.1.2. (2) Количество разбиений множества $\mathcal{R}_{n+1}$ на $k+1$ частей,

• в которых $\{n+1\}$ — отдельная часть, равно $\left\{{n \atop k}\right\}$;

• в которых нет отдельной части $\{n+1\}$, равно $(k+1)\left\{{n \atop k+1}\right\}$.

1.1.3. (1) Ответ: 233.

Обозначим через A_n количество подмножеств множества $\mathcal{R}_n$, не содержащих двух подряд идущих чисел. Количество таких подмножеств,

• не содержащих число n, равно A_{n-1}, так как такие подмножества являются также подмножествами в $\mathcal{R}_{n-1}$;

• содержащих число n, равно A_{n-2}, так как такие подмножества при выкидывании числа n становятся подмножествами в $\mathcal{R}_{n-1}$.

Поэтому $A_n=A_{n-1}+A_{n-2}$. Очевидно, $A_1=2$ и $A_2=3$. Вычисляя последовательно $A_3, A_4, \ldots, A_{11}$, получаем $A_{11}=233$.

(2) Ответ: 927. Указание: $A_n=A_{n-1}+A_{n-2}+A_{n-3}$.

1.1.5. (1) Используя бином Ньютона, получаем, что при $n>0$ сумма равна $(1-1)^n=0^n=0$.

(2) Преобразуем по отдельности каждое слагаемое:

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{k+1}\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{1}{n+1}\,\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!}=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}.$$

Итого имеем:

$$\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}=$$
$$=\frac{\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\ldots+\binom{n+1}{n+1}}{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

(3) Действительно,

$$k\binom{n}{k}=k\cdot\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=n\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}=n\binom{n-1}{k-1}.$$

Итого имеем:

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n}=$$
$$=n\left(\binom{n-1}{0}+\ldots+\binom{n-1}{n-1}\right)=n\cdot 2^{n-1}.$$

(4) Применяя правило Паскаля, получаем:

$$\binom{n}{k}+\binom{n+1}{k+1}+\ldots+\binom{n+m}{k+m}=$$
$$=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}+\binom{n+1}{k+1}+\ldots+\binom{n+m}{k+m}-\binom{n}{k-1}=$$
$$=\binom{n+1}{k}+\binom{n+1}{k+1}+\ldots+\binom{n+m}{k+m}-\binom{n}{k-1}=$$
$$=\binom{n+2}{k+1}+\binom{n+2}{k+2}+\ldots+\binom{n+m}{k+m}-\binom{n}{k-1}=\ldots$$
$$\ldots=\binom{n+m}{k+m-1}+\binom{n+m}{k+m}-\binom{n}{k-1}=\binom{n+m+1}{k+m}-\binom{n}{k-1}.$$

(5) *Построение биекции*. Для каждого $k=0,\ldots,n$ обозначим через A_k семейство множеств из $\binom{\mathscr{R}_{2n}}{n}$, содержащих ровно k элементов из подмножества $\mathscr{R}_n\subset\mathscr{R}_{2n}$:

$$A_k:=\left\{A\in\binom{2n}{n}:|A\cap\mathscr{R}_n|=k\right\}.$$

Количество элементов в A_k равно произведению количеств k-элементных подмножеств в $\mathscr{R}_n$ и $(n-k)$-элементных подмножеств в $\{n+1,\ldots\ldots,2n\}$, т. е.

$$|A_k|=\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{k}=\binom{n}{k}^2.$$

Так как

$$\binom{\mathscr{R}_{2n}}{n}=\bigsqcup_{k=0}^{n}A_k,\quad\text{то}\quad\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}|A_k|=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

Другая запись этого решения. Определим отображение

$$f:\binom{\mathscr{R}_{2n}}{n}\to\bigsqcup_{j=0}^{n}\binom{\mathscr{R}_n}{j}\times\binom{\mathscr{R}_n}{n-j}$$

формулой $f(A):=(A\cap\mathscr{R}_n,(-n+A)\cap\mathscr{R}_n)$ и отображение g в противоположную сторону — формулой $g(X,Y):=X\cup Y$. Остаётся проверить, что f и g взаимно обратны.

Решение с использованием бинома Ньютона. Рассмотрим тождество $(1+x)^{2n}=(1+x)^n\cdot(1+x)^n$. Коэффициент при x^n у многочлена в левой части в силу бинома Ньютона равен $\binom{2n}{n}$. В правой части коэффициент при x^n равен

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

Действительно, чтобы «получить» x^n, надо выбрать x^k из левой скобки и x^{n-k} из правой скобки.

(7) Напомним, что два многочлена называются *сравнимыми по модулю многочлена* P, если их разность делится на P. Обозначение: $f\equiv g \pmod{P}$.

Данная сумма является коэффициентом при x^{2n} у многочлена

$$\begin{aligned}
&x^{2n}(1-x)^{2n}+x^{2n-1}(1-x)^{2n-1}+\ldots+x(1-x)+1=\\
&\qquad=\frac{1-x^{2n+1}(1-x)^{2n+1}}{x^2-x+1}=(1-x^{2n+1}(1-x)^{2n+1})\frac{1+x}{1+x^3}=\\
&\qquad=(1-x^{2n+1}(1-x)^{2n+1})(1+x)\cdot(1-x^3+x^6-x^9+\ldots)\equiv\\
&\qquad\equiv(1+x)\cdot(1-x^3+x^6-x^9+\ldots)\pmod{x^{2n}}.
\end{aligned}$$

Здесь первое равенство получено применением формулы для суммы геометрической прогрессии.

(8) Данная сумма S является коэффициентом при x^n у многочлена

$$\begin{aligned}
&(1+x)^{2n}+2(1+x)^{2n-1}+\ldots+2^n(1+x)^n=\\
&\qquad=(1+x)^{2n}\left(1+\frac{2}{1+x}+\frac{2^2}{(1+x)^2}+\ldots+\frac{2^n}{(1+x)^n}\right)=\\
&\qquad=(1+x)^{2n}\,\frac{\dfrac{2^{n+1}}{(1+x)^{n+1}}-1}{\dfrac{2}{1+x}-1}=(1+x)^{2n}\,\frac{\dfrac{2^{n+1}}{(1+x)^{n}}-(1+x)}{2-(1+x)}=\\
&\qquad=\left(2^{n+1}(1+x)^n-(1+x)^{2n+1}\right)\frac{1}{1-x}=\\
&\qquad=\left(2^{n+1}(1+x)^n-(1+x)^{2n+1}\right)(1+x+x^2+\ldots).
\end{aligned}$$

Здесь первое равенство получено применением формулы для суммы геометрической прогрессии. Таким образом,

$$\begin{aligned}
S&=2^{n+1}\left(\binom{n}{0}+\ldots+\binom{n}{n}\right)-\left(\binom{2n+1}{0}+\ldots+\binom{2n+1}{n}\right)=\\
&=2^{n+1}\cdot 2^n-\frac{1}{2}\cdot 2^{2n+1}=2^{2n+1}-2^{2n}=2^{2n}.
\end{aligned}$$

1.1.6. Рассмотрите $\sum\limits_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\binom{n}{k}$ для (1) $\varepsilon=\pm1$; (2) $\varepsilon=\pm1,\pm i$; (3) $\varepsilon=\cos(2\pi k/3)+i\sin(2\pi k/3)$, $k=1,2,3$. Далее всюду $n\neq 0$.

(1) Ответ: $\dfrac{(1+1)^n+(1-1)^n}{2}=2^{n-1}$.

(2) Получаем $\dfrac{(1+1)^n+(1+i)^n+(1-1)^n+(1-i)^n}{4}$. Используя тригонометрическую форму комплексного числа и формулу Муавра, преобразуем это выражение к $2^{n-2}+2^{n/2-1}\cos\left(\dfrac{\pi n}{4}\right)$.

Ответ: $2^{n-2}+2^{[n/2]-1}f(n)$, где $f(8k+r)$ есть $1, 1, 0, -1, -1, -1, 0, 1$ для $r=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ соответственно;

(3) Получаем $\dfrac{(1+1)^n+(1+\varepsilon)^n+(1+\varepsilon^2)^n}{3}$. Аналогично преобразуем это выражение к $\dfrac{2^n+2\cos(\pi n/3)}{3}$.

Ответ: $(2^n+g(n))/3$, где $g(6k+r)$ есть $2, 1, -1, -2, -1, 1$ для $r=$ $=0, 1, 2, 3, 4, 5$ соответственно.

Другое решение для п. (1). Сумма $\sum\limits_k\dbinom{n}{2k}$ — это количество подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ с чётным числом элементов. Для каждого из таких подмножеств возможны две ситуации:

• элемент n содержится в подмножестве, тогда этому подмножеству соответствует подмножество множества $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ с нечётным числом элементов;

• элемент n не содержится в подмножестве, тогда этому подмножеству соответствует подмножество множества $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ с чётным числом элементов.

Поэтому существует биекция между подмножествами множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ с чётным числом элементов и подмножествами множества $\{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Следовательно, наша сумма равна 2^{n-1}.

1.2.1. (1) Для каждого j, делящего 1001, обозначим через A_j множество чисел от 1 до 1001, делящихся на j. Тогда

$$|A_j|=\frac{1001}{j} \quad \text{и} \quad A_{p_1}\cap\ldots\cap A_{p_k}=A_{p_1\cdot\ldots\cdot p_k}$$

для различных простых чисел $p_1, \ldots, p_k$. Следовательно, искомое количество чисел равно

$$\begin{aligned}
&|\{1, \ldots, 1001\}\setminus(A_7\cup A_{11}\cup A_{13})|=\\
&\qquad=1001-|A_7|-|A_{11}|-|A_{13}|+|A_7\cap A_{11}|+|A_7\cap A_{13}|+\\
&\qquad\qquad+|A_{11}\cap A_{13}|-|A_7\cap A_{11}\cap A_{13}|=\\
&\qquad=1001-|A_7|-|A_{11}|-|A_{13}|+|A_{77}|+|A_{91}|+|A_{143}|-|A_{1001}|=\\
&\qquad\qquad=1001-143-91-77+7+11+13-1=720.
\end{aligned}$$

(2) Для любого $j \mid n$ определим A_j как подмножество множества $\mathcal{R}_n$ чисел, которые делятся на j. Ясно, что

$$|A_j| = \frac{n}{j} \quad \text{и} \quad A_{p_1} \cap \ldots \cap A_{p_k} = A_{p_1 \cdot \ldots \cdot p_k}$$

для различных простых $p_1, \ldots, p_k$.

Обозначим

$$M_k := \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant s} \frac{n}{p_{j_1} p_{j_2} \cdot \ldots \cdot p_{j_k}}.$$

По определению $\varphi(n) = |\mathcal{R}_n \setminus (A_{p_1} \cup \ldots \cup A_{p_s})|$, откуда по формуле включений и исключений (см. утверждение 1.2.3) получаем, что

$$\varphi(n) = M_0 - M_1 + M_2 - \ldots = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_s}\right).$$

1.2.2. (1) Обозначим через A_j множество точек, покрываемых j-м ковром, через $|A_j|$ площадь j-го ковра.

Пусть утверждение неверно, т. е. для любых j, k выполнено неравенство $|A_j \cap A_k| < 4$. Следовательно,

$$24 \geqslant |A_1 \cup A_2 \cup A_3| > |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - \\ - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| > 12 + 12 + 12 - 4 - 4 - 4 = 24,$$

где второе неравенство следует из неравенства Бонферрони (см. утверждение 1.2.3 (3)). Полученное противоречие завершает доказательство.

1.2.4. (1) Обозначим через n число 10, а через U — множество всех перестановок книг, через A_j множество перестановок книг, при которых j-я книга остаётся на месте. Выберем произвольное k-элементное подмножество $S \subset \mathcal{R}_n$. Тогда $\bigcap\limits_{j \in S} A_j$ состоит из тех перестановок книг, при которых каждая из книг $j \in S$ остаётся на месте. Значит,

$$\left|\bigcap_{j \in S} A_j\right| = (n-k)(n-k-1)\ldots 1 = (n-k)!.$$

Применяя формулу включений и исключений 1.2.3 (1), получаем

$$|U \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = \\ = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!}.$$

(2) Чтобы выбрать нужную перестановку, можно выбрать те 4 книги из 10, которые остаются на месте, а затем перестановку оставших-

ся книг, при которой ни одна книга не остается на месте. Поэтому и по п. (1) искомое количество равно

$$\binom{10}{4}\left(6!-\frac{6!}{1!}+\frac{6!}{2!}-\frac{6!}{3!}+\ldots+\frac{6!}{6!}\right)>$$
$$>\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{24}\left(\frac{6!}{2}-\frac{6!}{6}\right)=210\cdot 240=7\cdot 7200>50\,000.$$

1.2.5. (1) Пусть U — множество всех расселений туристов, A_j — множество расселений туристов, при которых j-й домик пуст.

Количество расселений, при которых все домики с номерами из множества S пусты, равно $\left|\bigcap\limits_{j\in S} A_j\right|=(5-|S|)^{20}$. По формуле включений и исключений 1.2.3 (1) получаем:

$$|U\setminus(A_1\cup\ldots\cup A_5)|=\sum_{k=0}^{5}(-1)^k\binom{n}{k}(5-k)^{20}=$$
$$=5^{20}-\binom{5}{1}4^{20}+\binom{5}{2}3^{20}-\binom{5}{3}2^{20}+\binom{5}{4}1^{20}.$$

(2) Пусть $U={\mathscr{R}_n}^{\mathscr{R}_k}$ — множество всех отображений из $\mathscr{R}_k$ в $\mathscr{R}_n$. Для каждого $j=1,\ldots,n$ обозначим через $A_j=(\mathscr{R}_n\setminus\{j\})^{\mathscr{R}_k}$ множество отображений из $\mathscr{R}_k$ в $\mathscr{R}_n$, образ которых не содержит элемент j. Тогда множество сюръекций из $\mathscr{R}_k$ в $\mathscr{R}_n$ — это множество $U\setminus(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)$. При этом $|\bigcap\limits_{j\in S} A_j|=(n-|S|)^k$. Применяя формулу включений и исключений 1.2.3 (1), получаем:

$$|U\setminus(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)|=n^k-\binom{n}{1}(n-1)^k+\binom{n}{2}(n-2)^k-\ldots+\binom{n}{n}\cdot 1^k.$$

1.3.2. (1) Если взять $7\cdot 8$ шаров, то существует возможность вытащить по 8 шаров каждого цвета. Если же взять $7\cdot 8+1$ шаров, то по принципу Дирихле найдётся цвет, в который покрашено больше чем $\frac{57}{7}>8$, т. е. 9 шаров.

1.3.3. (1) Очевидно, количество чисел, удовлетворяющих условию утверждения, равно 9000. Для каждого $j=0,1,\ldots,6$ обозначим через a_j число всех 7-значных чисел, заканчивающихся на три нуля и имеющих остаток от деления на 7, равный j. Тогда $\sum\limits_{j=0}^{6} a_j=9000$. Поэтому существует $j_0\in\{1,\ldots,6\}$, такое что $a_{j_0}\geqslant\frac{9000}{7}>1200$, что доказывает утверждение задачи.

Замечание. Разбив числа на семёрки, несложно явно найти, сколько есть чисел с каждым остатком. Принцип Дирихле позволяет дать немного более простое решение.

(2) Аналогично п. (1).

1.3.4. (1) Рассмотрим последовательность чисел $\underbrace{11\ldots11}_{n}$, $n=1,2,\ldots$ $\ldots,1998$. По принципу Дирихле среди этих чисел найдутся два числа, имеющих один и тот же остаток при делении на 1997. Тогда их разность делится на 1997. Она равна $\underbrace{11\ldots11}_{k}\cdot 10^j$, где $k>0$, $j\geqslant 0$. Осталось заметить, что 10 взаимно просто с 1997. Значит, число $\underbrace{11\ldots11}_{k}$ также делится на 1997.

(2) Аналогично п. (1).

1.3.5. (1) Обозначим дробную часть числа x через $\{x\}$. Разделим отрезок $[0,1]$ на N равных отрезков. Тогда из чисел $\{x_1\},\ldots,\{x_{N+1}\}$ два попадают в один отрезок. Следовательно, расстояние между ними не больше чем $\frac{1}{N}$.

(2) Рассмотрим максимальный и минимальный элементы в таблице. Тогда расстояние между ними по клеткам таблицы (т. е. минимальное количество шагов между клетками, если можно двигаться только в соседнюю по стороне клетку) не более чем 18. Следовательно, разность между ними не превосходит 90. Среди 100 чисел, принимающих 91 значение, по принципу Дирихле найдутся два равных.

1.3.6. (1) Рассмотрим произвольное натуральное число $N>1$ и рассмотрим последовательность $\{n\alpha\}$, $1\leqslant n\leqslant N+1$. По утверждению 1.3.5 (1) найдутся $1\leqslant j<k\leqslant N+1$ такие, что $|\{k\alpha\}-\{j\alpha\}|\leqslant\frac{1}{N}$.

Возьмём $p=[k\alpha]-[j\alpha]$, $q=k-j$. Тогда:

$$|(k-j)\alpha-p|=|k\alpha-[k\alpha]-(j\alpha-[j\alpha])|=|\{k\alpha\}-\{j\alpha\}|\leqslant\frac{1}{N}\Rightarrow\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{qN}.$$

(2) Докажем по индукции, что существует k пар чисел, удовлетворяющих требуемому неравенству. База индукции следует из п. (1):

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{qN}\leqslant\frac{1}{q^2}.$$

Пусть мы нашли дроби $\frac{p_1}{q_1}$, $\ldots$, $\frac{p_k}{q_k}$, удовлетворяющие требуемому условию. Рассмотрим N такое, что $\frac{1}{N}<\min\limits_{i=1,\ldots,k}\left|\alpha-\frac{p_i}{q_i}\right|$. Применив п. (1), найдём такие p,q, что

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{qN}\leqslant\frac{1}{N}<\left|\alpha-\frac{p_i}{q_i}\right|$$

для всех $i=1,\ldots,k$. Поэтому дробь $\frac{p}{q}$ отличается от всех предыдущих дробей. С другой стороны,

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{qN}\leqslant\frac{1}{q^2}.$$

Следовательно, количество таких дробей бесконечно.

1.3.7. Каждому числу $k = 1, \ldots, 101$ последовательности сопоставим пару (b_k, c_k), где

• b_k — длина набольшей *убывающей* подпоследовательности, последним членом которой является k,

• c_k — длина наибольшей *возрастающей* подпоследовательности, последним членом которой является k.

Можно проверить, что разным числам $j \neq k$ соответствуют различные пары чисел (b_j, c_j) и (b_k, c_k). Предположим, что нет ни возрастающей, ни убывающей подпоследовательности длины 11. Тогда мы получаем 101 различную пару чисел, причём элементы каждой пары лежат в пределах от 1 до 10. Последнее противоречит принципу Дирихле.

1.3.8. (1) Количество способов выбрать какое-то (отличное от нуля) количество яблок из десяти равно $2^{10} - 1 = 1023$. Любой такой набор весит не более 1000 г. Значит, какие-то два набора отличаются не более чем на 1 г. Выкинем из них общие яблоки, а остальное положим в тарелки (одна из тарелок при этом может оказаться пустой).

(2) Количество способов выбрать 5 яблок из десяти равно $\binom{10}{5} = 252$. По условию, каждый такой набор весит не более 500 г. Значит, какие-то два набора отличаются не более чем на 2 г. Выкинем из них общие яблоки, а остальное положим в тарелки.

1.3.9. $\left(\sum\limits_k \varepsilon_k v_k\right)^2 = n + 2\sum\limits_{k<l} \varepsilon_k \varepsilon_l v_k \cdot v_l$. Суммируя по всем 2^n наборам $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, получаем $n \cdot 2^n$. Значит, существует набор, для которого

(1) $\left(\sum\limits_k \varepsilon_k v_k\right)^2 \leqslant n$,

(2) $\left(\sum\limits_k \varepsilon_k v_k\right)^2 \geqslant n$.

1.4.1. См. подсказку. Потом расставьте нескольких коней, чтобы каждый бил *трёх* других. Ответ см. на рис. 1.

1.4.3. (1) *Первый способ*. Индукцией по n с применением правила Паскаля докажите, что для любого n величина $\binom{n}{k}$ как функция от k возрастает при $k \leqslant n/2$ и убывает при $k \geqslant n/2$.

Второй способ. Рассмотрите $\binom{n}{k} \Big/ \binom{n}{k+1}$ и используйте явную формулу для $\binom{n}{k}$.

(2) Для n-элементного множества семейство подмножеств $\binom{n}{[n/2]}$ удовлетворяет требуемому условию.

Докажем, что больше чем $\binom{n}{[n/2]}$ подмножеств в таком семействе быть не может.

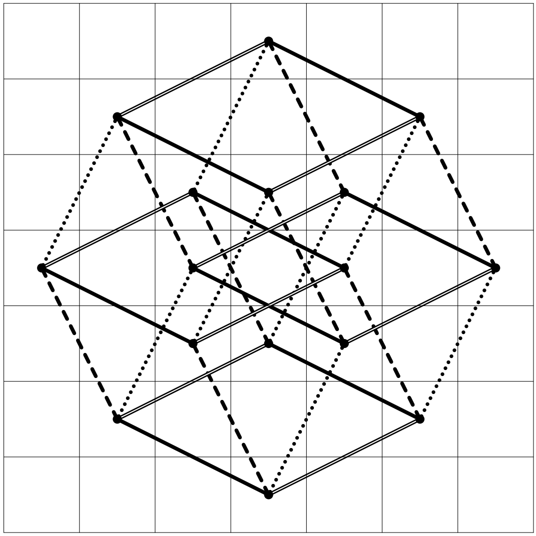


Рис. 1

Для каждой перестановки $(a_1, \ldots, a_n)$ множества $\mathscr{R}_n$ рассмотрим цепочку подмножеств

$$\{a_1\} \subset \{a_1, a_2\} \subset \ldots \subset \{a_1, \ldots, a_n\} = \mathscr{R}_n.$$

В любой такой цепочке имеется не более одного подмножества из нашего семейства. Всего перестановок $n!$. Подмножество из a элементов участвует в цепочках для

$$a!\,(n-a)! \geqslant [n/2]! \cdot (n-[n/2])!$$

перестановок. Поэтому число подмножеств в нашем семействе не превосходит

$$\frac{n!}{[n/2]!\,(n-[n/2])!} = \binom{n}{[n/2]}.$$

Указание к другому доказательству. Рассмотрим все подмножества нашего семейства S, имеющие наименьшее число a элементов. Если $a < [n/2]$, то можно в S заменить их на такое же (или большее) количество $(a+1)$-элементных подмножеств, чтобы в полученном семействе по-прежнему ни одно из множеств не содержало другое.

(Действительно, каждое a-элементное подмножество из S содержится в $n-a$ подмножествах, состоящих из $a+1$ элемента. Ни одно из последних $(a+1)$-элементных подмножеств не лежит в S. С другой стороны, каждое $(a+1)$-элементное подмножество содержит не более a подмножеств, состоящих из a элементов и лежащих в S. Так как $n-a \geqslant a+1$, количество $(a+1)$-элементных подмножеств, содержащих подмножество из S, не меньше количества a-элементных подмножеств из S. Заменяем вторые на первые.)

Поэтому существует экстремальное семейство, каждое множество в котором имеет не менее $[n/2]$ элементов. Аналогично, заменяя подмножества с наибольшим числом $a > [n/2]$ элементов на $(a-1)$-элементные, получаем экстремальное семейство, в котором каждое множество имеет ровно $[n/2]$ элементов.

1.4.7. (5) Количество $(k+1)$-мерных подпространств пространства $\mathbb{Z}_2^{n+1}$,

- содержащихся в $\mathbb{Z}_2^n \subset \mathbb{Z}_2^{n+1}$, равно $\begin{vmatrix} n \\ k+1 \end{vmatrix}$;
- не содержащихся в $\mathbb{Z}_2^n \subset \mathbb{Z}_2^{n+1}$, равно $2^{n-k}\begin{vmatrix} n \\ k \end{vmatrix}$.

Докажем второе. $(k+1)$-Мерное подпространство L пространства $\mathbb{Z}_2^{n+1}$, не содержащееся в $\mathbb{Z}_2^n$, пересекается с $\mathbb{Z}_2^n$ по k-мерному подпространству $L \cap \mathbb{Z}_2^n$. Подпространство L задается пересечением $L \cap \mathbb{Z}_2^n$ и вектором, лежащим в ортогональном дополнении к $L \cap \mathbb{Z}_2^n$ в $\mathbb{Z}_2^{n+1}$, но не лежащим в ортогональном дополнении к $L \cap \mathbb{Z}_2^n$ в $\mathbb{Z}_2^n$. Таких векторов $2^{n+1-k} - 2^{n-k} = 2^{n-k}$.

Замечание. Справедлива также формула

$$\begin{vmatrix} n+1 \\ k+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n \\ k \end{vmatrix} + 2^{k+1}\begin{vmatrix} n \\ k+1 \end{vmatrix}.$$

См. п. (7).

(7) Ответ: $\dfrac{(2^n-1)(2^{n-1}-1)\ldots(2^{n-k+1}-1)}{(2^k-1)(2^{k-1}-1)\ldots(2^1-1)}$.

1.5.1. (1) Если $n=1$, то по определению $\sum\limits_{d|n} \mu(n) = \mu(1) = 1$. Иначе $\mu(d) \neq 0$, только если d является произведением k простых сомножителей. Для такого d выполнено равенство $\mu(d) = (-1)^k$.

Обозначим через M_k множество всех делителей числа n, являющихся произведением k различных простых чисел, а через s — общее количество различных простых делителей числа n (единицу будем считать делителем n с нулём простых делителей). Тогда имеем:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{k=0}^{s} \sum_{d \in M_k} \mu(d) = \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k}(-1)^k = 0,$$

последнее равенство выполнено при $s > 0$ по утверждению 1.1.5 (1).

(2) В обозначениях указания к предыдущему пункту получаем, что искомая сумма равна

$$\sum_{k=0}^{[s/2]} \sum_{d \in M_{2k}} \mu(d) = \sum_{k=0}^{[s/2]} |M_{2k}| = \sum_{k=0}^{[s/2]} \binom{s}{2k} = 2^{s-1};$$

последнее равенство справедливо по утверждению 1.1.6 (1).

(3) Имеем:

$$\sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{m|\frac{n}{d}} f(m) = \sum_{d|n} \sum_{m|\frac{n}{d}} \mu(d) f(m) =$$
$$= \sum_{m|n} \sum_{d|\frac{n}{m}} \mu(d) f(m) = \sum_{m|n} f(m) \sum_{d|\frac{n}{m}} \mu(d) = f(n).$$

1.5.3. (1) Укажем решения для $n = 4, 6$.

Пусть $n = 4$. Если раскраска α карусели переходит в себя в результате трёх циклических сдвигов, то она переходит в себя и в результате одного циклического сдвига. Поэтому $d(\alpha) = 1$, 2 или 4. Докажем следующие утверждения.

• *Количество раскрасок каруселей с* $d(\alpha) = 1$ *равно* r.

Очевидно, для произвольной одноцветной раскраски α карусели $d(\alpha) = 1$. Обратно, если $d = 1$, то раскраска карусели переходит в себя при циклическом сдвиге. Следовательно, все вагончики одноцветные. Значит, количество раскрасок карусели в этом случае равно r.

• *Количество раскрасок каруселей с* $d(\alpha) = 2$ *равно* $\frac{r^2 - r}{2}$.

Раскраска карусели имеет период 2 тогда и только тогда, когда она имеет вид $abab$, $a \neq b$. Следовательно, количество раскрасок карусели в этом случае равно $\binom{r}{2}$.

• *Количество раскрасок каруселей с* $d(\alpha) = 4$ *равно* $\frac{r^4 - r^2}{4}$.

Количество последовательностей длины 4 равно r^4. Такая последовательность имеет период 4 тогда и только тогда, когда она имеет вид, отличный от $abab$. Поэтому количество последовательностей длины 4 равно $r^4 - r^2$. Так как раскраске карусели периода 4 соответствует ровно 4 последовательности периода 4, то количество таких раскрасок карусели равно $\frac{r^4 - r^2}{4}$.

Итого: количество раскрасок карусели равно

$$\frac{r^4 - r^2}{4} + \frac{r^2 - r}{2} + r = \frac{r^4 + r^2 + 2r}{4}.$$

Пусть $n = 6$. В этом случае период раскраски карусели равен $1, 2, 3$ или 6. Вычислим количество раскрасок карусели в каждом из этих случаев. Получим, что искомое количество раскрасок карусели равно

$$\frac{r^6 - r^3 - r^2 - r}{6} + \frac{r^3 - r}{3} + \frac{r^2 - r}{2} + r = \frac{r^6 + r^3 + 2r^2 + 2r}{6}.$$

1.5.4. (1) Пусть дана последовательность длины n и периода d. Разделим n на d с остатком: $n = dq + m$. Последовательность переходит в себя в результате d циклических сдвигов. Тогда она переходит в себя и при циклическом сдвиге на $2d$, $3d$, ..., qd, а значит, и на $m = n - dq$. Если $m > 0$, то мы получаем противоречие с определением периода. Иначе n делится на d.

(2) Действительно, последовательности $a_1, \ldots, a_d$ поставим в соответствие последовательности $a_1 \ldots a_d a_1 \ldots a_d \ldots a_1 \ldots a_d$, где $a_1, \ldots, a_d$ повторяется $\frac{n}{d}$ раз. Несложно показать, что это биекция, а значит, соответствующие количества последовательностей равны.

1.5.5. (1) Напомним, что через $\mathscr{R}_r^n$ обозначается множество всех последовательностей длины n из $\mathscr{R}_r$. Обозначим через $\mathscr{M}_r(n, d)$ множество последовательностей длины n и периода d из $\mathscr{R}_r$. Из утверждения 1.5.4 следует, что $\mathscr{R}_r^n = \bigcup\limits_{d|n} \mathscr{M}_r(n, d)$. Из задачи 1.5.4 (2) следует, что $|\mathscr{M}_r(n, d)| = |\mathscr{M}_r(d, d)|$. Следовательно, имеем:

$$r^n = \sum_{d|n} |\mathscr{M}_r(n, d)| = \sum_{d|n} |\mathscr{M}_r(d, d)| = \sum_{d|n} M_r(d).$$

(2) Каждая раскраска карусели из n вагончиков периода l получается из l последовательностей длины n и периода l. Поэтому количество таких раскрасок каруселей равно $\frac{1}{l}|\mathscr{M}_r(n, l)|$. Следовательно,

$$T_r(n) = \sum_{l|n} \frac{1}{l} |\mathscr{M}_r(n, l)| = \sum_{l|n} \frac{1}{l} M_r(l).$$

(3) Применяя формулу обращения Мёбиуса к функции $M_r(n)$, получаем:

$$M_r(n) = \sum_{d|n} \mu(d) r^{\frac{n}{d}}.$$

Отсюда

$$T_r(n) = \sum_{l|n} \frac{1}{l} M_r(l) = \sum_{l|n} \frac{1}{l} \sum_{d|l} \mu(d) r^{\frac{l}{d}}.$$

$$(4)\qquad T_r(n)=\sum_{l|n}\frac{1}{l}\sum_{d|l}\mu(d)r^{\frac{l}{d}}=\sum_{d|l|n}\frac{1}{l}\mu(d)r^{\frac{l}{d}}=\sum_{d|l|n}\frac{r^{\frac{l}{d}}}{\frac{l}{d}}\frac{\mu(d)}{d}\overset{(*)}{=}$$
$$\overset{(*)}{=}\sum_{qd|n}\frac{r^q}{q}\frac{\mu(d)}{d}=\sum_{q|n}\frac{r^q}{q}\sum_{d|\frac{n}{q}}\frac{\mu(d)}{d}\overset{(**)}{=}\sum_{q|n}\frac{r^q}{q}\frac{\varphi\left(\frac{n}{q}\right)}{\frac{n}{q}}=$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{q|n}\varphi\left(\frac{n}{q}\right)r^q=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)r^{\frac{n}{d}},$$

где

- под $\sum\limits_{d|l|n}$ подразумевается суммирование по всем таким парам (d,l), что $d\mid l\mid n$,
- в переходе $(*)$ обозначим $q:=\dfrac{l}{d}$ и заменим суммирование по парам (d,l) на суммирование по парам (q,d),
- под $\sum\limits_{qd|n}$ подразумевается суммирование по всем таким парам (q,d), что $qd\mid n$,
- в переходе $(**)$ используем утверждения 1.2.1 (3) и 1.5.2 (2).

1.5.6. (2) Выбрать 4 цвета из 5 можно пятью способами. Для каждого из этих способов по формуле включения исключения посчитаем количество раскрасок, в которых участвуют все цвета. Таким образом, искомое число равно

$$5\left(T_4(10)-\binom{4}{3}T_3(10)+\binom{4}{2}T_2(10)-\binom{4}{1}T_1(10)\right)\overset{(*)}{=}$$
$$\overset{(*)}{=}\frac{5}{10}(4^{10}-4\cdot3^{10}+6\cdot2^{10}-4+4^5-4\cdot3^5+6\cdot2^5-4+$$
$$+4(4^2-4\cdot3^2+6\cdot2^2-4+4-4\cdot3+6\cdot2-4))=$$
$$=2^{19}-2\cdot3^{10}+7\cdot2^9-2\cdot3^5+3\cdot2^5-4,$$

где $(*)$ — применение утверждения 1.5.5 (4) с перегруппировкой слагаемых.

1.6.1. (2) *Первое решение*. Всего человекозаседаний $40\cdot10=400$. Так как $400/60>6$, по принципу Дирихле найдётся член комиссии, побывавший на 7 заседаниях. На этих заседаниях он встретил 63 человек. По принципу Дирихле двое из них совпадают.

Второе решение. Количество упорядоченных пар различных членов комиссии равно $60\cdot59$. Всего парозаседаний $40\cdot(10\cdot9)=40\cdot90=$ $=60\cdot60>60\cdot59$. Значит, по принципу Дирихле найдётся пара, которая встретилась по крайней мере на двух заседаниях.

(4) (*Это решение написано А. Головановым.*) Обозначим через $\mathrm{fix}(\sigma)$ число неподвижных точек у перестановки σ. Тогда число всех таких пар $(k,\sigma)\in\mathscr{R}_n \times S_n$, что $\sigma(k)=k$, равно

$$\sum_{k=0}^{n} k\cdot P_n(k)=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{fix}(\sigma)=\sum_{k=1}^{n}\Big|\{\sigma\in S_n : \sigma(k)=k\}\Big|=\sum_{k=1}^{n}(n-1)!=n!.$$

1.6.2. Оцените двумя способами количество пар (X,Y), для которых X является

(1) l-элементным; (2) $(k-1)$-элементным

подмножеством n-элементного множества, содержащимся хотя бы в одном подмножестве из $\mathscr{F}$, а Y — подмножеством из F, содержащим X.

(1) Используйте то, что все l-множества должны быть накрыты и что каждое k-множество накрывает ровно $\binom{k}{l}$ из l-множеств.

1.6.3. Ответ: 6. Так как каждая страна участвует не менее чем в трёх блоках, число блоков не меньше 6. Чтобы построить пример с 6 блоками, разбейте страны на группы по 25 стран. Тогда блоки — объединения двух из четырёх групп.

1.6.4. Обозначим $n=97$, $m=19$, количество равнобедренных одноцветных треугольников — через x, а разноцветных — через y. Тогда всего равнобедренных треугольников $x+y=\dfrac{n(n-1)}{2}$. Теперь посчитаем двумя способами количество пар (a,b), где a — равнобедренный треугольник и b — его одноцветная сторона. Для каждой одноцветной стороны имеется три равнобедренных треугольника, в которые она входит. Каждому одноцветному треугольнику отвечает три пары, а не одноцветному — одна. Поэтому $3\left(\dfrac{m(m-1)}{2}+\dfrac{(n-m)(n-m-1)}{2}\right)=3x+y$. Значит, x зависит только от n и m.

1.6.5. Посчитаем количество пар (a,b), где a — отрезок с концами в S и b — точка из S, равноудаленная от его концов. На каждой прямой лежит не более двух точек множества S, поэтому таких пар не больше $n(n-1)$. С другой стороны, каждая точка множества S лежит на хотя бы $\dfrac{k(k-1)}{2}$ перпендикулярах, проведенных к парам точек, равноудаленных от нее. Отсюда $n\dfrac{k(k-1)}{2}\leqslant n(n-1)$.

1.6.6. Найдётся простое число p, большее каждого из данных чисел. Обозначим $k:=[p/3]$ и обозначим через $x_1,\ldots,x_n$ остатки от деления данных чисел на p. Достаточно доказать, что для некоторого $a\in\mathbb{Z}_p$ найдётся более $n/3$ индексов j, для которых

$$ax_j\in I:=\{k+1,k+2,\ldots,2k,2k+1\}\subset\mathbb{Z}_p.$$

Для этого посчитаем двумя способами количество пар $(a, j) \in \mathbb{Z}_p \times \mathscr{R}_n$, для которых $ax_j \in I$. Для каждого j количество таких пар (a, j) равно $|I| = k + 1$. Всего p значений a и n значений j. Значит, найдётся a, для которого имеется не менее $n(k+1)/p > n/3$ таких пар (a, j).

1.6.7. Посчитаем двумя способами количество всех таких пар (a, x), что a — распределение выходных и x — вид работы, по которому в один из дней не будет специалиста при распределении a. Обозначим через n общее число сотрудников. Для каждого вида работ имеется 2^{n-7} распределений выходных, при которых все специалисты по этому виду работ отдыхают в один и тот же день. Так как видов работ 100, количество пар не больше $100 \cdot 2^{n-7} < 2^n$. Общее число распределений выходных равно 2^n. Значит, найдётся распределение выходных, при котором для каждого вида работ не все специалисты по нему отдыхают в один и тот же день.

Решение обобщения. Посчитаем двумя способами количество таких пар (a, x), что a — раскраска и x — подмножество из семейства, одноцветное для a. Обозначим через n число элементов в множестве. Для каждого подмножества имеется 2^{1+n-k} раскрасок, для которых оно одноцветно. Всего не более чем 2^{k-1} подмножеств из семейства. Значит, количество пар не больше $2^{1+n-k+k-1} = 2^n$. Общее число раскрасок равно 2^n. Найдётся раскраска, для которой каждое подможество из семейства одноцветно. Значит, найдётся раскраска, для которой ни одно подмножество из семейства не одноцветно.

Другая запись этого решения. (Здесь достаточно интуитивного понимания того, что такое вероятность.) Раскрасим элементы случайно, независимо и равновероятно в два цвета. Самостоятельно постройте вероятностное пространство, неформально определённое этой фразой. Для данного подмножества из семейства вероятность его одноцветности равна 2^{1-k}. Тогда вероятность одноцветности хотя бы одного подмножества из семейства меньше $2^{k-1}2^{1-k} = 1$. Значит, с положительной вероятностью существует раскраска элементов в два цвета, для которой никакое из l подмножеств не одноцветно. Самостоятельно докажите, что отсюда вытекает утверждение задачи.

1.6.8. (1) Рассмотрим множество из n элементов и его раскраску в чёрный и белый цвет. Обозначим через s число белых вершин. Тогда имеется $n - s$ чёрных вершин. Поэтому количество одноцветных k-элементных подмножеств равно $\binom{s}{k} + \binom{n-s}{k} \geqslant 2\binom{n/2}{k}$. (Это неравенство следует из $\binom{x-1}{k} + \binom{x+1}{k} \geqslant 2\binom{x}{k}$, что доказывается троекратным применением правила Паскаля.) Значит, неодноцветных

k-элементных подмножеств не более $\binom{n}{k} - 2\binom{n/2}{k}$. Поэтому упорядоченных наборов длины l из неодноцветных k-элементных подмножеств не более $\left(\binom{n}{k} - 2\binom{n/2}{k}\right)^l$. Тогда упорядоченных наборов длины l из k-элементных подмножеств, неодноцветных хотя бы для одной двуцветной раскраски, не более

$$2^n\left(\binom{n}{k} - 2\binom{n/2}{k}\right)^l < \binom{n}{k}^l.$$

Значит, найдётся упорядоченный набор длины l из k-элементных подмножеств, среди которых при любой двуцветной раскраске найдётся одноцветное.

Другая запись этого решения. Рассмотрим множество из n элементов и его раскраску в чёрный и белый цвет. Обозначим через s число белых вершин. Тогда имеется $n-s$ чёрных вершин.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, где Ω — множество всех k-элементных подмножеств n-элементного множества, $\mathcal{F}$ – множество всех подмножеств множества Ω, и $\mathcal{P}$ — вероятностная мера, сопоставляющая подмножеству $\{A_1, \ldots, A_s\} \in \mathcal{F}$ число $s/\binom{n}{k}$.

Вероятность того, что данное k-элементное подмножество одноцветно, не меньше

$$\frac{\binom{s}{k} + \binom{n-s}{k}}{\binom{n}{k}} \geqslant 2\frac{\binom{n/2}{k}}{\binom{n}{k}}$$

(неравенство доказывается аналогично предыдущему). Отсюда вероятность того, что данное k-элементное подмножество неодноцветно, не больше $1 - 2\frac{\binom{n/2}{k}}{\binom{n}{k}}$.

Теперь рассмотрим новое вероятностное пространство схемы из l испытаний Бернулли для $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Самостоятельно постройте вероятностное пространство, неформально определённое этой фразой. Тогда вероятность того, что все l подмножеств из k элементнов неодноцветны, не меньше

$$\left(1 - 2\frac{\binom{n/2}{k}}{\binom{n}{k}}\right)^l.$$

Суммируя вероятности по всем возможным раскраскам n вершин, получаем, что для нового вероятностного пространства матожидание числа правильных раскрасок равно

$$\left(1-2\frac{\binom{n/2}{k}}{\binom{n}{k}}\right)^l 2^n < 1.$$

Значит, с положительной вероятностью найдётся упорядоченный набор длины l из k-элементных подмножеств, среди которых при любой двуцветной раскраске найдётся одноцветное. Самостоятельно докажите, что отсюда вытекает утверждение задачи.

(2) Это следствие предыдущего пункта. Обозначим через $\lceil x \rceil$ верхнюю целую часть числа x. Для $l(n) := \left\lceil \frac{n\binom{n}{k}\ln 2}{2\binom{n/2}{k}} \right\rceil$ имеем:

$$\left(1-2\frac{\binom{n/2}{k}}{\binom{n}{k}}\right)^{l(n)} 2^n < \exp\left(-l(n)\cdot 2\cdot\frac{\binom{n/2}{k}}{\binom{n}{k}}\right)2^n \leqslant 1.$$

Для чётного k возьмём $n=k^2$. Тогда $l(n)\sim c_1k^2 2^k$ для некоторого $c_1>0$ (не зависящего от k). Случай нечётного k сводится к случаю чётного путём увеличения константы. (Значение $n=k^2$ взято, чтобы минимизировать $l(n)$.)

1.8.6. См. [Gri].

§ 2. Основы теории графов

2.1. Основные определения

Графом $G=(V,E)$ называется конечное множество $V=V(G)$, некоторые двухэлементные подмножества (т. е. неупорядоченные пары несовпадающих элементов) которого выделены. Множество выделенных подмножеств обозначается $E=E(G)$. Таким образом, $E\subset\binom{V}{2}$.

Элементы множества V называются *вершинами*. Выделенные пары вершин называются *рёбрами*. Хотя эти пары неупорядоченные, в теории графов их традиционно обозначают круглыми скобками. Вершина, принадлежащая ребру, называется *его вершиной*. Если вершины a и b соединены ребром, они называются *соседними* или *смежными*, а само ребро (a,b) называется *проходящим* через вершину a и вершину b или *инцидентным* вершине a и вершине b.

Общепринятый термин для понятия графа, данного здесь, — *граф без петель и кратных рёбер*, или *простой граф*.

Если не оговорено противное, то через n и e обозначаются количества вершин и рёбер рассматриваемого графа соответственно.

Граф можно представлять себе как набор точек (например, на плоскости), некоторые пары которых соединены ломаными. См. рис. 3, 4, 5, 8, 9, 11 и 12 ниже. При этом только концы каждой ломаной являются вершинами графа и каждая пара вершин соединена не более чем одной ломаной. Точки называются *вершинами* графа, а ломаные — *рёбрами*. Ломаные могут пересекаться, но точки пересечения «не считаются», т. е. не являются вершинами.

Путём P_n называется граф с вершинами $1,2,\ldots,n$ и рёбрами $(i,i+1)$, $i=1,2,\ldots,n-1$.

Циклом C_n называется граф с вершинами $1,2,\ldots,n$ и рёбрами $(1,n)$ и $(i,i+1)$, $i=1,2,\ldots,n-1$. (Не путайте эти графы с *путём в графе* и *циклом в графе*, определёнными ниже.)

Граф с n вершинами, любые две из которых соединены ребром, называется *полным* и обозначается K_n. Если вершины графа можно разделить на две части так, что нет рёбер, соединяющих вершины из одной и той же части, то граф называется *двудольным*, а части называются *долями*. Через $K_{m,n}$ обозначается двудольный граф с долями из m и из n вершин, в котором имеются все mn рёбер между вершинами разных долей.

2.1.1. В любом графе есть двудольный подграф, содержащий не менее половины рёбер графа.

Степенью $\deg v$ вершины v графа называется число выходящих из нее рёбер. *Изолированной вершиной* называется вершина, из которой не выходит ни одного ребра.

Грубо говоря, *подграф* данного графа — это его часть. Формально, граф G называется *подграфом* графа H, если каждая вершина графа G является вершиной графа H и каждое ребро графа G является ребром графа H. При этом две вершины графа G, соединённые ребром в графе H, не обязательно соединены ребром в графе G.

k-Кликой в графе называется его подграф с k вершинами, являющийся полным. *Независимым множеством* или *антикликой* в графе называется набор его вершин, между которыми нет рёбер.

Путём в графе называется последовательность $v_1e_1v_2e_2\ldots e_{n-1}v_n$, в которой для любого i ребро e_i соединяет вершины v_i и v_{i+1}. Число $n-1$ называется *длиной* пути. (Рёбра $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ не обязательно попарно различны.)

Циклом в графе называется последовательность $v_1e_1v_2e_2\ldots e_{n-1}v_ne_n$, в которой для любого $i<n$ ребро e_i соединяет вершины v_i и v_{i+1}, а ребро e_n соединяет вершины v_n и v_1. Циклы считаются одинаковыми, если они отличаются циклическим сдвигом последовательности. Число n называется *длиной* цикла.

Несамопересекающимся называется цикл, для которого вершины $v_1, v_2, \ldots, v_n$ попарно различны и рёбра $e_1, e_2, \ldots, e_n$ попарно различны. Стандартный термин (менее удобный для начинающих) — *простой* цикл.

2.1.2. (1) Любой цикл, не проходящий ни по одному ребру дважды, содержит несамопересекающийся цикл.

(2) Любой цикл нечётной длины содержит несамопересекающийся цикл нечётной длины.

(3) Справедливо ли аналогичное утверждение для циклов чётной длины, не проходящих ни по одному ребру дважды?

(4) В графе есть несамопересекающийся цикл, проходящий через рёбра a и b, а также есть несамопересекающийся цикл, проходящий через рёбра b и c. Тогда есть несамопересекающийся цикл, проходящий через рёбра a и c.

Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путём, и *несвязным* иначе.

2.1.3. Если степень каждой из n вершин графа больше $\frac{n}{2}-1$, то граф связен.

Ясно, что «соединённость некоторым путём» является отношением эквивалентности на множестве вершин графа. *Связной компонентой* графа называется любой класс этого отношения эквивалентности.

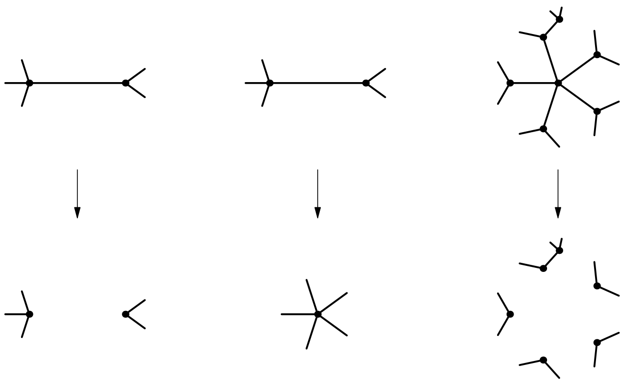


Рис. 2. Удаление ребра $G \to G - e$, стягивание ребра $G \to G/e$ и удаление вершины $G \to G - x$

Определение операций удаления ребра и удаления вершины графа G ясно из рис. 2. Операция *стягивания ребра* (рис. 2) удаляет из графа это ребро и заменяет вершины A и B этого ребра на одну вершину D, а все рёбра, выходящие из вершин A и B в некоторые вершины, заменяет на рёбра, выходящие из вершины D в те же вершины. (Эта операция отличается от стягивания ребра в мультиграфах, см. п. 2.5, тем, что каждое получившееся ребро кратности больше 1 заменяется на ребро кратности 1.) Например, если граф — цикл с четырьмя вершинами, то при стягивании любого его ребра получится цикл с тремя вершинами. Обозначения этих операций ясны из подписи к рис. 2.

Ориентированным графом (*без петель и кратных рёбер*) $G = (V, E)$ называется конечное множество $V = V(G)$, некоторые *упорядоченные* пары несовпадающих элементов которого выделены. Множество выделенных пар обозначается $E = E(G)$. Таким образом, $E \subset \{(x, y) \in \in V \times V : x \neq y\}$. Если выделены и пара (a, b), и пара (b, a), то это ребро не называется кратным.

Ориентированный путь в ориентированном графе — такая последовательность вершин, что в каждую следующую вершину ведет ориентированное ребро из предыдущей. Аналогично вводится понятие ориентированного цикла.

2.1.4. Пусть дан ориентированный граф G, у которого на каждом ребре u написан вес $f(u)$. (Этот вес можно понимать как работу, которую нужно затратить для того, чтобы пройти по ребру от начала до конца.) Функция $p\colon V(G)\to\mathbb{R}$ («потенциал»), такая что $f(x,y)=$ $=p(x)-p(y)$ для любого ребра $u=(x,y)$, существует тогда и только тогда, когда сумма весов рёбер любого цикла равна нулю (при прохождении ребра по циклу в направлении, противоположном ориентации, вес в сумму берётся со знаком «минус»).

Турниром называется ориентированный граф, любые две вершины которого соединены ребром. (То есть для любых двух вершин v,w турнира среди его рёбер есть (v,w) или (w,v), но не оба ребра сразу.)

Некоторые другие определения приведены в начале каждого раздела.

2.2. Перечисление деревьев

Граф называется *деревом*, если он связен и не содержит несамопересекающихся циклов. *Остовом графа* называется любой его подграф, являющийся деревом и содержащий все вершины графа.

2.2.1. (1) В любом дереве найдётся *лист*, т. е. вершина степени 1.

(2) В любом дереве с n вершинами $n-1$ ребро.

(3) В любом дереве между любыми двумя вершинами существует единственный несамопересекающийся путь.

(2′) Граф с n вершинами является деревом тогда и только тогда, когда он не содержит несамопересекающихся циклов и имеет $n-1$ ребро.

(2″) Граф с n вершинами является деревом тогда и только тогда, когда он связен и имеет $n-1$ ребро.

(3′) Если в графе между любыми двумя вершинами существует единственный несамопересекающийся путь, то граф является деревом.

(4) Последовательность из n натуральных чисел является последовательностью степеней вершин некоторого дерева тогда и только тогда, когда сумма её членов равна $2n-2$.

Заметим, что графы $(\{1,2,3\},\{\{1,2\}\})$ и $(\{1,2,3\},\{\{1,3\}\})$ различны. Графом называется именно граф, а не класс изоморфизма графов (определение изоморфизма приведено в начале п. 2.3). Или, говоря неформально, вершины графов считаются занумерованными. Поэтому вместо слова «граф» иногда употребляют термин «помеченный граф».

2.2.2. Каких графов с данными n вершинами больше:

(1) имеющих изолированную вершину или не имеющих?

(2) связных или несвязных?

2.2.3. (1) *Формула Кэли*. Число деревьев с данными n вершинами равно n^{n-2}.

(2) Если сумма целых положительных чисел $d_1, \ldots, d_n$ равна $2n-2$, то число деревьев с данными n вершинами, у которых i-я вершина имеет степень d_i, равно $\dfrac{(n-2)!}{(d_1-1)! \cdot \ldots \cdot (d_n-1)!}$.

Это утверждение можно переформулировать в виде:

$$(x_1 + \ldots + x_n)^{n-2} = \sum_T x_1^{\deg_T(1)-1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\deg_T(n)-1},$$

где сумма берётся по всем деревьям T с вершинами $1, 2, \ldots, n$ и через $\deg_T(k)$ обозначена степень вершины k дерева T.

(3)* Пусть $T_1, \ldots, T_r$ — деревья, множества вершин которых не пересекаются. Сколько есть деревьев, множество вершин которых есть объединение множества вершин этих r деревьев и которые содержат $T_1, \ldots, T_r$?

2.2.4. *Код Прюфера* сопоставляет дереву с вершинами $1, 2, \ldots, n$ последовательность чисел от 1 до n по следующему алгоритму.

Сначала код Прюфера — пустое слово. Пока количество вершин больше двух,

1) выбирается лист (см. задачу 2.2.1) v с минимальным номером;
2) в код Прюфера добавляется номер вершины, смежной с v;
3) вершина v и инцидентное ей ребро удаляются из дерева.

Когда осталось две вершины, алгоритм завершает работу.

(1) Найдите код Прюфера дерева с вершинами $1, 2, \ldots, 10$ и рёбрами $(8,9)$, $(8,4)$, $(4,10)$, $(10,3)$, $(3,5)$, $(10,6)$, $(10,1)$, $(1,7)$, $(1,2)$.

(2) Восстановите дерево по коду Прюфера $1, 1, 2, 5, 4, 2, 7$.

(3) Код Прюфера определяет взаимно однозначное соответствие между множеством деревьев с данными n вершинами и множеством слов длины $n-2$ из чисел от 1 до n.

(4) В коде Прюфера вершина степени d встречается $d-1$ раз.

2.2.5. Граф называется *унициклическим*, если он становится деревом после удаления некоторого ребра. (Или, эквивалентно, если он связен и имеет ровно один — с точностью до циклического сдвига и симметрии — несамопересекающийся цикл.)

(1) Каких графов больше: деревьев с данными 100 вершинами или унициклических графов с данными 98 вершинами?

(2) Выразите число унициклических графов с данными n вершинами в виде суммы не более чем n слагаемых.

2.2.6. (1) В дереве нет непустых подграфов, у которых степень каждой вершины чётная и положительная.

(2) Для графа G обозначим через $h_1(G)$ число его подграфов без изолированных вершин, у которых степень каждой вершины чётна. (Пу-

стой подграф удовлетворяет этому условию.) Докажите, что $h_1(G)$ — степень двойки. Выразите $h_1(G)$ через количества n вершин, e рёбер и k компонент связности графа.

Замечание. Такие подграфы называют *циклами* в смысле теории гомологий (не путайте с циклами в смысле теории графов). Как они возникают, написано, например, в [S1, § 6].

(3) На рёбрах дерева стоят знаки $+$ и $-$. Разрешается менять знаки на всех рёбрах, выходящих из одной вершины. Тогда из любой расстановки можно получить любую другую.

(4) Для графа G обозначим через $h^1(G)$ наибольшее количество расстановок знаков $+$ и $-$ на его рёбрах, ни одну из которых нельзя получить из другой описанными выше операциями. Докажите, что $h^1(G)$ — степень двойки. Выразите $h^1(G)$ через n, e и k.

Замечание. В теории когомологий такие расстановки называют *коциклами*, а приведённое отношение эквивалентности на коциклах — когомологичностью. Как возникает когомологичность коциклов, написано, например, в [S4, п. 11.1, 11.2].

(5)* Докажите, что $h_1(G)$ и $h^1(G)$ не меняются при стягивании ребра, и выведите отсюда, что $h_1(G)=h^1(G)$.

2.3. Графы с точностью до изоморфизма

Грубо говоря, графы изоморфны, если они одинаковы (при этом их изображения на плоскости могут быть разными). Формально, графы G_1 и G_2 называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение $f : V(G_1) \to V(G_2)$, удовлетворяющее условию: *вершины $A, B \in V(G_1)$ соединены ребром в том и только в том случае, если вершины $f(A), f(B) \in V(G_2)$ соединены ребром.*

2.3.1. Какие из графов на рис. 3 изоморфны?

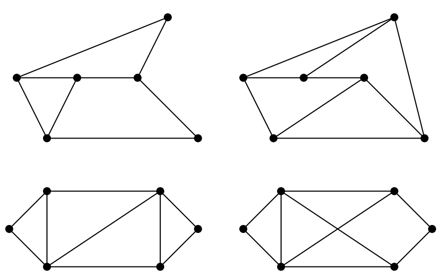


Рис. 3. Какие из графов на рисунке изоморфны?

2.3.2. Для произвольных $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ найдите количество
(1) клик размера k в графе K_n,
(2) клик размера k в графе $K_{m,n}$,
(3) независимых множеств размера k в графе K_n,
(4) независимых множеств размера k в графе $K_{m,n}$,
(5) подграфов в K_n, изоморфных $K_{k,l}$,
(6) подграфов в $K_{m,n}$, изоморфных $K_{k,l}$.
Будьте внимательны: эти задачи простые, но почти все требуют разбора случаев.

2.3.3. Перечислите все попарно неизоморфные
(1) графы с четырьмя вершинами,
(2) связные графы с пятью вершинами и пятью рёбрами,
(3) несвязные графы с пятью вершинами.

2.3.4. Сколько существует попарно неизоморфных графов, имеющих 8 вершин и 25 рёбер?

2.3.5. Количество классов изоморфизма деревьев с n вершинами (т. е. количество различных деревьев с n незанумерованными вершинами) меньше 4^n.

2.4. Плоские графы

Плоским графом называется изображение графа на плоскости, для которого любые два ребра пересекаются только по их общим вершинам (в частности, если таких вершин нет, то не пересекаются).

Иногда такое изображение называют просто графом, но это неточно, поскольку один и тот же граф можно изобразить (без самопересечений) на плоскости разными способами.

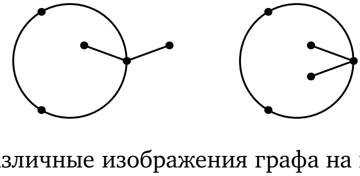


Рис. 4. Различные изображения графа на плоскости

Плоский граф делит плоскость на части, называемые *гранями* графа. Заметим, что одна из таких частей будет «бесконечной».

2.4.1. Дан плоский граф с треугольными гранями, имеющий более трёх вершин. Удалили вершину вместе с выходящими из нее рёбрами.
(1) Верно ли, что получившаяся грань ограничена несамопересекающимся циклом?

(2) Верно ли, что если выкинуть ещё одну вершину, то все грани опять будут ограничены несамопересекающимися циклами?

(3) Пусть в полученном графе степень каждой вершины не менее 3. Верно ли, что любую вершину нового графа можно удалить и получить граф, все грани которого будут ограничены несамопересекающимися циклами?

2.4.2. (1) *Формула Эйлера*. Для любого связного плоского графа с f гранями имеет место равенство $n-e+f=2$.

(Доказательство см., например, в [Р]. Далее этим результатом можно пользоваться без доказательства. Эта формула часто записывается в виде $V-E+F=2$.)

(2) Найдите аналог формулы Эйлера для плоского графа с k компонентами связности.

2.4.3. *Применения формулы Эйлера*.

(1) Ни один из графов K_5 и $K_{3,3}$ невозможно без самопересечений нарисовать на плоскости.

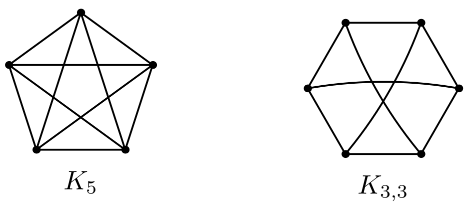


Рис. 5. Непланарные графы

(2) На плоскости отмечено n точек. Разрешается соединять некоторые две из них ломаной, не проходящей через другие точки. Два игрока по очереди соединяют ломаной какие-то две ещё не соединённые точки. При этом требуется, чтобы эти ломаные не самопересекались и не пересекались нигде, кроме отмеченных точек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Для каких n при правильной игре выигрывает тот, кто ходит первым?

(3) Перечислите все связные плоские графы (с точностью до изоморфизма), у которых степени всех вершин равны и «степени» всех граней равны (т. е. граница каждой грани состоит из одного и того же числа рёбер).

Замечание. Если пункты (1), (2) или (3) не получаются, решайте следующие пункты. Определение изоморфизма см. в п. 2.3.

(4)* Выпуклых *правильных* многогранников (все грани — правильные многоугольники с одинаковым числом сторон, степени всех вершин равны) ровно 5 (с точностью до изоморфизма их графов). Конструкцию соответствующих многогранников нужно привести, она не предполагается известной.

(5) Для любого плоского связного графа без петель и кратных рёбер, имеющего более двух вершин, $2e \geqslant 3f$ и $e \leqslant 3n - 6$.

(6) В любом плоском графе есть вершина степени не более 5.

(7) Если каждая вершина плоского связного графа имеет степень d, а граница каждой грани состоит из ровно $k \geqslant 3$ рёбер, то

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}.$$

2.4.4. *Картой на плоскости* называется разбиение плоскости на конечное число многоугольников (возможно, «бесконечных»). Раскраска карты называется *правильной*, если разные многоугольники, имеющие общий граничный отрезок, имеют разные цвета. Докажите, что любую карту можно правильно раскрасить в

(1) 6 цветов; (2)* 5 цветов; (3)** [Всё равно не докажете.]

Замечание. Используя конструкцию *двойственного графа*, можно доказать, что правильная раскрашиваемость любой карты на плоскости в d цветов равносильна правильной раскрашиваемости любого плоского графа в d цветов (п. 3.1).

Граф называется *планарным*, если его можно без самопересечений нарисовать на плоскости.

Ясно, что любой подграф планарного графа планарен.

Операция *подразделения ребра* графа показана на рисунке.

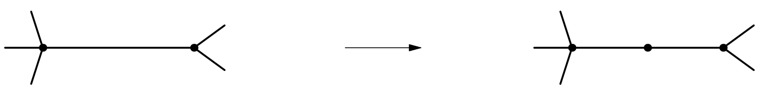


Рис. 6. Подразделение ребра

Два графа называются *гомеоморфными*, если от одного можно перейти к другому при помощи операций подразделения ребра и обратных к ним; или, эквивалентно, если существует граф, полученный из каждого из данных графов операциями подразделения ребра.

Ясно, что гомеоморфные графы являются или не являются планарными одновременно.

Теорема Куратовского. *Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графу K_5 или $K_{3,3}$ (рис. 5).* (Доказательство этой теоремы см., например, в [S5].)

2.4.5. Придумайте алгоритм

(1) распознавания планарности графа (здесь можно использовать без доказательства теорему Куратовского);

(2)* рисования без самопересечений заведомо планарного графа на плоскости.

Найдите асимптотику сложности вашего алгоритма в зависимости от числа n рёбер графа, т. е. асимптотику максимума по графам с n рёбрами от числа шагов в алгоритме, примененному к данному графу. См. «определение» нахождения асимптотики в п. 6.1.

Теорема Хопкрофта—Тарджана. *Существует линейный по количеству рёбер алгоритм распознавания планарности графа.*

2.4.6. (1) **Теорема Фари.** Плоский граф можно нарисовать без самопересечений на плоскости так, что все рёбра будут отрезками.

(2) Дан невыпуклый многоугольник с непрозрачными сторонами. Назовем вершину A *видимой* из точки X, если внутренность отрезка AX не пересекается с границей многоугольника. Назовем *ядром* многоугольника множество его внутренних точек, из которых видны все вершины многоугольника. Докажите, что если точку из ядра соединить отрезками с произвольно выбранными несколькими (не менее чем с двумя, и не обязательно со всеми) вершинами исходного многоугольника, то многоугольник разобьется на многоугольники с непустыми ядрами.

Тор и лента Мёбиуса изображены на рис. 7. Эти фигуры предполагаются *прозрачными*, т. е. точка (или подмножество), «лежащая на одной стороне поверхности», «лежит и на другой стороне». Это аналогично тому, что при изучении геометрии мы говорим, например, о треугольнике на плоскости, а не о треугольнике на верхней (или нижней) стороне плоскости.

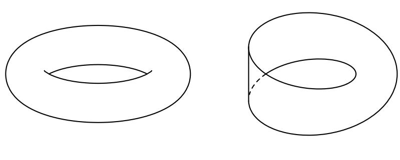


Рис. 7. Тор и лента Мёбиуса

2.4.7. Нарисуйте без самопересечений на торе граф
(1) K_5; (2) $K_{3,3}$; (3) K_6; (4) $K_{3,4}$; (5) K_7; (6) $K_{4,4}$.

2.4.8. Нарисуйте без самопересечений на ленте Мёбиуса граф
(1) K_5; (2) $K_{3,3}$; (3) K_6; (4) $K_{3,4}$.

2.4.9. *Картой на торе* называется разбиение тора на конечное число (криволинейных и изогнутых) многоугольников. Раскраска карты на торе называется *правильной*, если разные многоугольники, имеющие общую граничную кривую, имеют разные цвета. Любую ли карту на торе можно правильно раскрасить

(1) в 5 цветов; (2) в 6 цветов; (3) в 7 цветов?

Подробнее см. [S1, § 2].

Замечание. Любой связный граф с g рёбрами можно так нарисовать «на сфере с g ручками» (т. е. внутри правильного $2g$-угольника, диаметрально противоположные стороны которого «склеены»), что некоторые рёбра являются отрезками, а остальные рёбра являются объединениями двух непересекающихся отрезков, у каждого из которых один конец — вершина графа, а другой конец лежит на стороне $2g$-угольника.

2.5. Эйлеровы пути и циклы

Мультиграфом (или *графом с петлями и кратными рёбрами*) называется квадратная таблица из целых неотрицательных чисел, симметричная относительно главной диагонали. (Мы не используем более правильную, но более громоздкую терминологию: *мультиграф — граф с кратными рёбрами*, *псевдограф* — граф с петлями, *псевдомультиграф — граф с петлями и кратными рёбрами*.) При этом число, стоящее на пересечении i-й строки и j-го столбца, интерпретируют как число рёбер (или *кратность ребра*) между вершинами с номерами i и j при $i \neq j$ и как число петель в вершине с номером i при $i = j$. Ребро называется *кратным*, если его кратность больше единицы.

Степенью вершины мультиграфа называется число выходящих из нее рёбер. При этом ребро кратности k, соединяющее вершину с другой вершиной, «вносит вклад» k в степень, а петля кратности k «вносит вклад» $2k$ в степень.

Ориентированным мультиграфом (или ориентированным графом с петлями и кратными рёбрами) называется квадратная таблица из целых неотрицательных чисел. Если в некоторой клетке (неважно, диагональной или нет) стоит число, большее 1, то говорят, что ориентированный мультиграф имеет кратные рёбра.

Читатель легко сообразит, как определить (*ориентированный*) *путь* и *цикл* в (ориентированном) мультиграфе, а также как изображать с самопересечениями на плоскости (ориентированные) мультиграфы.

2.5.1. Сколько всего мультиграфов с данными n вершинами

(1) ориентированных без кратных рёбер, но, возможно, с петлями?

(2) неориентированных без петель, но, возможно, с кратными рёбрами?

2.5.2. Сколько всего мультиграфов с данными n вершинами, имеющих k рёбер и

(1) неориентированных без петель и кратных рёбер?

(2) неориентированных, у которых допускаются кратные рёбра и петли?

Эйлеров цикл (*путь*) в мультиграфе — цикл (путь), проходящий по каждому ребру мультиграфа ровно один раз.

2.5.3. (1) В связном мультиграфе есть эйлеров цикл тогда и только тогда, когда степень каждой его вершины чётна.

(2) В связном мультиграфе есть эйлеров цикл тогда и только тогда, когда множество его рёбер распадается на несамопересекающиеся циклы.

(3) При каком условии в мультиграфе существует эйлеров путь?

(4) При каком условии в ориентированном мультиграфе существует ориентированный эйлеров цикл?

(5) При каких n граф K_n имеет эйлеров цикл?

(6) То же для графа $K_{m,n}$.

Входящей степенью вершины ориентированного мультиграфа называется число входящих в нее рёбер (с учётом кратности). Аналогично определяется исходящая степень. При этом петля кратности k «вносит вклад» k и во входящую, и в исходящую степень.

2.5.4. (1) Если количество вершин нечётной степени в связном графе равно $2k$, то множество его рёбер можно представить в виде объединения k путей, ни один из которых не проходит ни по какому ребру дважды и никакие два из которых не имеют общих рёбер.

(2) На рёбрах графа, у которого степень каждой вершины чётна, можно поставить стрелки так, что у каждой вершины входящая степень будет совпадать с исходящей.

(3) Все рёбра связного графа раскрашены в два цвета. Из каждой вершины выходит поровну рёбер обоих цветов. Тогда из любой вершины до любой другой можно добраться, каждый раз меняя цвет ребра.

(4) В нарисованном на плоскости без самопересечений связном графе есть эйлеров цикл тогда и только тогда, когда грани можно раскрасить в 2 цвета *правильно*, т. е. так, что при переходе через каждое ребро цвет меняется.

2.5.5. Математик забыл трёхзначный код своего замка́. Замок открывается, если три цифры кода набраны подряд (даже если перед этим были набраны другие цифры). Математик набирает одну цифру в секунду; набранная цифра добавляется в конец. Докажите, что математик сможет открыть замок за

(1) 29 секунд, если в коде могут быть использованы только цифры $1, 3$ и 7;

(2) 1002 секунды, если в коде могут быть использованы десять цифр.

(3) Сформулируйте и докажите правило «$0 < 1 < 2 < \ldots < 8 < 9$» открытия замка за 1002 секунды.

Последовательность де Брёйна (*П. д. Б.*) *с параметрами* n *и* k — последовательность, элементы которой принадлежат заданному множеству из k элементов (обычно — $\{0, 1, \ldots, k-1\}$), причём все её подпоследовательности длины n различны и среди этих подпоследовательностей встречаются все k^n возможных последовательностей. (Таким образом, длина П. д. Б. равна $k^n + n - 1$.)

(Также П. д. Б. называют бесконечную периодическую последовательность с периодом k^n, каждая подпоследовательность которой длины $k^n + n - 1$ является П. д. Б. с параметрами n и k.)

2.5.6. Постройте последовательность де Брёйна с параметрами $k = 2$ («двоичную») и

(1) $n = 3$, начинающуюся с 111;

(2) $n = 4$, начинающуюся с 1011;

(3) $n = 4$, заканчивающуюся на 1010.

2.5.7. *Правило «*0 *лучше* 1*».* Рассмотрим последовательность из нулей и единиц, построенную по следующим правилам. Она начинается с k единиц. Дальше мы пишем 1, только если при написании 0 не все подпоследовательности длины k новой последовательности различны. Если даже при написании 1 не все подпоследовательности длины k новой последовательности различны, то заканчиваем написание последовательности. Докажите, что таким образом получится последовательность де Брёйна.

2.5.8. Дан связный ориентированный мультиграф с n вершинами. Входящая степень d_k каждой вершины k равна исходящей.

(1) Существует дерево, содержащее все вершины этого мультиграфа, все рёбра которого направлены в сторону вершины 1.

(2) Фиксируем дерево T из п. (1). Будем обходить этот граф (по стрелкам), проходя по каждому ребру не более одного раза. Сначала выйдем из вершины 1 в произвольном направлении. Далее, пусть мы пришли в некоторую вершину v. Выходим из нее по любому ребру, не принадлежащему T, если это возможно. А если невозможно, то выходим из нее по ребру, принадлежащему T (такое ребро единственно).

Докажите, что движение закончится в вершине 1 и что в результате получится ориентированный эйлеров цикл.

(3) Число ориентированных эйлеровых циклов в этом мультиграфе кратно числу $(d_1-1)!\cdot\ldots\cdot(d_n-1)!$.

2.6. Гамильтоновы пути и циклы

Гамильтонов путь (*цикл*) в графе — путь (цикл), проходящий через каждую вершину ровно по одному разу.

2.6.1. Грани гамильтонова плоского графа можно правильно раскрасить в 4 цвета.

Напомним (п. 2.1), что *длина* пути — число его рёбер (а не вершин).

2.6.2. (1) Если граф связен и $2e\geqslant n^2-3n+6$, то в нём есть гамильтонов цикл.

(2) **Теорема Дирака—Оре.** *Граф, сумма степеней любых двух несмежных вершин которого не меньше n, имеет гамильтонов цикл.*

(3) **Лемма Дирака.** *Если $a_0\ldots a_s$ — максимальный из путей в графе, проходящих по каждой своей вершине только один раз, $s\geqslant 3$ и $\deg a_0+\deg a_s>s$, то в этом графе есть несамопересекающийся цикл длины s.*

(4) Если в связном графе есть несамопересекающийся цикл длины $s<n$, то в этом графе есть путь длины s, проходящий по каждой своей вершине только один раз.

(5) Граф, сумма степеней любых двух несмежных вершин которого не меньше $n-1$, имеет гамильтонов путь.

2.6.3. Теорема Хватала—Эрдёша. *Пусть для некоторого графа и некоторого целого $k\geqslant 2$ среди любых $k+1$ вершин графа есть ребро и после удаления любого набора из $k-1$ вершины граф остаётся связным. Тогда в этом графе есть гамильтонов цикл.*

2.6.4. Пусть среди любых $k+1$ вершин графа есть ребро и после удаления любого набора из $k-1$ вершины граф остаётся связным.

(1) В этом графе есть хотя бы один несамопересекающийся цикл.

(2) Обозначим через $v_1,\ldots,v_s$ максимальный несамопересекающийся цикл в этом графе. Обозначим через W любую компоненту связности графа, полученного удалением вершин этого несамопересекающегося цикла из исходного графа. Обозначим через X множество вершин несамопересекающегося цикла, соседних с W.

Тогда $|X|\geqslant k$.

(3) Вершины v_i, v_{i+1} не лежат одновременно в X.

(4) Если $v_i, v_j\in X$, то в графе нет ребра $v_{i+1}v_{j+1}$.

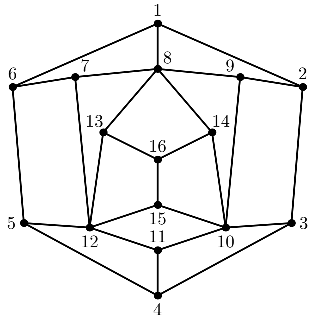


Рис. 8. Есть ли в этом графе гамильтонов путь?

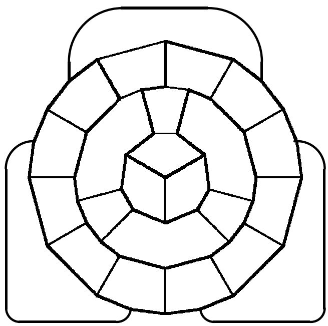


Рис. 9. Граф многогранника Гринбергса. Есть ли в нём гамильтонов путь?

2.6.5. (1) Есть ли гамильтонов путь в графе на рис. 8?

(2) Есть ли гамильтонов цикл в графе на рис. 9?

(3) Для каких n есть гамильтонов цикл в графе, вершинами которого являются 3-элементные подмножества n-элементного множества, и два подмножества соединены ребром, если они пересекаются ровно по одному элементу?

2.6.6. Максимальное число попарно непересекающихся по рёбрам гамильтоновых циклов в графе K_n равно $\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$.

2.6.7. (1) В любом турнире имеется ориентированный гамильтонов путь.

(2) Для любого n существует турнир с n вершинами, в котором имеется не менее $n!/2^n$ ориентированных гамильтоновых путей.

2.6.8. *Рёберным графом* графа G называется граф, вершины которого — рёбра графа G; две вершины рёберного графа соединены ребром, если соответствующие рёбра графа G имеют общую вершину. Найдите в терминах графа G необходимое и достаточное условие наличия гамильтонова цикла в его рёберном графе.

См. также [Ve].

2.7. Экстремальные задачи (теорема Турана)

2.7.1. Пункты этой задачи, кроме (2), являются различными версиями и частными случаями *теоремы Турана*.

Треугольником в графе называется цикл длины 3.

(1) Если граф не содержит треугольников, то $e \leqslant n^2/4$.

(2) Если $e = [n^2/4] + 1$, то в графе есть по крайней мере $[n/2]$ треугольников.

(3) Если $n = km$ и граф не содержит $(k+1)$-клики, то $2e \leqslant k(k-1) \times \times m^2$. (Переходя к дополнительному графу, получаем, что если $n = km$ и граф не содержит $(k+1)$-антиклики, то $2e \geqslant km(m-1)$.)

(4) Если граф не содержит $(k+1)$-антиклики, то $2e \geqslant km(m-1) + + 2mr$, где $m := [n/k]$ и $r := k\{n/k\}$.

2.7.2. (1) Если граф не содержит несамопересекающегося цикла длины 4, то $e < n^{3/2}$.

(2) Если граф не содержит подграфа $K_{3,2}$, то $e < 2n^{3/2}$.

(3) Если граф не содержит подграфа $K_{3,3}$, то $e < 2n^{5/3}$.

(4)* Для любых целых s, t, $2 \leqslant s \leqslant t$, если граф не содержит подграфа $K_{s,t}$, то $e < tn^{2-1/s}$.

2.7.3. Для любых n точек на плоскости существует не более n *диаметров*, т. е. (неупорядоченных) пар точек, расстояние между которыми равно максимуму из всех возможных расстояний между парами из этих n точек.

2.7.4. Для любых n точек $A_1, \ldots, A_n$ в $\mathbb{R}^d$ обозначим через $D(A_1, \ldots, A_n)$ число (неупорядоченных) пар точек, расстояние между которыми равно 1. Обозначим

$$E_n(d) = \max\{D(A_1, \ldots, A_n) : A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^d\}.$$

Тогда: (1) $E_n(2) > n[\log_2 n]/4$; (2) $E_n(2) \leqslant 2n^{3/2}$; (3) $E_n(3) \leqslant 2n^{5/3}$; (4) $\dfrac{(n-1)^2}{4} \leqslant E_n(4) \leqslant \dfrac{2(n+4)^2}{5}$.

2.7.5. (1) Пусть V — 11^q-элементное подмножество пространства $\mathbb{R}^q$ (определение пространства $\mathbb{R}^q$ см. в гл. 7), любое 10^q-элементное подмножество которого содержит две точки x, y на расстоянии 1: $|x-y| = 1$. Докажите, что для достаточно большого q количество единичных расстояний между точками множества V больше чем $12^q/2$:

$$\frac{1}{2}|\{(x,y)\in V\times V : |x-y|=1\}| > \frac{12^q}{2}.$$

(2) Докажите, что в условиях предыдущего пункта можно заменить число $12^q/2$ на $12{,}1^q$.

2.7.6. Можно рассмотреть обобщение задачи Турана (см. задачу 2.7.1), вместо клик заданного размера запретив другие подграфы. Обозначим через $\mathrm{ex}_H(n)$ максимальное количество рёбер в графе с n вершинами, не содержащем подграфов, изоморфных H. Например, $\mathrm{ex}_{K_{k+1}}(n)$ — это максимальное число рёбер в графе с n вершинами, не содержащем $(k+1)$-клики.

Докажите, что если H_1 — подграф графа H_2, то $\mathrm{ex}_{H_1}(n) \leqslant \mathrm{ex}_{H_2}(n)$.

См. также задачи 6.1.2 и 6.1.3.

2.8. Теорема Менгера

2.8.1. Из каждого связного мультиграфа можно удалить вершину (вместе со всеми выходящими из нее рёбрами) так, что он останется связным.

Граф или мультиграф называется *двусвязным*, если он отличен от K_2 и остаётся связным после удаления любой вершины.

2.8.2. (1) *Частный случай вершинной теоремы Менгера.* Любые две различные вершины двусвязного мультиграфа, не соединённые ребром, лежат на некотором несамопересекающемся цикле.

(2) Верно ли, что для любого пути P в мультиграфе, имеющем не менее трёх вершин, найдётся другой путь в том же мультиграфе с теми же концами, не пересекающийся с P нигде, кроме концов?

2.8.3. *Частный случай рёберной теоремы Менгера.* Если в мультиграфе есть хотя бы одно ребро и при удалении любого ребра найдётся путь между вершинами a и b, то в мультиграфе найдутся два пути между вершинами a и b, не имеющие общих рёбер.

2.8.4. (1) Для любого ребра u двусвязного графа G, отличного от K_3, хотя бы один из графов $G-u$ и G/u двусвязен.

(2) Для любых двух вершин выпуклого многогранника существуют три непересекающихся (нигде, кроме этих вершин) пути по его рёбрам из одной вершины в другую. (Такие графы называют *трёхсвязными*.)

(3) Для трёхсвязного графа G с ребром xy (вершины которого — x, y) граф G/xy трёхсвязен тогда и только тогда, когда граф $G-x-y$ двусвязен.

2.8.5. (1) **Теорема Уитни (вершинная).** *Мультиграф остаётся связным после удаления любых $k-1$ вершин тогда и только тогда, когда любые две его вершины можно соединить k путями, пересекающимися только в этих двух вершинах.*

(2) **Теорема Менгера (вершинная).** *Если вершины a и b мультиграфа G, не соединённые ребром, остаются в одной компоненте связности после удаления любых $k-1$ других вершин, то a и b можно соединить k путями, пересекающимися только в этих двух вершинах.*

2.8.6. Вершины A и B графа назовем *эквивалентными*, если существует такая последовательность вершин $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$, что любые две соседние вершины A_i и A_{i+1} можно соединить k путями, не имеющими общих промежуточных вершин. Тогда любые две эквивалентные вершины можно соединить k путями, не имеющими общих рёбер.

2.9. Подсказки

2.1.1. Обозначим данный граф через G. Посчитайте двумя способами количество таких пар (A, x), что $A \subset V(G)$, $x \in E(G)$ и ровно один конец ребра x лежит в A.

2.2.3. Используйте взаимно однозначное соответствие из следующей задачи 2.2.4.

2.3.1. Чтобы доказать изоморфность, нужно привести изоморфизм: указать, какая вершина первого графа соответствует какой вершине второго. А чтобы доказать неизоморфность, нужно придумать какой-то инвариант, который должен быть одинаковым у изоморфных графов, а у заданной пары графов различен. Для начала в качестве инварианта можно попробовать взять количества вершин, рёбер, наличие несамопересекающегося цикла заданной длины, вершин заданной степени, наличие какого-то подграфа и т. д.

2.3.3. В этой задаче нужно выработать какую-нибудь стратегию перебора. В противном случае велики шансы либо забыть какой-нибудь граф, либо привести два изоморфных графа. Выберите какой-нибудь такой параметр (количество рёбер, количество несамопересекающихся циклов, длина минимального несамопересекающегося цикла, количество компонент связности и т. д.), что в зависимости от его значения множество всех графов разбивается на «не очень большое» количество «хорошо обозримых» групп. Тем самым вы сведете к минимуму вероятность ошибки, так как графы из разных групп заведомо неизоморфны, а внутри одной группы легче отслеживать изоморфность и «полноту».

2.4.2. (2) $n - e + f = 1 + k$.

2.4.3. (1) Пусть граф K_5 нарисован на плоскости без самопересечений. Тогда по формуле Эйлера $5-10+f=2$. Значит, $f=7$. Найдите соотношение между количествами граней и рёбер.

(2) При $n\geqslant 3$ в конце игры все грани треугольные.

(3) Используйте п. (6) и (7). Предостережение: не забудьте доказать изоморфность графов с одинаковыми степенями вершин и граней.

(4) К п. (3) нужно добавить конструкцию соответствующих многогранников.

(5) Скольким граням принадлежит ребро? Какое наименьшее число рёбер может ограничивать грань?

2.4.4. (3). Знаменитая гипотеза четырех красок утверждает, что любую карту на плоскости можно правильно раскрасить в 4 цвета. Но ее доказательство гораздо более сложно.

2.4.6. (1) Используйте п. (2). См. подробнее [P].

2.5.4. (2) Нужно построить эйлеров цикл и ориентировать его.

(4) Используйте утверждение 3.1.1 для «двойственного» графа.

2.5.5. (1) Определим *мультиграф де Брёйна для слов длины n из k-буквенного алфавита*. (Стандартный термин — граф де Брёйна.) Его вершины — слова длины $n-1$ из k-буквенного алфавита. Ориентированные рёбра соответствуют словам $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$; ориентированное ребро, соответствующее слову $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$, ведет от вершины $(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1})$ к вершине $(a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$ (эти вершины могут совпадать).

Докажите существование эйлерова цикла в мультиграфе де Брёйна для слов длины 3 из 10-буквенного алфавита. Можно также действовать аналогично решению задачи 2.5.7.

(2) Аналогично решению п. (1).

(3) Аналогично решению задачи 2.5.7.

2.5.6. (1) Аналогично решению задачи 2.5.5 (1). Можно доказать и использовать утверждение задачи 2.5.7.

2.5.7. Используйте задачу 2.5.8 (2) для мультиграфа де Брёйна.

2.6.3. См. задачу 2.6.4.

2.6.5. Ответы: (1) нет; (2) нет; (3) для $n\neq 4$.

2.6.7. (1) Индукция по количеству вершин графа.

(2) Посчитайте двумя способами число «турнироперестановок», т. е. пар (G, l), где G — турнир с n вершинами и l — гамильтонов путь в нём.

2.6.8. Вот нужное условие: в графе G существует цикл, содержащий хотя бы по одной вершине из каждого ребра и не проходящий ни по одному ребру дважды.

2.7.1. (1) У концов любого ребра нет общих соседей, иначе есть треугольник.

(2) Индукция по n с переходом от n к $n+2$. В доказательстве шага рассмотрите случай, когда каждое ребро содержится в некотором треугольнике, и противоположный случай.

(3) Обобщите рассуждения из п. (1).

(4) Аналогично решению п. (3).

2.7.2. Посчитайте двумя способами количество пар $(a,\{b,c\})$, где a,b,c — вершины графа, $b\neq c$, причем ab и ac — рёбра.

В п. (3) используйте неравенство между средним арифметическим и средним кубическим.

В п. (4) используйте неравенство между средним арифметическим и средним степенным порядка s.

2.7.4. В этой и следующей задаче удобно использовать понятие *дистанционного графа*. Это граф, множество вершин которого — заданное множество точек и в котором ребром соединены вершины на расстоянии 1.

2.8.5. (2) Пусть G — минимальный по числу рёбер контрпример к доказываемой теореме для $k=3$. Докажите, что *вершины a и b оказываются в разных компонентах после удаления некоторых трёх вершин x,y,z, две из которых соединены ребром.*

2.10. Указания

2.1.2. (2) Рассмотрим любую вершину, по которой цикл проходит хотя бы дважды. Можно рассмотреть две части цикла: между первым и вторым прохождениями этой вершины и оставшуюся. Каждая из этих частей является циклом, и одна из них имеет нечётную длину. Уменьшая так длину нечётного цикла, получим несамопересекающийся цикл.

2.2.2. (1) Ответ: при $n\geqslant 4$ имеющих изолированную вершину меньше, при $n=2,3$ — поровну, при $n=1$ их больше.

Для $n\leqslant 3$ это доказывается перебором. Для $n\geqslant 4$ это следует из того, что дополнение графа, имеющего изолированную вершину, не имеет изолированных вершин, и того, что дополнение к пути длины n не имеет изолированных вершин. (*Дополнением графа* (V,E) называется граф $\left(V,\binom{V}{2}\setminus E\right)$.)

Другой способ получается из следующего соображения: количество графов с n вершинами, у которых 1 — изолированная вершина, равно количеству графов с $n-1$ вершинами.

2.2.3. (2) *Способ решения, отличный от предложенного в подсказке.* Индукция по n. Среди d_i обязательно есть единица. Удалим её и применим индукционное предположение. При этом учтём, что удаленная вершина могла быть соединена с различными вершинами в графе.

(3) Если в одном из искомых деревьев стянуть в точку поддеревья $T_1, \ldots, T_r$, то получится дерево с r вершинами. Если у этого дерева степени вершин равны $d_1, \ldots, d_r$, то количество искомых деревьев, ему соответствующих, равно $n_1^{d_1} \cdot \ldots \cdot n_r^{d_r}$, где n_i — число вершин в дереве T_i. Поэтому искомое число равно

$$\sum_{d_1,\ldots,d_r} \frac{(r-2)!}{(d_1-1)! \cdot \ldots \cdot (d_r-1)!} n_1^{d_1} \cdot \ldots \cdot n_r^{d_r} = n_1 \cdot \ldots \cdot n_r(n_1+\ldots+n_r)^{r-2}.$$

2.2.5. (1) Ответ: деревьев со 100 вершинами больше.

Из дерева с 98 вершинами можно сделать уницикличеcкий граф не более чем $\binom{98}{2}$ способами.

(2) Ответ: $\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)n^{n-k}$.

В уникличеcком графе имеется ровно один несамопересекающийся цикл. Количество уницикличеcких графов с n вершинами, для которых этот несамопересекающийся цикл имеет длину k, равно

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{2k} L(n,k),$$

где $L(n,k)$ — количество уницикличеcких графов, для которых этот цикл есть $n, n-1, \ldots, n-k+1$. При удалении из каждого из этих $L(n,k)$ графов ребра $(n, n-1)$ получается дерево. Число $L(n,k)$ равно количеству кодов Прюфера получающихся деревьев. Поэтому $L(n,k)=kn^{n-1-k}$.

2.3.5. Будем считать число *корневых деревьев*, т. е. пар (дерево, вершина этого дерева). Закодируем все корневые деревья с n вершинами так. Нарисуем дерево на плоскости, у каждого ребра зададим направление (например, от корня). После этого, стартуя от корня, начинаем обходить дерево (так, как будто дерево — это система стен). Если обходим ребро по направлению стрелки, пишем единицу, если против — пишем ноль. В итоге получаем последовательность длины $2n-2$ из нулей и единиц. Несложно понять, что каждой последовательности соответствует не более одного дерева. Поэтому деревьев не больше чем таких последовательностей.

2.4.3. (1) См. подсказку. Поставим около каждого ребра графа K_5, нарисованного на плоскости, стрелки в две грани, примыкающие к ребру. Тогда число стрелок (иными словами, «гранерёбер») равно $2e = 20$. Поскольку граница каждой грани состоит не менее чем из трёх рёбер, число стрелок не меньше $3f = 21 > 20$. Противоречие.

Основываясь на этой идее, можно доказать непланарность графа $K_{3,3}$.

(2) См. подсказку. Поэтому $n-e+\frac{2e}{3}=2$, откуда $e=3(n-2)$.

Ответ: первый выигрывает при $n=2$ или нечётном $n\geqslant 3$, второй — в остальных случаях.

(3) Ответ: отрезок, цикл C_n произвольной длины n и 5 графов правильных многогранников [KR, с. 266].

(5) Поставим около каждого ребра плоского графа стрелки в две грани, примыкающие к ребру. (Иными словами, посчитаем двумя способами количество гранерёбер.) Тогда число стрелок (т. е. гранерёбер) равно $2e$. Поскольку граница каждой грани состоит не менее чем из трёх рёбер, то $2e\geqslant 3f$. По формуле Эйлера $n-e+f=2$. Значит, $6=3(n-e+f)\leqslant 3n-e$, откуда $e\leqslant 3n-6$.

(6) Если степень каждой вершины $\geqslant 6$, то $2e\geqslant 6n$. А это противоречит п. (5).

(7) Следует из равенств $2e=dn$, $2e=kf$ и формулы Эйлера.

2.4.4. (1) Выводится из утверждения 2.4.3 (6) по индукции.

(2) Пусть мы хотим раскрасить граф с n вершинами в пять цветов (в предположении, что для графов на $n-1$ и $n-2$ вершинах всё доказано). Рассмотрим вершину a степени не больше 5.

Если $\deg a\leqslant 4$, то удалим вершину a, красим остальные, добавим вершину a и красим её в «недостающий» цвет.

Если $\deg a=5$, то среди соседей вершины a найдутся две вершины b, c, не соединённые ребром (иначе граф содержит K_5). Удалим a и склеим b и c. Покрасим полученный граф. Потом разделим вершины b и c и добавим a.

Ср. [KR], разбор двух случаев на с. 291 и рассуждение в начале с. 290.

2.4.7. Смотри! (Рис. 10.)

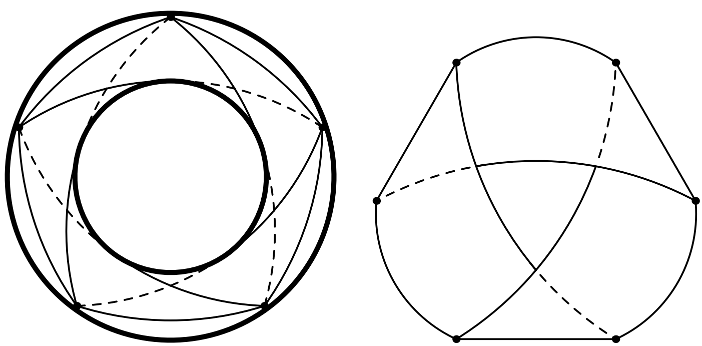


Рис. 10. Реализация графов Куратовского

Имеются другие решения. Например, можно сначала нарисовать граф Куратовского на плоскости с *одним* самопересечением. Или можно считать поверхность тора поверхностью Земли с одним туннелем.

2.5.1. Ответы: (1) 2^{n^2}; (2) бесконечно много.

2.5.2. (1) Их количество равно числу k-элементных подмножеств множества всех $n(n-1)/2$ «возможных рёбер».

Ответ: $\binom{n(n-1)/2}{k}$.

(2) Количество таких мультиграфов равно числу сочетаний с повторениями размера k из множества всех $n(n+1)/2$ «возможных рёбер».

Ответ: $\binom{n(n+1)/2+k-1}{k}$.

2.5.3. (1) Пусть в мультиграфе есть эйлеров цикл. Рассмотрим произвольную вершину. Эйлеров цикл проходит по всем выходящим из нее рёбрам ровно по одному разу. При этом цикл равное число раз входит в эту вершину и выходит из нее. Значит, степень вершины чётна.

Пусть теперь в связном мультиграфе степень каждой вершины чётна. Рассмотрим максимальный путь $v_1 \ldots v_n$. Так как степень каждой вершины чётна, то $v_1 = v_n$ (иначе в этом пути имеется нечётное число рёбер, выходящих из v_1, значит, найдётся ребро, выходящее из вершины v_1, которого нет в пути, поэтому есть более длинный путь). То есть этот путь — цикл. Если в этом цикле имеются не все рёбра мультиграфа, то так как мультиграф связен, найдётся ребро, которое выходит из вершины цикла и не лежит в цикле. Поэтому есть более длинный путь. Противоречие. Значит, взятый нами максимальный путь является эйлеровым циклом.

(5) Ответ: при нечётных.

2.5.4. (1) Это обобщение условия эйлеровости. Нужно начать каждый из k путей в одной из вершин нечётной степени, а закончить в другой. При этом надо следить, чтобы при удалении очередного пути граф оставался связным.

2.5.8. (2) То, что путь закончится в вершине 1, доказывается аналогично критерию эйлеровости. Для доказательства эйлеровости достаточно показать, что для каждой вершины мультиграфа все инцидентные ей рёбра содержатся в цикле. Это доказывается индукцией по длине ориентированного пути по дереву от заданной вершины к вершине 1.

(3) Зафиксируем произвольную начальную вершину a и исходящее из нее ребро. Каждый эйлеров цикл мы будем строить, начиная с этой вершины и ребра. Сначала нужно показать, что любой эйлеров цикл получается с помощью алгоритма из п. (2). Для этого достаточно при-

вести остовное корневое дерево. Его мы составим из исходящих рёбер, которые обходились в данном цикле последними (по одному для каждой из вершин, кроме a), а в качестве корня возьмём a. После этого докажите, что эйлеровых циклов, соответствующих одному остовному дереву, ровно $(d_1-1)!\cdot\ldots\cdot(d_n-1)!$.

2.6.1. (При написании этого решения использован текст А. Голованова.) На плоскости гамильтонов цикл является замкнутой ломаной без самопересечений, т. е. границей многоугольника. Все вершины графа — вершины этого многоугольника. Проходящие внутри многоугольника рёбра не соприкасаются, а концы их лежат на многоугольнике.

Докажем, что *все грани внутри многоугольника можно правильно покрасить в* 2 *цвета*. (Для этого, неформально говоря, сотрём все рёбра и покрасим внутренность многоугольника в один цвет. Будем возвращать рёбра по одному. Эта идея проще всего формализуется при помощи индукции.)

Используем индукцию по количеству рёбер внутри многоугольника. База индукции — если таких рёбер нет — очевидна. Докажем шаг индукции. Добавленное ребро делит наш многоугольник на два меньших. В одном из них инвертируем все цвета. Докажем, что новая раскраска является правильной. Действительно, любые две смежные грани с одной стороны от этого ребра или поменяли свои цвета, или обе не поменяли, следовательно, их цвета по-прежнему различаются. Если же две смежные грани находятся по разные стороны от этого ребра, то они смежны ровно по этому ребру, т. е. эти две грани ранее были одной, но образовались в результате проведения этого ребра. Поэтому они имеют разные цвета.

Аналогично покрасим все грани снаружи многоугольника (это можно даже формально свести к случаю внутренности инверсией относительно точки внутри многоугольника). Так мы покрасим внутренность многоугольника в 2 цвета, внешнюю часть — в другие 2 цвета. Стало быть, построена правильная раскраска в 4 цвета.

2.6.2. Пункты (1) и (2) следуют из (3). (Не нужно требовать связности, она автоматически следует из условия.)

(3) Если вершина a_0 соединена ребром с вершиной a_s, то получаем несамопересекающийся цикл $a_0\ldots a_s$. Иначе ввиду максимальности вершина a_0 не соединена ребром ни с какой вершиной, кроме $a_1,\ldots,a_{s-1}$. Аналогично вершина a_s не соединена ребром ни с какой вершиной, кроме $a_1,\ldots,a_{s-1}$. Если a_s соединена ребром с a_i, то a_0 не соединена ребром с a_{i+1} (иначе, т. е. если есть рёбра (a_0,a_{i+1}) и (a_s,a_i), в графе есть цикл $a_0\ldots a_i a_s a_{s-1}\ldots a_{i+1}$). Значит, $\deg a_0\leqslant s-\deg a_s$, что противоречит условию.

(4) Так как граф связен, то от данного цикла ведёт хоть одно ребро вовне цикла. Поэтому, размыкая цикл в нужном месте, получаем путь длины s, проходящий по каждой своей вершине только один раз.

(5) Следует из п. (3), (4) для $s=n-1$.

Утверждение можно доказать и напрямую, аналогично п. (3). Обозначим через $a_0,\dots,a_s$ максимальный из путей в графе, проходящих по каждой своей вершине только один раз. Ввиду его максимальности вершина a_0 не соединена ребром ни с какой вершиной, кроме $a_1,\dots,a_s$. Если вершина x не принадлежит пути и a_0 соединена ребром с a_i, то x не соединена ребром с a_{i-1} (иначе есть путь $xa_{i-1}a_{i-2}\dots a_0a_ia_{i+1}\dots a_s$). Поэтому если a_0 соединена рёбрами с $a_{i_1},a_{i_2},\dots,a_{i_l}$, то x не соединена с x, $a_{i_1-1},a_{i_2-1},\dots,a_{i_l-1},a_s$. Значит, $\deg a_0+\deg x\leqslant n-2$, что противоречит условию.

2.6.4. (1) В этом графе степень каждой вершины не менее $k\geqslant 2$.

(2) В X нет двух соседних вершин несамопересекающегося цикла $v_1,\dots,v_s$, иначе он не максимальный. Поэтому если удалить из графа вершины множества X, то W и вершину несамопересекающегося цикла, не лежащую в X, нельзя будет соединить путём. То есть получится несвязный граф. Поэтому $|X|\geqslant k$.

2.6.5. (1) Граф на рис. 8 — двудольный с долями из 7 и 9 вершин: $2,4,6,8,10,12,16$ — одна доля. Гамильтонов путь в двудольном графе существует (тогда и) только тогда, когда количества вершин в долях отличаются не более чем на 1.

(2) В графе 46 вершин. Имеется одна 9-угольная грань, несколько 5-угольных и несколько 8-угольных. Обозначим

• через f число граней с той же стороны от гамильтонова цикла, что и 9-угольная;

• через f_k число k-угольных граней с той же стороны от гамильтонова цикла, что и 9-угольная.

Тогда $f=1+f_5+f_8$. Количество гранерёбер (или стрелок из задачи 2.4.3) равно $46+2(f-1)=9+5f_5+8f_8$. Складывая, получаем противоречие по модулю 3.

(3) Ответ следует из теоремы 2.6.3 (но не из теоремы Дирака 2.6.2(2)).

2.6.6. Так как степень каждой вершины равна $n-1$, а каждый гамильтонов цикл «уменьшает» степень вершины на 2, то в графе не может быть больше чем $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ таких гамильтоновых циклов.

Для построения примера сначала постройте $\left[\frac{n}{2}\right]$ непересекающихся гамильтоновых путей в графе K_n. Чтобы получить в K_n ровно $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ гамильтоновых циклов, нужно взять построенные гамильтоновы пути для K_{n-1} и «склеить их в цикл с последней вершиной».

2.6.7. (1) (При написании этого решения использован текст А. Жука.) База индукции: $n=2$. В этом случае в графе есть гамильтонов путь, состоящий из начала и конца единственного ребра графа.

Шаг индукции. Пусть $n \geqslant 3$ и v — вершина графа. По предположению индукции граф, полученный из исходного удалением вершины v, содержит гамильтонов путь. Обозначим этот путь $v_1 \dots v_{n-1}$. Если ребро ведет из v в v_1, то $v, v_1, \dots, v_{n-1}$ — искомый гамильтонов путь. Иначе ребро ведет из v_1 в v. Значит, существует максимальное число $l \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, для которого ребро ведёт из v_l в v. Если $l = n-1$, то $v_1, \dots, v_{n-1}, v$ — искомый путь. Иначе в графе есть рёбра $v_l v$ и $v v_{l+1}$. Тогда $v_1, \dots, v_l, v, v_{l+1}, \dots, v_{n-1}$ — искомый путь.

Замечание. С использованием перманента матрицы (п. 5.4) доказывается, что для некоторого $c > 0$ число гамильтоновых путей в любом турнире с n вершинами не превосходит $cn^{3/2}n!/2^n$ [AS].

2.6.8. Пусть в рёберном графе есть гамильтонов цикл. Если идти в нём по гамильтонову циклу, то в графе G мы идём по некоторому циклу с «остановками» в некоторых вершинах. Так как цикл гамильтонов, то любое ребро графа G имеет общую вершину с данным циклом и ни одно ребро не проходится дважды.

Обратно, пусть есть такой цикл в графе G. Заметим, что вершине степени l в G соответствует подграф, изоморфный K_l, в рёберном графе: его вершинами являются все рёбра исходного графа, проходящие через эту вершину. По циклу в графе G строим гамильтонов цикл в рёберном графе так: приходя в вершину графа G степени l, обходим гамильтоново те вершины подграфа K_l в рёберном графе, через которые ещё не проходили и не обязаны пройти в будущем, и так, чтобы последняя вершина соответствовала следующему ребру цикла в графе G, и т. д.

Замечание. При построении гамильтонова цикла в рёберном графе нельзя считать, что в G в заданном цикле не повторяются вершины, и что вершины вне заданного цикла соединены ребром только с одной вершиной в заданном цикле.

2.7.1. (1) Индукция по n. Докажем шаг индукции. Если рёбер нет, то утверждение очевидно. Иначе возьмём произвольное ребро. У вершин этого ребра нет общих соседей, иначе есть треугольник. Значит, из этих двух вершин в остаток графа выходит не более $n-2$ рёбер. По предположению индукции имеется не более $(n-2)^2/4$ рёбер, соединяющих оставшиеся вершины. Значит, $e \leqslant \dfrac{(n-2)^2}{4} + n - 2 + 1 = \dfrac{n^2}{4}$.

(2) Индукция по n с переходом от n к $n+2$. Докажем шаг индукции. Обозначим через t количество треугольников.

Первый случай: каждое ребро содержится в некотором треугольнике. (Идея доказательства в том, что если рёбер много, то и треугольников много.) Посчитаем двумя способами количество пар (треугольник, принадлежащее ему ребро). Получим $3t \geqslant e \geqslant \left[\frac{n^2}{4}\right]+1 \geqslant 3\left[\frac{n}{2}\right]-2$. Последнее неравенство верно, поскольку

$$\left[\frac{n^2}{4}\right]-3k+3 \geqslant k^2-3k+3=(k-1{,}5)^2+0{,}75 \geqslant 0, \quad \text{где} \quad k=\left[\frac{n}{2}\right].$$

Второй случай: есть ребро, которое не содержится ни в одном треугольнике. Тогда концы A и B этого ребра соединены не более чем с $n-2$ другими вершинами. Удаляем вершины A и B (и все рёбра, из них выходящие).

Если A и B соединены менее чем с $n-2$ другими вершинами, то в «оставшемся» графе хотя бы $\left[\frac{n^2}{4}\right]+1-n+2=\left[\frac{(n-2)^2}{4}\right]+2$ ребра. Удалим ребро одного из треугольников. Получим граф с $\left[\frac{(n-2)^2}{4}\right]+1$ рёбрами. По предположению индукции, в нём $\left[\frac{n}{2}\right]-1$ треугольников. Значит, в «оставшемся» графе есть $\left[\frac{n}{2}\right]$ треугольников.

Если A и B соединены ровно с $n-2$ другими вершинами, то в «оставшемся» графе $\left[\frac{n^2}{4}\right]+1-n+1=\left[\frac{(n-2)^2}{4}\right]+1$ рёбер. Значит, по предположению индукции, в нём есть $\left[\frac{n}{2}\right]-1$ треугольников. Кроме того, $n-2$ ребра из A и B идут к $n-2$ разным вершинам (иначе ребро AB попало бы в треугольник). Это значит, что рёбра из A и B идут ко всем остальным вершинам. В частности, к любому треугольнику идут как минимум 2 ребра из одной вершины, создавая ещё один треугольник. Значит, в графе есть $\left[\frac{n}{2}\right]$ треугольников.

(3) Индукция по n с переходом от n к $n+k$. Можно считать, что в графе есть k-клика, иначе можно добавить рёбра.

2.7.2. (1) Для всех пунктов этой задачи обозначим через $d_1,\ldots,d_n$ степени вершин графа. Можно считать, что $d_1,\ldots,d_m \geqslant 2$ и $d_{m+1},\ldots$ $\ldots,d_n<2$. Тогда

$$\left(\sum_{k=1}^m d_k\right)^2 \overset{(*)}{\leqslant} m\sum_{k=1}^m d_k^2 = m\left(2e+2\sum_{k=1}^m \binom{d_k}{2}\right) \overset{(**)}{\leqslant}$$

$$\leqslant n\left(n(n-1)+2\binom{n}{2}\right)=2n^2(n-1)<2n^3.$$

Здесь неравенство $(*)$ есть неравенство между средним арифметическим и средним квадратическим. Докажем неравенство $(**)$. Посчитаем двумя способами количество пар $(a,\{b,c\})$, где a,b,c — вершины графа, $b\neq c$, причем ab и ac — рёбра. Так как в графе нет несамопересекающегося цикла длины 4, то никакая пара $\{b,c\}$ не сидит в одной паре с двумя различными вершинами. Поэтому $\sum\limits_{k=1}^{m}\binom{d_k}{2}\leqslant\binom{m}{2}$. Вместе с оценкой числа рёбер в полном графе получаем неравенство $(**)$. Отсюда

$$2e\leqslant(n-m)+\sum_{k=1}^{m}d_k<n-m+\sqrt{2}n^{3/2}<2n^{3/2}.$$

(Мы благодарны Р. Садыкову за упрощение решения.)

(2) Продолжая первую строку неравенств из п. (1), имеем

$$\ldots\overset{(**)}{\leqslant}m\left(m(m-1)+4\binom{m}{2}\right)\leqslant 3m^2(n-1)<3m^3.$$

Неравенство $(**)$ доказывается аналогично п. (1). Так как в графе нет подграфа $K_{3,2}$, то никакая пара $\{b,c\}$ не сидит в одной паре с *тремя* различными вершинами. Поэтому $\sum\limits_{k=1}^{m}\binom{d_k}{2}\leqslant 2\binom{m}{2}$. Отсюда

$$2e\leqslant(n-m)+\sum_{k=1}^{m}d_k<n-m+\sqrt{3}m^{3/2}<3n^{3/2}.$$

(3) Можно считать, что $d_1,\ldots,d_m\geqslant 3$ и $d_{m+1},\ldots,d_n<3$. Тогда

$$\left(-2m+\sum_{k=1}^{m}d_k\right)^3=\left(\sum_{k=1}^{m}(d_k-2)\right)^3\leqslant m^2\sum_{k=1}^{m}(d_k-2)^3<$$
$$<6m^2\sum_{k=1}^{m}\binom{d_k}{3}\leqslant 6m^2\cdot 2\binom{m}{3}<2m^5.$$

Отсюда $2e\leqslant 2(n-m)+\sum\limits_{k=1}^{m}d_k<2n+\sqrt[3]{2}n^{5/3}<4n^{5/3}$.

(4) Можно считать, что $d_1,\ldots,d_m\geqslant s$ и $d_{m+1},\ldots,d_n<s$. Тогда

$$\left(-(s-1)m+\sum_{k=1}^{m}d_k\right)^s=\left(\sum_{k=1}^{m}(d_k-s+1)\right)^s\leqslant m^{s-1}\sum_{k=1}^{m}(d_k-s+1)^s<$$
$$<s!\,m^{s-1}\sum_{k=1}^{m}\binom{d_k}{s}\leqslant s!\,m^{s-1}(t-1)\binom{m}{s}<(t-1)m^{2s-1}.$$

Отсюда

$$2e\leqslant(n-m)(s-1)+\sum_{k=1}^{m}d_k<(s-1)n+\sqrt[s]{t-1}\,m^{2-1/s}<2tn^{2-1/s}.$$

2.7.3. Индукция по n. Докажем шаг индукции. Если каждая точка является концом ровно двух диаметров, то количество диаметров равно n. Если есть точка, являющаяся концом не более чем одного диаметра, то доказательство шага индукции заключается в её удалении. Остаётся случай, когда есть точка X, являющаяся концом трёх диаметров, и нет точки, являющейся концом не более чем одного диаметра. Данное множество лежит в одной полуплоскости относительно некоторой прямой, проходящей через X.

Рассмотрим «не крайний» диаметр XY, выходящий из X. Так как Y является концом не менее чем двух диаметров, то из Y выходит ещё один диаметр AY. Он не пересекает один из «крайних» диаметров XZ, выходящих из X. Отрезки XY и ZA пересекаются. Значит, по неравенству треугольника сумма их длин больше суммы двух диаметров. Противоречие.

2.7.4. (1) Для данного n выберем такое k, что $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$. На плоскости есть (самопересекающийся) дистанционный граф, содержащий граф k-мерного куба. В нём 2^k вершин и не менее $k \cdot 2^{k-1}$ рёбер. Поэтому

$$E_n(2) \geqslant k \cdot 2^{k-1} > \frac{n[\log_2 n]}{4}.$$

(2) Воспользуйтесь 2.7.2 (4).

(4) Оценка снизу следует из того, что для любых p, q в $\mathbb{R}^4$ есть (самопересекающийся) дистанционный граф, изоморфный полному двудольному графу $K_{p,q}$. Оценка сверху следует из того, что в $\mathbb{R}^4$ нет шести точек с попарными расстояниями 1, и из задачи 2.7.1 (3).

2.7.5. (1) Получается из 2.7.1 (4) для $k+1=10^q$ и $n=11^q$.

(2) Нужно уточнить рассуждения, применяемые при доказательстве п. (1), используя несуществование $q+2$ точек в $\mathbb{R}^q$, расстояние между любыми двумя из которых равно 1.

Замечание. Хотя это и не обязательно для формулировки или решения задачи, заметим, что для достаточно большого q такое подмножество V действительно существует. Это доказывается аналогично первым двум выключным формулам в [R1, п. 2.3, с. 16].

2.8.2. (1) Возьмите несамопересекающийся цикл, проходящий через первую вершину и ближайший (по рёбрам) ко второй вершине.

2.8.3. Возьмите цикл, не проходящий ни по одному ребру дважды, проходящий через первую вершину и ближайший ко второй вершине (аналогично решению предыдущей задачи).

2.8.5. (2) *Доказательство утверждения из подсказки.* Если любое ребро мультиграфа G содержит a или b, то теорема Менгера для G очевидна, и G — не контрпример. Поэтому в G есть ребро u, не содержащее ни a, ни b. Так как в G нет трёх $a-b$ путей, то в G/u нет трёх $a-b$ путей. Ввиду минимальности мультиграфа G мультиграф G/u содержит две вершины, разделяющие a и b. Среди них есть вершина графа G/u, «полученная» из ребра u, ибо в G нет двух вершин, разделяющих a и b. Значит, прообразы в G этих двух вершин являются искомыми тремя вершинами.

Доказательство теоремы Менгера для $k=3$. Пусть, напротив, теорема неверна. Тогда есть минимальный по числу рёбер контрпример G. Используем вершины x,y,z из подсказки. Назовем *тройкой* $a-b$ *путей* тройку путей из a в b, любые два из которых пересекаются только в концах.

Обозначим через G_a мультиграф, состоящий из

• компоненты A связности мультиграфа $G-x-y-z$, содержащей вершину a,

• вершин x,y,z и всех рёбер, соединяющих некоторую вершину из x,y,z с некоторой вершиной из A,

• новой вершины b' и рёбер $b'x$, $b'y$ и $b'z$.

Вершины a и b' мультиграфа G_a остаются в одной компоненте связности после удаления любых двух его вершин. Так как степень вершины b в графе G не менее трёх и при построении графа G_a было удалено ребро, соединяющее две из вершин x,y,z, то в мультиграфе G_a меньше рёбер, чем в G. Значит, в G_a есть тройка $a-b'$ путей.

Аналогично определяем мультиграф G_b и находим в нём тройку $a'-b$ путей. Построенные шесть путей дают тройку $a-b$ путей в G.

2.8.6. Утверждение задачи вытекает из следующего факта.

Утверждение. *Вершины A и B графа назовем* эквивалентными*, если существуют такие вершины $A=A_0,A_1,\dots,A_n=B$, что любые две соседние вершины A_i и A_{i+1} можно соединить k путями, не имеющими общих рёбер. Любые две эквивалентные вершины можно соединить k путями, не имеющими общих рёбер.*

Доказательство утверждения. Если удалить любые $k-1$ рёбер, то для любого i вершины A_i и A_{i+1} окажутся в одной компоненте связности. Значит, вершины A_0 и A_n также окажутся в одной компоненте связности. Остаётся применить рёберную теорему Менгера. □

§ 3. Раскраски графов и многочлены

3.1. Раскраски графов

Раскраска графа (т. е. вершин графа) в несколько цветов называется *правильной*, если концы любого ребра окрашены в разные цвета.

3.1.1. Докажите, что следующие три условия эквивалентны:
• граф двудолен;
• граф можно правильно раскрасить в 2 цвета;
• граф содержит циклы только чётной длины.

3.1.2. (1) Если в графе степень каждой вершины не превосходит d, то его можно правильно раскрасить в $d+1$ цвет.

(2) Если в связном графе степень каждой вершины не превосходит d и есть вершина степени менее d, то его можно правильно раскрасить в d цветов.

(3) Если в связном графе степень каждой вершины не превосходит d и есть вершина, после удаления которой граф перестает быть связным, то граф можно правильно раскрасить в d цветов.

(4) Если связный граф, имеющий более двух вершин, при удалении некоторого ребра распадается на два графа, каждый из которых можно правильно раскрасить в d цветов, то и исходный граф можно правильно раскрасить в d цветов.

3.1.3. Если граф с n вершинами не содержит $(k+1)$-антиклики, то граф невозможно правильно покрасить менее чем в n/k цветов.

3.1.4. В выпуклом многоугольнике провели несколько диагоналей, не имеющих общих внутренних точек. Полученный плоский граф можно правильно раскрасить в 3 цвета.

3.1.5. (1) В связном графе степень каждой вершины не превосходит трёх. Известно, что его можно правильно раскрасить в 3 цвета так, чтобы соседи некоторой вершины были одного цвета. Добавили одну вершину и выходящие из нее рёбра так, что по-прежнему степени всех вершин не превосходят трёх. Докажите, что полученный граф можно правильно раскрасить в 3 цвета.

(2) В связном графе степень каждой вершины не превосходит трёх. Известно, что его можно правильно раскрасить в 3 цвета и при любой такой раскраске у каждой вершины есть соседи разных цветов. Добавили одну вершину и выходящие из нее рёбра так, что по-прежнему степени всех вершин не превосходят трёх и полученный граф отличен

от K_4. Докажите, что полученный граф можно правильно раскрасить в 3 цвета.

(3) **Теорема Брукса.** *Если степень каждой вершины графа не превосходит $d \geqslant 3$ и нет $(d+1)$-клики, то граф можно правильно раскрасить в d цветов.*

3.1.6. Натуральные числа $d, k, d_1, \ldots, d_k$ таковы, что $d_1 + d_2 + \ldots \ldots + d_k = d + 1 - k$. Степень любой вершины графа не превосходит d. Докажите, что вершины можно разбить на k групп так, что любая вершина i-й группы соединена не более чем с d_i вершинами своей группы.

3.1.7. Трём смышлёным девочкам Ире, Тане и Юле выдали по копии одного и того же графа. Юля и Таня раскрасили свои графы правильно. Юля использовала меньше цветов, чем Таня, зато у Тани в каждый цвет покрашено не менее двух вершин. Докажите, что Ира может правильно раскрасить свой граф, использовав не больше цветов, чем Юля, и чтобы в каждый цвет было покрашено не менее двух вершин.

3.1.8. (1) Если граф невозможно правильно раскрасить в $k-1$ цвет, то для любой его правильной раскраски в k цветов существует путь, в котором встречается ровно по одной вершине каждого цвета.

(2) Если максимальный из путей в графе, проходящих по каждой своей вершине только один раз, проходит через d вершин, то граф можно правильно раскрасить в d цветов.

(3) Если максимальный нечётный несамопересекающийся цикл в графе проходит через $d-1$ вершину, то граф можно правильно раскрасить в d цветов.

3.1.9. Ориентированный граф, из каждой вершины которого выходит не более d рёбер, можно правильно раскрасить в $2d+1$ цвет.

3.1.10. Имеется несколько цветов. Каждой вершине двудольного графа с $n \leqslant 2^{k-1}$ вершинами сопоставлено не менее k цветов. («Списки» цветов, сопоставленные разным вершинам, могут быть и одинаковыми, и различными.) Тогда существует правильная раскраска графа, приписывающая каждой вершине некоторый сопоставленный ей цвет.

Раскраска рёбер графа называется *правильной*, если любые два ребра, имеющие общую вершину, окрашены в разные цвета.

3.1.11. (1) Если степень каждой вершины графа не превосходит d, то *рёбра* графа можно правильно раскрасить в $d+1$ цвет.

(2) Существует такая раскраска *рёбер* графа $K_{m,n}$ в два цвета, что число одноцветных подграфов $K_{a,b}$ не больше $\binom{m}{a}\binom{n}{b}2^{1-ab}$.

3.2. Хроматические число и индекс

Хроматическим числом $\chi(G)$ графа G называется минимальное количество цветов, в которые можно правильно покрасить вершины графа G.

3.2.1. Если при удалении из графа любой вершины хроматическое число уменьшается, то $\chi(G) \leqslant 1 + [2e/n]$.

3.2.2. (1) На какое число может измениться хроматическое число графа, если добавить к графу одно ребро? Или, формально, найдите все целые k, для которых существует граф G и его ребро u такие, что $\chi(G) - \chi(G-u) = k$.

(2) $\chi(V, E_1 \cup E_2) \leqslant \chi(V, E_1)\chi(V, E_2)$. (Напомним, см. п. 2.1, что через (V, E) обозначается граф со множеством вершин V и множеством рёбер E.)

(3) Для любых $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ постройте такие графы (V, E_1) и (V, E_2), что $\chi(V, E_1 \cup E_2) = \chi(V, E_1)\chi(V, E_2)$, $\chi(V, E_1) = r_1$ и $\chi(V, E_2) = r_2$.

3.2.3. Следующий алгоритм раскраски вершин графа называется *жадным*. Сначала все вершины произвольно нумеруются. После этого последовательно каждую вершину, начиная с первой, красим в цвет с минимальным номером, отсутствующим среди уже покрашенных соседей этой вершины.

(1) Вершины произвольного графа G можно занумеровать так, чтобы жадный алгоритм его раскраски использовал ровно $\chi(G)$ цветов.

(2) Для каждого целого $k > 0$ постройте такие двудольный граф и нумерацию его вершин, что раскраска графа, построенная жадным алгоритмом, отвечающим построенной нумерации, имеет не менее k цветов.

Эта задача показывает, что «качество» раскраски, построенной жадным алгоритмом, сильно зависит от упорядочения вершин.

Хроматический индекс графа — минимальное число цветов, в которые можно правильно раскрасить рёбра этого графа.

3.2.4. Исследуйте на планарность (п. 2.4), найдите хроматическое число и хроматический индекс графов с рис. 11 и 12.

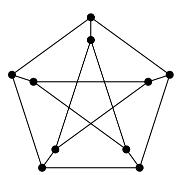


Рис. 11. Граф Петерсена

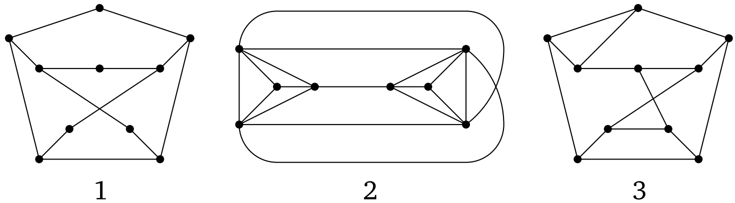


Рис. 12. Исследуйте на планарность, найдите хроматическое число и хроматический индекс графов

3.3. Хроматический многочлен и многочлен Татта

Значением *хроматической функции* χ_G графа G в точке t называется количество правильных раскрасок этого графа в t цветов.

3.3.1. Найдите хроматическую функцию для
(1) полного графа; (2) графа, не имеющего рёбер;
(3) пути; (4) цикла; (5) дерева
с n вершинами.

3.3.2. (1) $\chi_G = \chi_{G-u} - \chi_{G/u}$ для любого ребра u графа G.

(2) **Теорема Биркгофа—Уитни.** *Для каждого графа G существует ровно один такой многочлен, что для любого t число $\chi_G(t)$ правильных раскрасок графа G в t цветов равно значению в точке t этого многочлена.*

Ввиду этой теоремы хроматическая функция называется *хроматическим многочленом* и считается определённой не только для целых $t > 0$ (ср. с п. (5)).

(3) Степень хроматического многочлена χ_G равна n, старший коэффициент равен 1, второй коэффициент равен $(-e)$, коэффициенты знакопеременны (т. е. коэффициент при t^{n-2k} неотрицателен и коэффициент при t^{n-2k+1} неположителен для любого целого k).

(4) Третий коэффициент хроматического многочлена графа, считая с самого старшего, однозначно определяется набором подграфов графа, содержащих 3 вершины.

(5) Число $|\chi_G(-1)|$ равно числу *ациклических ориентаций* графа G, т. е. числу способов так расставить стрелки на его рёбрах, чтобы полученный ориентированный граф не содержал ориентированных циклов.

3.3.3. (1) Если хроматический многочлен графа равен $t(t-1)^{n-1}$, то граф — дерево.

(2) Не существует графа с хроматическим многочленом $t^4 - 3t^3 + 3t^2$.

3.3.4. (1) Путь из m вершин «прицепили» за один из концов к одной из вершин графа G, содержащего n вершин. Выразите хроматический многочлен полученного графа с $m+n-1$ вершиной через χ_G.

(2) Если H, K — графы, на которые распадается связный граф G при удалении его ребра, то $t\chi_G = (t-1)\chi_H\chi_K$.

3.3.5. Обозначим через $\chi'_G = \chi'_G(t)$ количество правильных раскрасок рёбер графа G в t цветов.

(1) Функция χ'_G является многочленом от t.

(2) Старший моном в χ'_G равен t^e.

(3) Коэффициент при t^{e-1} в χ'_G равен $-\sum\limits_{v\in V(G)} \binom{\deg v}{2}$.

Мостом называется ребро, при удалении которого количество связных компонент графа увеличивается. Граф называется *лесом*, если он не содержит несамопересекающихся циклов.

Напомним, что при стягивании ребра в мультиграфах, в отличие от графов, получившиеся рёбра кратности больше 1 не заменяются на рёбра кратности 1.

3.3.6. Для любого мультиграфа G выполнено равенство $T_G = T_{G-u} + T_{G/u}$, где u — любое ребро мультиграфа G, не являющееся ни петлей, ни мостом, и T_G — число

(1) *остовных лесов* в графе G (т. е. объединений остовов его компонент);

(2) таких наборов рёбер графа G, что для любой компоненты связности графа лежащие в ней рёбра из набора образуют связный подграф;

(3) подграфов графа G, являющихся лесами.

3.3.7. Даны связный мультиграф и набор рёбер в нём, не содержащий несамопересекающихся циклов и ни одного ребра некоторого максимального дерева. В мультимножестве (т. е. в неупорядоченном наборе с кратностями) мультиграфов разрешается для любого мультиграфа G и его ребра u, не являющегося ни петлёй, ни мостом, заменять один мультиграф G на два мультиграфа $G-u$, G/u. Эта замена применяется ко всем рёбрам набора (точнее, к соответствующим им рёбрам мультиграфов, которые получены из исходного при помощи этой операции). Тогда полученное мультимножество с точностью до изоморфизмов входящих в него мультиграфов корректно определено, т. е. не зависит от порядка рёбер, к которым мы применяем замены.

3.3.8. *Многочленом Татта* мультиграфа G называется многочлен $T(x,y)$ от двух переменных, определённый рекуррентной формулой $T_G = T_{G-u} + T_{G/u}$, если u — не петля и не мост, и $T_G(x,y) = x^i y^j$, если G имеет i мостов, j петель и не имеет других рёбер. Используя без доказательства корректность определения многочлена Татта, выразите через него

(0) хроматический многочлен;

(1), (2), (3) числа из задачи 3.3.6.

3.4. Подсказки

3.1.1. Сначала докажите, что чётность любых двух путей, соединяющих фиксированные вершины a и b, одинаковая.

3.1.2. (1), (2), (3) Примените индукцию по числу вершин.

3.1.3. Нет рёбер, соединяющих вершины одного цвета.

3.1.11. (2) Посчитаем двумя способами количество таких пар (A, x), что A — раскраска, а x — подграф, изоморфный $K_{a,b}$ и одноцветный относительно A.

3.3.2. (2) Используйте п. (1).

3.3.5. Рассмотрите граф G' — *рёберный граф* графа G. (См. определение в задаче 2.6.8.) Остаётся использовать свойства обычного хроматического многочлена (задача 3.3.2).

3.3.6. Аналогично теореме Биркгофа—Уитни (задача 3.3.2 (2)). Или используйте задачи 3.3.7 и 3.3.8.

3.3.8. Ответы: (0) $\chi_G(t) = (-1)^{n-k} t^k T_G(1-t, 0)$, где k — число компонент связности графа G.

(1) $T_G(1,1)$. (2) $T_G(1,2)$. (3) $T_G(2,1)$.

3.5. Указания

3.1.1. Будем считать, что граф связный. Тогда в качестве цвета вершины u возьмём чётность пути от u до некоторой заранее зафиксированной вершины v_0.

3.1.2. (1) На цвет каждой очередной вершины имеется не более d запретов, поэтому мы сможем её покрасить.

(2) Удалим из графа вершину степени меньше d со всеми выходящими из нее рёбрами. Оставшийся граф можно правильно раскрасить по предположению индукции. Вернем удаленную вершину. Запретов на её цвет меньше, чем d, поэтому мы сможем её окрасить.

3.1.8. (1) Все вершины цвета $k-1$, не соединённые ребром с цветом k, перекрасим в цвет k. После этого все вершины цвета $k-2$, которые можно, перекрасим в цвет $k-1$. Аналогично перекрасим вершины цветов $k-3,\ldots,2,1$. Согласно условию, в полученной раскраске найдётся вершина цвета 1. Так как мы её не перекрасили, то найдётся соседняя с ней вершина цвета 2. Так как эту вершину мы тоже не перекрасили, то найдётся соседняя с ней вершина цвета 3. Аналогично найдётся последовательность вершин цветов $3,4,\ldots,k$ такая, что каждая следующая вершина соединена ребром с предыдущей. Эти вершины имели те же цвета в исходной раскраске графа (до перекрашиваний) в силу правильности исходной раскраски. Значит, мы нашли требуемый путь.

(2) Следует из п. (1).

3.1.9. Сумма степеней вершин не превосходит $2nd$. Значит, есть вершина степени не более $2d$.

3.1.10. Посчитаем двумя способами количество таких пар (A,x), что

• A — подмножество множества всех цветов,

• x — вершина,

• все цвета, сопоставленные вершине x, *равнозначны* относительно A (т. е. либо все лежат в A, либо ни одно не лежит в A).

Обозначим через s общее количество цветов. Каждая вершина лежит в паре не более чем с 2^{s-k+1} подмножествами A. Всего в графе $n\leqslant 2^{k-1}$ вершин. Значит, общее количество пар не больше 2^s. Количество подмножеств множества всех цветов равно 2^s. С множеством A из всех s цветов каждая вершина x лежит в паре. Если вершина только одна, утверждение очевидно, поэтому будем считать, что имеются две вершины. Тогда найдётся подмножество A, с которым ни одна вершина не лежит в паре. Иными словами, можно разделить цвета на *яркие* (т. е. лежащие в A) и *тусклые* (т. е. не лежащие в A) так, чтобы в списке любой вершины был бы и яркий, и тусклый цвет. Для каждой вершины одной доли графа возьмём яркий цвет из её списка, а для каждой вершины другой доли графа возьмём тусклый цвет из её списка. Полученная раскраска — искомая.

Другая запись этого решения. Можно считать, что в списке каждой вершины ровно k цветов. По задаче 1.6.7 можно *правильно покрасить* данные цвета, т. е. можно разделить цвета на *яркие* и *тусклые* так, чтобы в списке любой вершины был и яркий, и тусклый цвет. Для каждой вершины одной доли графа возьмём яркий цвет из её списка, а для каждой вершины другой доли графа возьмём тусклый цвет из её списка. Полученная раскраска — искомая.

3.1.11. (2) Для каждого подграфа $K_{a,b}$, т. е. для каждой пары подмножеств из a вершин в первой доле и b вершин во второй, число раскрасок, для которых этот подграф $K_{a,b}$ одноцветен, равно $2^{1+mn-ab}$. Значит, количество пар равно $\binom{m}{a}\binom{n}{b}2^{mn-ab}$. Всего раскрасок 2^{mn}. Значит, для некоторой раскраски число одноцветных подграфов $K_{a,b}$ не больше $\binom{m}{a}\binom{n}{b}2^{1-ab}$.

3.2.1. Из условия следует, что степень каждой вершины не меньше $\chi(G)-1$. Значит, $2e \geqslant n(\chi(G)-1)$.

3.2.2. (1) Ответ: либо не изменится, либо увеличится на 1.

(3) Возьмите $(V, E_1 \cup E_2) = K_{r_1 r_2}$, (V, E_1) — несвязное объединение r_1 копий графа K_{r_2} и $(V, E_2) = K_{r_2,\ldots,r_2}$.

3.2.3. (1) Занумеруем цвета некоторой правильной раскраски. Занумеруем вершины так, чтобы меньшей из двух вершин при рассмотренной правильной раскраске отвечал цвет с меньшим или равным номером, чем номер цвета большей из двух вершин.

3.2.4. Хроматическое число и хроматический индекс графа Петерсена равны 3 и 4 соответственно.

Непланарность графа Петерсена получается из оценки числа рёбер в планарном графе без несамопересекающихся циклов малой длины (ср. с задачами 2.4.3 $(1,5)$). (Или из переформулировки теоремы Куратовского в терминах стягивания на подграфы и возможности стянуть к K_5 граф Петерсена или стянуть к $K_{3,3}$ некоторый его подграф.)

3.3.1. Ответы: (1) $t(t-1)(t-2)\ldots(t-n+1)$; (2) t^n; (3) $t(t-1)^{n-1}$; (4) $(t-1)^n+(-1)^n(t-1)$; (5) $t(t-1)^{n-1}$.

3.3.3. (2) Так как коэффициент при t^3 отличен от нуля, то в графе есть хотя бы одно ребро. Тогда значение многочлена при $t=1$ равно нулю. Противоречие.

§ 4. Основы теории Рамсея

4.1. Двухцветные числа Рамсея

4.1.1. (1) Среди пяти человек может не найтись ни трёх попарно знакомых, ни трёх попарно незнакомых.

(2) Среди любых шести человек найдётся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

(3) Среди любых десяти человек найдётся либо четверо попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

(4) Среди любых девяти человек найдётся либо четверо попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

(5) Среди восьми человек может не найтись ни трёх попарно знакомых, ни четверых попарно незнакомых.

(6) Среди любых 18 человек найдётся либо 4 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.

(7) Среди любых 14 человек найдётся либо 5 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых.

Числом Рамсея $R(m,n)$ называется минимальное из таких целых положительных чисел x, что выполнено любое из следующих эквивалентных условий:

• среди любых x человек найдётся либо m попарно знакомых, либо n попарно незнакомых;

• в любом графе с x вершинами найдётся либо m-клика, либо n-антиклика;

• для любой раскраски рёбер графа K_x в синий и красный цвета найдётся либо синяя m-клика, либо красная n-клика.

Например, очевидно, что $R(1,n)=1$ и $R(2,n)=n$ для любого n. В задаче 4.1.1 доказано, что $R(3,3)=6$, $R(3,4)=9$, $R(4,4)\leqslant 18$ и $R(3,5)\leqslant 14$. Но не очевидно, что такое число существует для любых m,n.

4.1.2. (1) Если числа $R(m-1,n)$ и $R(m,n-1)$ существуют, то число $R(m,n)$ существует и $R(m,n)\leqslant R(m-1,n)+R(m,n-1)$.

Это утверждение обычно коротко записывают в виде «$R(m,n)\leqslant R(m-1,n)+R(m,n-1)$». *Далее аналогичные утверждения записываются только в кратком виде.*

(2) $R(m,n)\leqslant \binom{m+n-2}{m-1}$.

(3) $R(m,n)\leqslant R(m-1,n)+R(m,n-1)-1$, если числа $R(m-1,n)$ и $R(m,n-1)$ чётны.

(4) $R(5,5) \leqslant 62$.

4.1.3. (1) Если в графе с 13 вершинами нет ни треугольника, ни 5-антиклики, то степень каждой вершины равна 4.

(2) Если в графе с 18 вершинами нет ни треугольника, ни 6-антиклики, то степень каждой вершины равна 5.

(Во избежание порочного круга, при решении этой и других задач не используйте без доказательства ни равенства $R(3,6)=18$, ни других фактов, которые не умеете доказывать.)

4.1.4. (1) $R(4,4) \geqslant 18$; (2) $R(3,5) \geqslant 14$.

4.1.5. (1) $R(n,n) > (n-1)^2$.

(2) **Теорема Эрдёша.** $R(n,n) > n2^{(n-3)/2}$ *начиная с некоторого n.* (Более точно, теорема Эрдёша утверждает, что $R(n,n) \gtrsim n2^{n/2}/e$. Знак $\gtrsim$ определен в п. 6.1.)

(3) Если $\binom{r}{n} < 2^{\binom{n}{2}-1}$, то $R(n,n) > r$.

(4) Если $\binom{r}{n} < s2^{\binom{n}{2}-1}$, то $R(n,n) > r-s$.

(5) $R(n,n) > r - \binom{r}{n}2^{1-\binom{n}{2}}$ для любого r.

4.1.6. В любом турнире с 4^n вершинами можно выбрать вершины $A_1, \ldots, A_n$ так, чтобы каждое ребро между ними было направлено от большего номера к меньшему.

4.1.7. При любой раскраске рёбер графа K_n в два цвета в нём найдётся гамильтонов цикл, состоящий из двух одноцветных путей (цвета путей могут быть и одинаковы, и различны).

4.2. Многоцветные числа Рамсея

4.2.1. (1) На плоскости отметили 17 точек и соединили каждые 2 из них цветным отрезком: красным, желтым или зеленым. Тогда есть одноцветный треугольник.

(2) Придумайте 9 точек на плоскости и раскраску в 3 цвета всех соединяющих их отрезков, для которой нет одноцветного треугольника.

(3) То же, что в п. (2), для 16 точек.

Числом Рамсея $R(m_1, \ldots, m_k)$ называется минимальное из таких целых положительных чисел x, что для любой раскраски рёбер графа K_x в k цветов для некоторого i найдётся m_i-клика i-го цвета (т. е. m_i вершин, попарно соединённых рёбрами цвета i).

Например, очевидно, что $R(1,m,n)=1$ и $R(2,m,n)=R(m,n)$ для любых m,n. В задаче 4.2.1 доказано, что $R(3,3,3) \leqslant 17$, $\geqslant 10$ и $\geqslant 17$. Но не очевидно, что такое число существует для любых $m_1, \ldots, m_k$.

4.2.2. (1) $R(m,n,p) \leqslant R(R(m,n),p)$.

(2) $$R(m_1,m_2,\ldots,m_k) \leqslant R(m_1-1,m_2,\ldots,m_k) + \\ + R(m_1,m_2-1,\ldots,m_k) + \ldots + R(m_1,m_2,\ldots,m_k-1).$$

(3) Найдите оценку на $R(m_1,m_2,\ldots,m_k)$ через полиномиальные коэффициенты.

Подробнее см. [w2] и [Ga].

4.2.3. Если рёбра графа K_{31} раскрашены в синий, белый и красный цвета так, что нет ни синей 4-клики, ни белой 3-клики, ни красной 3-клики, то из каждой вершины выходит 14, 15 или 16 синих рёбер.

4.2.4.Теорема. *Для любого целого $m>0$ существует такое $M>0$, что для любого простого числа $p>M$ сравнение $x^m+y^m \equiv z^m \pmod p$ имеет решение в ненулевых вычетах по модулю p.* (Доказать эту теорему вы сможете после решения двух следующих задач.)

4.2.5. Сравнение $x^m+y^m \equiv z^m \pmod p$ имеет решение в ненулевых вычетах по модулю p для

(1) $m=2$, $p=89$;
(2) $m=3$, $p=89$;
(3) $m=4$, $p=83$;
(4) $m=3$, $p=97$;
(5) $m=9$, $p=97$.

4.2.6. Теорема Шура. *Для любой раскраски натурального ряда в конечное число цветов найдётся одноцветное решение уравнения $x+y=z$.*

Более точно, для любого целого $k>0$ существует такое целое $r>0$, что для любой раскраски первых r натуральных чисел в k цветов найдётся одноцветное решение уравнения $x+y=z$.

4.2.7. (1), (2) Найдите нижние оценки на $R(\underbrace{n,\ldots,n}_{k})$, аналогичные утверждениям 4.1.5 (1, 2).

4.3. Числа Рамсея для гиперграфов

4.3.1. Среди любых четырёх из 8 000 студентов можно выбрать слаженную тройку (т. е. тройку, составляющую слаженную команду на олимпиаду по программированию). Докажите, что можно выбрать 5 студентов, любая тройка из которых является слаженной.

4.3.2. (1) Среди любых 5 точек общего положения на плоскости найдётся выпуклый 4-угольник.

(2) Найдётся 8 точек общего положения на плоскости, среди которых нет выпуклого 5-угольника.

(3) Среди любых 9 точек общего положения на плоскости найдётся выпуклый 5-угольник.

(4) **Теорема Эрдёша—Секереша.** *Для некоторого n среди любых n точек общего положения на плоскости найдётся выпуклый* 10*-угольник.* (Ср. с задачей 4.4.4.)

Числом Рамсея для гиперграфов $R_l(m_1, \ldots, m_k)$, $m_1, \ldots, m_k \geqslant l$, называется минимальное из таких целых положительных чисел x, что для любой раскраски всех l-элементных подмножеств x-элементного множества в k цветов найдутся i и подмножество размера m_i, у которого все l-элементные подмножества покрашены в i-й цвет. («Число Рамсея для гиперграфов» — единый термин, определённый выше; знание термина «гиперграф» не нужно для его понимания.)

Например, очевидно, что $R_2(m_1, \ldots, m_k) = R(m_1, \ldots, m_k)$ и $R_3(3, n) = n$. В задаче 4.3.1 требуется доказать, что $R_3(5, 4) \leqslant 8\,000$. А при решении задачи 4.3.2 (4) требуется доказать, что $R_3(10, 10)$ или $R_4(5, 10)$ существует.

4.3.3. (1) Число $R_l(m_1, \ldots, m_k)$ существует для любых $m_1, \ldots, m_k$. (Это не очевидно!)

(2) $R_l(m_1, \ldots, m_k) \leqslant R_l(R_l(m_1, m_2), m_3, \ldots, m_k)$.

(3) $R_l(m, n) \leqslant R_{l-1}(R_l(m-1, n), R_l(m, n-1)) + 1$.

4.3.4. (1) Если $\binom{r}{n} < 2^{\binom{n}{3}-1}$, то $R_3(n, n) > r$.

(2) Найдётся такое число $c > 0$, что $R_3(n, n) \geqslant 2^{cn^2}$.

(3) Найдите нижние оценки на $R_l(\underbrace{n, \ldots, n}_{k})$, аналогичные утверждениям 4.1.5 (1, 2) (ср. с задачей 4.2.7).

Известно, что $R_l(\underbrace{n, \ldots, n}_{r^{2r}+1}) \geqslant (l-1)r^{r^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{r}}}}}$ (степенная башня высотой n).

4.4. Результаты рамсеевского типа

4.4.1. Верно ли, что для любой раскраски точек плоскости в два цвета найдётся

(1) одноцветный равносторонний треугольник со стороной 1 или $\sqrt{3}$?

(2) одноцветный равносторонний треугольник со стороной 1?

(3) одноцветный треугольник со сторонами $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \pi$?

4.4.2. При любой раскраске точек плоскости в три цвета найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1.

4.4.3. (1) Найдётся такое n, что для любой раскраски пространства $\mathbb{R}^n$ (определение см. в гл. 7) в 9 цветов найдётся прямоугольник с одноцветными вершинами и сторонами 1 и 2.

(2) Верно ли, что для любого параллелограмма P с неперпендикулярными сторонами найдётся такое n, что для любой раскраски точек пространства $\mathbb{R}^n$ в 4 цвета найдётся равный P параллелограмм с вершинами одного цвета?

4.4.4. Назовем *m-чашкой* (*m-шапкой*) подмножество из m точек графика выпуклой вниз (вверх) функции. Обозначим через $f(k,l)$ минимальное число n, такое что среди любых n точек на плоскости, имеющих разные абсциссы, и никакие три из которых не лежат на прямой, есть либо k-чашка, либо l-шапка. (Не очевидно, что такое число существует. Поэтому о формулах из этой задачи справедливо замечание, аналогичное сделанному в задаче 4.1.2 (1).)

(1) Среди любых $f(m,m)$ точек на плоскости найдётся выпуклый m-угольник. (Ср. с задачей 4.3.2.)

(2) $f(k,l) \leqslant f(k-1,l)+f(k,l-1)-1$.

(3) $f(k,l) \leqslant \binom{k+l-4}{k-2}+1$.

(4) $f(k,l) = \binom{k+l-4}{k-2}+1$.

4.4.5. (1) При любой раскраске чисел $1,\ldots,9$ в 2 цвета найдётся одноцветная трёхчленная арифметическая прогрессия.

(2) Аналог предыдущего пункта для чисел $1,\ldots,8$ неверен.

(3) Существует такое целое W, что при любой раскраске чисел $1,\ldots$ $\ldots,W$ в 2 цвета найдётся либо трёхчленная арифметическая прогрессия первого цвета, либо четырёхчленная — второго.

(4) Существует такое целое W, что при любой раскраске чисел $1,\ldots$ $\ldots,W$ в 3 цвета найдётся одноцветная трёхчленная арифметическая прогрессия.

(5) То же, что в предыдущем пункте, для r цветов.

(6)* **Теорема ван дер Вардена.** *Для любых k, r при любой раскраске натурального ряда в r цветов найдётся одноцветная k-членная арифметическая прогрессия.* (Ср. с теоремой Шура 4.2.6.)

4.4.6. (1) Из любых 5 точек на плоскости можно выбрать две такие непересекающиеся пары точек, что отрезок, соединяющий точки в первой паре, пересекает отрезок, соединяющий точки во второй паре.

($1'$) Для любых 5 точек общего положения на плоскости количество пересечений отрезков, не имеющих общих концов, каждый из которых соединяет данные точки, нечетно.

(Набор точек на плоскости называется набором *общего положения*, если никакие 3 из них не лежат на одной прямой.)

(2) **Теорема Конвея—Гордона—Закса для линейных вложений.** *Для любых 6 точек общего положения в пространстве найдутся два* зацепленных *треугольника с вершинами в этих точках* (*т. е. таких, что объединение сторон первого пересекает второй двумерный треугольник в единственной точке.*)

(Набор точек в пространстве называется набором *общего положения*, если никакие 4 из них не лежат в одной плоскости.)

(3) **Теорема ван Кампена—Флореса для линейных вложений.** *Из любых 7 точек в четырехмерном пространстве можно выбрать две такие непересекающиеся тройки точек, что образованные этими тройками двумерные треугольники пересекаются.*

Подробнее см. [Gra].

4.5. Числа Рамсея для подграфов

4.5.1. Для любых графов G и H существует целое положительное число x, для которого при любой раскраске рёбер графа K_x в два цвета найдётся либо подграф первого цвета, изоморфный G, либо подграф второго цвета, изоморфный H.

Наименьшее из таких чисел x обозначается $R(G,H)$.

4.5.2. $R(G,H) \geqslant (\chi(G)-1)(c(H)-1)+1$, где $\chi(G)$ — хроматическое число графа G, $c(H)$ — число вершин в наибольшей компоненте связности.

4.5.3. Обозначим через T_m дерево на m вершинах.

(1) $R(T_m,K_n)=(m-1)(n-1)+1$.

(2) Если $m-1$ делит $n-1$, то $R(T_m,K_{1,n})=m+n-1$.

4.5.4. Обозначим через nK_3 граф из n непересекающихся (по вершинам) треугольников.

(1) $R(nK_3,nK_3)\geqslant 5n$.

(2) Рёбра полного графа раскрашены в синий и красный цвета. Если в графе есть синий и красный треугольники, то среди вершин этих треугольников есть пять вершин A, B, O, C, D, для которых треугольник AOB синий, а треугольник COD красный.

(3) $R(nK_3,nK_3)\leqslant 5n+1$.

(4)* $R(2K_3,2K_3)=10$.

(5)* $R(nK_3,nK_3)=5n$ для любого $n>1$.

4.5.5. Найдите $R(K_3,C_n)$, где C_n — цикл с n вершинами (см. п. 2.1).

4.6. Подсказки

4.1.2. (2) Следует из рекуррентного соотношения п. (1).

(3) Пусть это неверно, т. е. существует граф, в котором $R(m-1,n)+$ $+R(m,n-1)-1$ вершин, но нет ни m-клики, ни n-антиклики.

(4) Используйте рекуррентные соотношения п. (1), (3).

4.1.3. (1) Используйте то, что $R(3,4)\leqslant 9$ (задача 4.1.1(4)).

(2) Используйте то, что $R(3,5)\leqslant 14$ (задача 4.1.1(7)).

4.1.4. (1) Рассмотрите граф с 17 вершинами, в котором вершины i,j соединены ребром тогда и только тогда, когда $i-j-x^2$ делится на 17 для некоторого целого x.

(2) Рассмотрите граф с 13 вершинами, в котором вершины i,j соединены ребром тогда и только тогда, когда $i-j-x^3$ делится на 13 для некоторого целого x.

4.1.5. (2) Возьмите $r:=[n2^{n/2}/e]$ в п. (5). Используйте задачу 6.1.6 (3) (ср. с формулой Стирлинга 6.1.6 (5)).

(3) Подсчёт двумя способами, ср. п. 1.6, или случайная раскраска, п. 6.3.

(4) Аналогично решению п. (3). После выбора раскраски, в которой одноцветных клик не более s, удалите из каждой одноцветной клики по вершине.

(5) Следует из п. (4).

4.2.1. (1) Из каждой точки выходит не менее 6 одноцветных отрезков.

(3) Из каждой точки выходит по 5 отрезков каждого цвета.

4.2.2. Аналогично решению задачи 4.1.2.

4.2.5. (1) *Первый способ*. Найти явное решение при помощи пифагоровых троек.

Второй способ. Построим граф с p вершинами, в котором вершины i,j соединены ребром тогда и только тогда, когда $i-j$ — квадратичный вычет по модулю p. В таком графе есть либо 3-клика, либо 3-антиклика.

(2), (3) Используйте малую теорему Ферма.

(4) Раскрасьте рёбра графа K_{96} в 3 цвета так, чтобы наличие одноцветного треугольника означало наличие необходимой тройки чисел.

4.2.7. (2) Сначала докажите, что если $\binom{r}{n}<k^{\binom{n}{2}-1}$, то $R(\underbrace{n,\ldots,n}_{k})>r$.

4.3.1. Докажем, что можно выбрать четырёх таких студентов, если всего студентов 19 (а не 8 000). Выберем одного из студентов и назовем его Никитой. Двух студентов среди оставшихся подружим, если они вместе с Никитой составляют слаженную тройку. Так как $R(4,4) \leqslant 18$, то среди оставшихся студентов найдутся либо четверо попарно дружных, либо четверо попарно не дружных.

В первом случае, так как среди этих четверых есть слаженная тройка, эти трое вместе с Никитой составляют нужную четвёрку.

Во втором случае к любым трём из этих четверых можно добавить Никиту. Среди полученных четырёх студентов найдётся слаженная тройка. Такой тройкой может быть только тройка студентов, к которой мы добавили Никиту. Итак, четверо попарно не дружных студентов составляют нужную четвёрку.

Пять таких студентов выбираются аналогично с помощью неравенства $R(19,5) < 8\,000$, вытекающего из задачи 4.1.2 (2). (Более сильное неравенство $R(19,5) \leqslant 6\,783$ получается из задач 4.1.2 (1, 3).)

4.3.2. (1) Несложный перебор, основанный на рассмотрении выпуклой оболочки точек.

(3) Более сложный перебор, основанный на рассмотрении выпуклой оболочки точек.

(4) Занумеруем n точек на плоскости. Назовем (неупорядоченную) тройку $\{i,j,k\}$ точек, где $i<j<k$, *положительной*, если треугольник ijk (с упорядоченными вершинами) ориентирован положительно.

Другое решение. Посадим в каждую точку по студенту. Скажем, что четверо студентов образуют команду по бриджу, если они сидят в вершинах выпуклого 4-угольника.

4.3.3. (3) Обозначим $x := R_{l-1}(R_l(m-1,n), R_l(m,n-1)) + 1$. Пусть дана раскраска l-элементных подмножеств x-элементного множества X в красный и синий цвета. Возьмём любую точку A множества. Определим *индуцированную* покраску $(l-1)$-элементных подмножеств множества $X \setminus \{A\}$ формулой $c(S) := c(\{A\} \cup S)$.

4.3.4. (2) Аналогично решениям задач 4.1.5 и 4.2.7.

4.4.1. (1) Используйте ромб с углом $\pi/3$.

(2) Раскрасьте плоскость «полосами».

(3) Используйте п. (1).

4.4.2. В противном случае вершины любого равностороннего треугольника со стороной 1 разного цвета.

4.4.5. (1) Разберите варианты раскраски чисел 4 и 6.

(4) Приведём доказательство для двух цветов. Оно более сложно, чем решение п. (1), зато обобщается на 3 цвета, если вместо прямоугольника взять параллелепипед.

Расположим числа $1,\ldots,325$ в таблицу 5×65: $a_{jk} := j+5(k-1)$, $j \in \{1,2,3,4,5\}$, $k \in \{1,2,\ldots,65\}$. Среди первых 33 (5-элементных) столбцов есть два одинаково раскрашенных. Пусть, например, это 1-й и 23-й столбцы. В каждом из них среди первых трёх элементов есть одноцветная арифметическая прогрессия длины 2. Пусть, например, это 1-й и 3-й элементы. Пусть нет трёхчленной арифметической прогрессии. Тогда элементы 5 в обоих столбцах (1-м и 23-м) другого цвета. Рассматривая элемент 5 в 45-м столбце, получаем противоречие.

4.4.6. (1), (1′) Перебор по количеству вершин в выпуклой оболочке.

(2) Сведите к п. (1′). См. подробности в [S9] или [PS] или [BM].

(3) Сведите к п. (2′) (сформулируйте его сами). См. подробности в [S9] или [BM].

4.5.2. Постройте раскраску графа $K_{(\chi(G)-1)(c(H)-1)}$, для которой нет ни подграфа первого цвета, изоморфного G, ни подграфа второго цвета, изоморфного H.

4.7. Указания

4.1.1. (1) Возьмём цикл длины 5.

(2) Рассмотрим произвольного человека.

Пусть у него есть хотя бы 3 знакомых. Если среди них есть пара знакомых между собой, то они вместе с рассмотренным человеком образуют тройку попарно знакомых. Иначе они сами образуют тройку попарно незнакомых.

Пусть теперь у рассмотренного человека среди оставшихся 5 человек нет трёх знакомых. Тогда у него найдётся 3 незнакомых. Если среди них есть пара незнакомых между собой, то они вместе с рассмотренным человеком образуют тройку попарно незнакомых. Иначе они сами образуют тройку попарно знакомых.

(3) Рассмотрим произвольного человека. У него найдётся либо 6 знакомых, либо 4 незнакомых. Пусть найдётся 4 незнакомых. Если среди них есть пара незнакомых между собой, то они вместе с рассмотренным человеком образуют тройку попарно незнакомых. Иначе они сами образуют четвёрку попарно знакомых.

Пусть теперь у рассмотренного человека найдётся 6 знакомых. Согласно п. (2), среди них найдётся либо трое попарно незнакомых, либо трое попарно знакомых. Последние образуют с рассмотренным человеком четвёрку попарно знакомых.

(4) Если у некоторого человека найдётся 6 знакомых или 4 незнакомых, то мы найдём нужную группу людей аналогично решению п. (3). Иначе у всех девяти человек ровно по 5 знакомых. Тогда количество пар знакомых людей равно $\frac{9\cdot 5}{2}=22{,}5$, т. е. не целое число, что невозможно.

(5) Возьмём цикл $1, 2, \ldots, 8$ длины 8 и добавим рёбра 1—5, 2—6.

4.1.2. (1) Рассмотрим произвольный граф с $R(m-1,n)+R(m,n-1)$ вершинами. Выберем его вершину A. По принципу Дирихле из этой вершины выходит либо $R(m-1,n)$ рёбер, либо $R(m,n-1)$ антирёбер. Рассмотрим первый случай (второй аналогичен). Тогда среди концов рёбер, выходящих из A, по условию найдётся либо n-клика, либо $(m-1)$-антиклика. В первом случае нужное доказано. Во втором, добавляя вершину A, получаем m-антиклику.

(2) По индукции. База $n=1$.

(3) См. подсказку. Степень каждой вершины равна $R(n-1,m)-1$ (и её антистепень равна $R(m,n-1)-1$). Получаем, что все степени нечётны, и количество вершин тоже нечётно. Противоречие с чётностью суммы степеней вершин графа.

(4) $R(5,5) \leqslant 2R(4,5)$ и $R(4,5) \leqslant R(4,4)+R(3,5)-1 = 18+14-1 = 31$.

4.1.3. (1) Рассмотрим произвольную вершину.

Пусть её степень не меньше 5. Так как в графе нет треугольников, то между вершинами, инцидентными данной, нет рёбер. Значит, они образуют 5-антиклику.

Пусть теперь степень вершины не больше 3. Тогда вершин, не соединённых с ней, $\geqslant 9$. Так как $R(3,4) \leqslant 9$ и в графе нет треугольника, то есть 4-антиклика. Она вместе с данной вершиной образуют 5-антиклику. Противоречие.

(2) Начало доказательства аналогично решению п. (1). Если степень некоторой вершины не менее 6, то найдётся либо треугольник, либо 6-антиклика. Если же эта степень меньше 4, то имеется не меньше 14 вершин, не соединённых с данной. Тогда, используя неравенство $R(3,5) \leqslant 14$, получаем либо треугольник, либо 6-антиклику. Значит, степень каждой вершины равна либо 4, либо 5.

Пусть есть вершина A степени 4. Обозначим через $B_1, \ldots, B_4$ вершины, инцидентные A. В графе $H := G \setminus \{A, B_1, \ldots, B_4\}$ всего 13 вершин. Если H содержит треугольник или 5-антиклику, то получается противоречию с условием на G. Значит, по п. (1) степень каждой вершины графа H равна 4. Из вершины B_1 проведено ребро в A и не проведены рёбра в B_2, B_3, B_4. Значит, в графе H есть три вершины C_1, C_2, C_3, соединённые с B_1 ребром. Так как C_1, C_2, C_3 имеют степень 4 в H и соединены ребром с B_1, то ни одна из них не соединена ребром (в G) ни с одной из вершин B_2, B_3, B_4. Так как в G нет треугольников, то $B_2, B_3, B_4, C_2, C_3, C_4$ образуют 6-антиклику.

4.1.4. (1) Вычеты, сравнимые с квадратами, по модулю 17 суть ± 1, ± 2, $\pm 4, \pm 8$. Назовем эти вычеты *квадратами*. Чтобы проверить отсутствие 4-клики, достаточно доказать, что нет трёх квадратов, все попарные суммы которых тоже являются квадратами. Перебрав, получаем, что только у следующих пар квадратов сумма тоже квадрат: $(\pm1,\pm8)$, $(\pm1,\mp2)$, $(\pm2,\mp4)$, $(\pm4,\mp8)$. Перебрав, получаем, что искомой тройки квадратов нет. Аналогично, рассматривая неквадраты $\pm3,\pm5,\pm6,\pm7$, получаем, что нет и аналогичной тройки неквадратов. Действительно, только у следующих пар неквадратов сумма тоже неквадрат: $(\pm3,\pm7)$, $(\pm3,\mp6)$, $(\pm5,\pm6)$, $(\pm5,\pm7)$.

(2) Вычеты, сравнимые с кубами, по модулю 13 суть ±1 и ±5. Назовем эти вычеты *кубами*.

Если в этом графе есть треугольник i,j,k, то $(i-j)+(j-k)=(i-k)$. То есть сумма двух кубов равняется третьему кубу. Это невозможно.

Пусть есть 5-антиклика. Без ограничения общности, одна из вершин — 13. Тогда оставшиеся вершины могут быть только с номерами $4,3,2,7,6,11,10,9$. Среди этих вершин есть цикл $4,3,2,7,6,11,10,9$ и рёбра 2—10, 3—11. Значит, как вы доказали в решении задачи 4.1.1(5), среди вершин $4,3,2,7,6,11,10,9$ нет 4-антиклики. Противоречие.

4.1.5. (2) (При написании этого решения использован текст А. Жука.) Возьмем $r:=[n2^{n/2}/e]$. Тогда

$$\binom{r}{n}\leqslant\frac{r^n}{n!}\leqslant\left(\frac{er}{n}\right)^n=\left(\frac{e[n2^{n/2}/e]}{n}\right)^n\leqslant 2^{n^2/2}.$$

Здесь второе неравенство получено в задаче 6.1.6 (3). Поэтому и по п. (5)

$$R(n,n)>r-\binom{r}{n}2^{1-\binom{n}{2}}-1\geqslant r-2^{\frac{n^2}{2}+1-\binom{n}{2}}-1\gtrsim\frac{n2^{\frac{n}{2}}}{e}-2^{1+\frac{n}{2}}\gtrsim\frac{n2^{\frac{n}{2}}}{e}.$$

4.1.6. Индукцией по n (даже с заменой 4^n на 2^n).

Или используйте $R(n,n)<4^n$. Занумеруйте вершины в турнире и соедините вершины ребром, если вершина с большим номером выиграла у вершины с меньшим. Тогда клика или антиклика на n вершинах будет искомым графом.

4.1.7. Индукция по n. Предположим, что для K_n такой цикл обязательно существует. Выберем в K_{n+1} такой цикл из n вершин. Занумеруем вершины так, чтобы путь $k,k+1,\ldots,n$ был синим, а $n,1,\ldots,k$ — красным. Если ребро $(n,n+1)$ синее, то удалим из цикла ребро $(n,1)$ и добавим $(n,n+1)$, $(n+1,1)$. Если ребро $(n,n+1)$ красное, то удалим из цикла ребро $(n-1,n)$ и добавим $(n,n+1)$, $(n+1,n-1)$. Получим нужный гамильтонов цикл (независимо от цвета рёбер $(n+1,1)$ и $(n+1,n-1)$).

4.2.1. (1) См. подсказку. Далее используйте задачу 4.1.1(2).

(3) Если из точки A выходят отрезки некоторого цвета в точки $B_1, \dots, B_5$, то отрезки, соединяющие точки $B_1, \dots, B_5$, образуют два одноцветных цикла длины 5.

4.2.2. (3) $R(m_1, m_2, \dots, m_k) \leqslant \binom{m_1 + \ldots + m_k - k}{m_1 - 1, \dots, m_k - 1} = \dfrac{(m_1 + \ldots + m_k - k)!}{(m_1 - 1)! \ldots (m_k - 1)!}$.
Подробнее см. [w2] и [Ga].

4.2.3. Из каждой вершины выходит менее $R(3,3,3) = 17$ синих рёбер и менее $2R(4,3) - 1 = 17$ не синих рёбер.

4.2.5. (1) (Окончание второго способа.) Если получилась антиклика, то домножим числа в антиклике на квадратичный невычет, и пример готов!

(2) По малой теореме Ферма $x \equiv x^{89} \equiv x^{177} = (x^{59})^3 \pmod{89}$. Тогда $1^3 + 1^3 \equiv 2 \equiv (2^{31})^3$.

(3) Возьмем ненулевое решение $(x, y, z) = (3, 4, 5)$ сравнения $x^2 + y^2 \equiv z^2 \pmod{83}$. По малой теореме Ферма $x^2 \equiv x^{84} \equiv (x^{21})^4 \pmod{83}$. Тогда $(3^{21})^4 + (4^{21})^4 \equiv (5^{21})^4 \pmod{83}$.

(4) Назовем ненулевые вычеты x, y по модулю 97 *однокубными*, если $x = a^3 y$ для некоторого вычета a.

(5) Используйте п. (4) и малую теорему Ферма.

4.2.6. Возьмём $r := R(\underbrace{3, \dots, 3}_{k})$. Раскрасим ребро (i, j) графа K_r в цвет числа $|i - j|$. Одноцветный треугольник с вершинами $i > j > m$ даёт нужное решение $x = i - j$, $y = j - m$, $z = i - m$.

4.2.7. (1) $R(\underbrace{n, \dots, n}_{k}) > (n-1)^k$.

(2) $R(\underbrace{n, \dots, n}_{k}) > k^{(n-1)/2}$.

4.3.1. Выберем одного из студентов и назовем его Никитой. Двух студентов среди оставшихся подружим, если они вместе с Никитой составляют слаженную тройку. Так как $R(19, 5) < 8\,000$, то среди оставшихся студентов найдутся либо 19 попарно дружных, либо 5 попарно не дружных.

В первом случае среди этих 19 есть 4 студента, любая тройка из которых является слаженной. Эти четверо вместе с Никитой составляют нужную пятерку.

Во втором случае выберем любую тройку из этих 5 и добавим к ним Никиту. Среди полученных 4 студентов найдётся слаженная тройка. Значит, выбранная тройка слаженная. Итак, пятеро попарно не дружных студентов составляют нужную пятерку.

Аналогичное рассуждение на более абстрактном языке проведено в задаче 4.3.3 (3).

4.3.2. (4) (При написании этого решения использован текст А. Голованова.) Аналогично решению задачи 4.3.1 для достаточно большого n найдем либо 10 точек, любые три из которых образуют положительную тройку, либо 10 точек, любые три из которых не образуют положительную тройку. (Научно говоря, $n = R_3(10, 10)$.) Не умаляя общности, будем считать, что имеет место первый случай. Обозначим эти точки через $i_1 < i_2 < \ldots < i_{10}$. Так как треугольник $i_j i_{j+1} i_k$ ориентирован положительно для любых $j < k$, то все 10 точек расположены с одной стороны от прямой $i_j i_{j+1}$ для любого j (здесь $i_{11} = i_1$). Значит, они образуют выпуклый 10-угольник.

Замечание. Для любого натурального $m \geqslant 3$ найдётся такое n, что среди любых n точек общего положения на плоскости найдутся m, являющиеся вершинами выпуклого m-угольника. Аналогично вышенаписанному доказывается, что $n = R_3(m, m)$ подойдёт.

Другое решение. Аналогично решению задачи 4.3.1, найдём 10 студентов, любые четверо из которых образуют команду. Значит, все четырёхугольники, составленные с помощью этих 10 точек, выпуклы. Несложная теорема Каратеодори утверждает, что тогда эти 10 точек образуют выпуклый 10-угольник.

Ещё одно решение см. в задаче 4.4.4.

4.3.3. (1) Следует из п. (2) и (3) по индукции.

(2) Объединим первый и второй цвет в один цвет.

(3) См. подсказку. Мы предполагаем, что числа Рамсея в правой части конечны. Поэтому существует, не уменьшая общности, подмножество $Y \subset X \setminus \{A\}$ из $R_l(m-1, n)$ точек, все $(l-1)$-подмножества которого покрашены в красный цвет. Тогда либо в Y есть (нужное) n-элементное «синее подмножество», либо в X есть $(m-1)$-элементное «красное подмножество». Во втором случае добавляем к нему точку A. Подробнее см. [VS].

4.3.4. (2) (При написании этого решения использован текст А. Жука.) Положим $r := [2^{n^2/7}]$. Тогда

$$\binom{r}{n} < \frac{r^n}{n!} < \frac{2^{n^3/7} e^n}{n^n} = 2^{\frac{n^3}{7} + n\log_2 e - n\log_2 n} \overset{(*)}{<} 2^{\frac{(n-2)^3}{6} - 1} < 2^{\binom{n}{3} - 1}.$$

Здесь неравенство $(*)$ выполнено для всех n, больших некоторого N. Обозначим $c := \min\left\{\frac{1}{7}, \frac{1}{N^2}\right\}$. Тогда $R_3(n, n) > 2 \geqslant 2^{cn^2}$ для всех $n \leqslant N$ и по пункту (1) $R_3(n, n) > 2^{n^2/7} \geqslant 2^{cn^2}$ для всех $n > N$.

(3) Сначала докажите, что если $\binom{r}{n} < k^{\binom{n}{l} - 1}$, то $R_l(n; k) > r$. Отсюда $R_l(\underbrace{n, \ldots, n}_{k}) > k^{(n-l+1)^{l-1}/l!}$.

4.4.1. (1) Предположим, что это неверно. Так как существуют точки разных цветов, то найдутся точки A и E разного цвета на расстоянии 2 друг от друга. Обозначим через C середину отрезка AE. Без ограничения общности, C того же цвета, что и A. Возьмём ромб $ABCD$, у которого $\angle B = \pi/3$. Тогда ABC и ACD — равносторонние треугольники со сторонами 1. Следовательно, B и D — точки того же цвета, что и E. Получили равносторонний треугольник BDE со стороной $\sqrt{3}$.

(2) Раскрасим плоскость «полосами» шириной $\sqrt{3}/2$; каждую граничную прямую красим в цвет полосы «ниже» этой прямой. Тогда для любого равностороннего треугольника найдутся две вершины, находящиеся в соседних полосах.

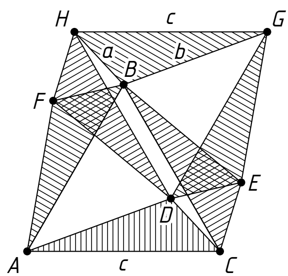


Рис. 13. Треугольник со сторонами $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \pi$

(3) Аналогично решению п. (1) найдётся правильный одноцветный треугольник со стороной $\sqrt{2}$ или $\sqrt{6}$.

Если есть одноцветный треугольник ABC со стороной $\sqrt{2}$, то нарисуем картинку (см. рис. 13, взятый из книги [L]), где $c = \sqrt{2}$, $a = \sqrt{6}$ и $b = \pi$. Получаем, что F, D, E покрашены в другой цвет. Тогда H, G покрашены в цвет вершин A, B, C. Треугольник HBG равен треугольнику ABH по двум сторонам и углу между ними. Значит, HBG — нужный треугольник.

Если есть одноцветный треугольник ABC со стороной $\sqrt{6}$, то применяем те же рассуждения к аналогичной картинке с $c = \sqrt{6}$, $a = \sqrt{2}$ и $b = \pi$.

4.4.2. Рассмотрим два ромба $A_1B_1A_1'C_1$ и $A_1B_2A_1''C_2$ со стороной 1 и углом в $\pi/3$, причём $\angle B_1A_1B_2 = \pi/6$. Тогда несложно показать, что точки A_1, A_1' и A_1'' покрашены в один цвет, и расстояние между A_1' и A_1'' равно 1.

4.4.3. (1) Для любого n возьмём точки $v_0, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$, попарные расстояния между которыми равны 1, и точки $w_0, \ldots, w_9 \in \mathbb{R}^9$, попарные расстояния между которыми равны 2. При $n > 9^{10}$ найдутся такие i, j, что точки (v_i, w_k) и (v_j, w_k) одноцветны для любого k. С другой стороны, среди точек $(v_i, w_0), \ldots, (w_i, w_9)$ найдутся две точки (v_i, w_k), (v_i, w_l) одного цвета. Точки (v_i, w_k), (v_i, w_l), (v_j, w_k), (v_j, w_l) покрашены в один цвет и образуют прямоугольник со сторонами 1 и 2.

(2) Неверно. Для любого n укажем раскраску пространства $\mathbb{R}^n$ в 4 цвета, для которой нет одноцветного параллелограмма, равного P. Обозначим через a и b векторы непараллельных сторон параллелограмма P. Без ограничения общности $a \cdot b = 1$. Покрасим точку x в цвет $i = 0, 1, 2, 3$, если $[x \cdot x] \equiv i \pmod 4$. Докажем, что не найдётся одноцветного параллелограмма с данными сторонами.

Пусть, напротив x, $x + a$, $x + b$, $x + a + b$ — одноцветный параллелограмм. Имеем:

$$x^2 - (x+a)^2 - (x+b)^2 + (x+a+b)^2 = 2a \cdot b = 2 \quad \text{и}$$

$$-2 < \{x^2\} - \{(x+a)^2\} - \{(x+b)^2\} + \{(x+a+b)^2\} < 2.$$

А из одноцветности параллелограмма вытекает

$$[x^2] - [(x+a)^2] - [(x+b)^2] + [(x+a+b)^2] \equiv 0 \pmod 4.$$

Это противоречит двум предыдущим равенствам.

4.4.4. (1) Первый и третий пункты вытекают из второго.

(2) Обозначим через X множество из $f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1$ точек. Обозначим через E множество точек $p \in X$ таких, что X содержит $(k-1)$-чашку с правым концом в p. Если бы в множестве $X \setminus E$ была $(k-1)$-чашка, то её правый конец можно было бы добавить в множество E. Значит, в множестве $X \setminus E$ нет $(k-1)$-чашек. Поэтому $|X \setminus E| < f(k-1,l)$. Тогда $|E| \geqslant f(k,l-1)$. Следовательно, множество E содержит либо k-чашку, либо $(l-1)$-шапку. В первом случае $X \supset E$ также содержит k-чашку. Во втором случае по определению множества E левая точка p такой шапки — это последняя точка некоторой $(k-1)$-чашки в X. Но если правый конец чашки совпадает с левым концом шапки, то либо чашку, либо шапку можно продолжить. Так получим либо k-чашку, либо l-шапку в X.

(4) По индукции построим множество $X_{k,l}$ размера $\binom{k+l-4}{k-2}$, которое не содержит ни k-чашек, ни l-шапок. Для $k \leqslant 2$ или $l \leqslant 2$ подойдет множество из одной точки. Для $k, l \geqslant 3$ построим множество $X_{k,l}$ из множеств $L = X_{k-1,l}$ и $R = X_{k,l-1}$ следующим образом. Множество L поместим слева от множества R так, чтобы все прямые, которые проходят через две точки множества L, проходили «ниже» R, и наоборот. Нетрудно проверить, что в полученном множестве нет ни k-чашек, ни l-шапок. По правилу Паскаля в построенном множестве нужное число элементов.

4.4.5. (1) Предположим, что существует раскраска чисел от 1 до 9 без одноцветной арифметической прогрессии длины 3. Если 4 и 6 покрашены в цвет 1, то $2, 5, 8$ покрашены в цвет 2 и получается, что есть арифметическая одноцветная прогрессия 2—5—8. Предположим теперь, что 4 покрашено в цвет 1, а 6 в цвет 2. Без ограничения общности, 5 покрашено в цвет 1. Тогда 3 покрашено в цвет 2, 9 в цвет 1, 1 в цвет 2, 2 в цвет 1, 8 в цвет 2, 7 в цвет 1 и мы получаем одноцветную прогрессию 1—4—7.

(2) 1368 и 2457.

(3) Рассмотрим такое n, что при любой раскраске чисел в два цвета найдутся числа i, j, k, удовлетворяющие условиям $i < j < i + k < j + k < < n/2$ и раскрашенные в первый цвет. Тогда числа $2i - j + 2k$, $i + 2k$, $j + 2k$, $2j - i + 2k$ покрашены во второй цвет.

(5) Аналогично предыдущему пункту: вместо прямоугольника и параллелепипеда возьмите r-мерный параллелепипед.

4.5.1. Возьмите $x = R(p, q)$, где p — число вершин в G, а q — число вершин в H.

4.5.2. Рассмотрим $\chi(G) - 1$ непересекающихся подмножеств из $(c(H) - 1)$ элементов каждое. Покрасим рёбра внутри подмножеств в цвет 2, а оставшиеся рёбра — в цвет 1.

4.5.3. (1) Нижняя оценка следует из предыдущей задачи. Верхняя доказывается по индукции по сумме $m + n$. База $m = n = 2$ очевидна. Чтобы доказать шаг, возьмем произвольную раскраску графа $K_{(m-1)(n-1)+1}$. Так как $(m - 1)(n - 1) + 1 > R(T_{m-1}, K_n)$ и T_{m-1} получается из T_m удалением висячего ребра, то можно считать, что в нашем графе есть подграф T_{m-1} первого цвета. Вне подграфа T_{m-1} имеется $(m - 1)(n - 2) + 1 = R(T_m, K_{n-1})$ вершин. Тогда можно считать, что есть подграф K_{n-1} второго цвета. Если все рёбра, соединяющие y с вершинами подграфа K_{n-1}, второго цвета, то есть подграф K_n. А если хотя бы одно из них первого цвета, то добавим новую вершину к T_{m-1} и получим граф T_m.

(2) Нижняя оценка (т. е. пример) строится аналогично решению предыдущей задачи. Делим граф из $m + n - 2$ вершин на доли по $m - 1$, каждую долю красим в первый цвет, а рёбра между долями — во второй.

Верхняя оценка доказывается аналогично решению п. (1).

4.5.4. (1) Делим $5n - 1$ вершин на три доли: $(3n - 1)$-красная клика, $(2n - 1)$-синяя клика и ещё одна вершина. Из $(3n - 1)$-клики все исходящие рёбра — синие, а рёбра из $(2n - 1)$-синей клики в выделенную вершину — красные.

(2) Небольшой перебор.

(3) Доказательство по индукции. База $n=1$. Докажем переход. Берём $n-1$ одноцветных непересекающихся треугольников. В оставшемся графе есть хотя бы один одноцветный треугольник. Если он другого цвета, чем непересекающиеся треугольники, то по предыдущему пункту существует бантик. Тогда без бантика вершин ровно $5n-5$. Значит, найдутся $n-1$ одноцветных непересекающихся треугольников. Они с одним из треугольников бантика дают требуемый подграф.

(4) Перебор с использованием п. (2).

(5) Индукция, аналогичная п. (3).

§ 5. Системы множеств (гиперграфы)

5.1. Пересечения подмножеств

Когда речь идет о множестве подмножеств, употребляют синонимы «система», «семейство» или «набор» подмножеств.

5.1.1. В любом семействе попарно пересекающихся подмножеств n-элементного множества не более 2^{n-1} подмножеств.

5.1.2. Пусть $2 \leqslant t \leqslant n-2$.

(1) Постройте семейство из 2^{n-t} подмножеств n-элементного множества, любые два из которых пересекаются не менее чем по t элементам.

(2) Существует ли такое семейство из $2^{n-t}+1$ подмножеств?

5.1.3. Теорема Эрдёша—Ко—Радо. *Пусть $\mathcal{F}$ — любое семейство k-элементных подмножеств n-элементного множества.*

(1) *Если $2k \leqslant n$ и любые два подмножества из $\mathcal{F}$ пересекаются, то $|\mathcal{F}| \leqslant \binom{n-1}{k-1}$.*

(2) *Если $2k \geqslant n$ и объединение никаких двух подмножеств из $\mathcal{F}$ не есть всё n-элементное множество, то $|\mathcal{F}| \leqslant \binom{n-1}{k}$.*

5.1.4. Любое семейство из двадцати 5-элементных подмножеств 15-элементного множества можно так разбить на 6 подсемейств, чтобы любые два непересекающихся подмножества лежали в разных подсемействах.

Замечание. В таких ситуациях (см. п. 7.1) обычно вместо разбиения на подсемейства говорят о раскраске в разные цвета. Тогда вопреки наглядному представлению о раскраске красятся множества, но при этом не красятся их элементы.

5.1.5. Для $l < k$ обозначим через $M(n,k,l)$ минимальное количество таких k-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$, что любое l-элементное подмножество множества $\mathcal{R}_n$ целиком содержится хотя бы в одном из них. Например, задача 1.6.2 (1) утверждает, что $M(n,k,l) \geqslant \binom{n}{l} \Big/ \binom{k}{l}$.

(1) Найдите $M(n,k,1)$.

(2) Найдите $M(6k+3,3,2)$.

(3)* Найдите $M(n,3,2)$.

(4) Докажите, что $M(n,k,l) \geqslant nM(n-1,k-1,l-1)/k$.

5.2. Системы общих представителей

5.2.1. В группе студентов 20 человек. Из них ровно 5 человек — специалисты по поиску в интернете, 5 — по борьбе со спамом и т. д., всего 18 видов проблем (так что, очевидно, некоторые студенты являются специалистами по нескольким проблемам). Требуется составить из этих студентов сильную команду разработчиков. При этом хочется, чтобы для каждой проблемы в команде нашелся специалист по ней и чтобы размер команды был как можно меньше (для экономии зарплаты).

(1) При любом раскладе получится набрать такую команду из семи человек.

(2) При некотором раскладе не получится набрать такую команду из пяти человек.

Системой общих представителей (сокращённо с.о.п.) для набора $\mathcal{M}$ множеств называется любое такое множество A, что $M \cap A \neq \varnothing$ для любого $M \in \mathcal{M}$.

5.2.2. Для набора $\{\{1,6\},\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,6\}\}$ множеств найдите (1) какую-нибудь с.о.п.; (2) с.о.п. наименьшего размера.

5.2.3. (1) Найдите наименьший размер с.о.п. для набора всех k-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$.

(2) Сколько для него имеется с.о.п. наименьшего размера?

Минимальная с.о.п. — с.о.п. наименьшего размера для данного набора $\mathcal{M}$. Назовем (n,s,k)-*набором* элемент из $\binom{\binom{\mathcal{R}_n}{k}}{s}$, т. е. набор k-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$, в котором s множеств. (Этот термин не общепринят.)

5.2.4. (1) Постройте $\left(2n, 2\binom{n-1}{k-1}, k\right)$-набор, для которого минимальная с.о.п. состоит из двух элементов и единственна.

(2) При данных n, k найдите наибольшее s, для которого найдётся (n,s,k)-набор, имеющий ровно две минимальные с.о.п.

5.2.5. *Жадным алгоритмом* называется следующий. Возьмём любой элемент, лежащий в максимальном количестве множеств данного набора. Добавим его в «пред-с.о.п.» и выкинем множества, которые его содержат. Аналогично возьмём элемент, лежащий в максимальном количестве оставшихся множеств, и т. д.

Постройте пример набора множеств, у которого размер минимальной с.о.п. на k меньше размера любой из с.о.п., которые могут быть получены жадным алгоритмом, если (1) $k=1$; (2) $k=2$; (3) k произвольно.

5.2.6*. (1) Для любого (n,s,k)-набора найдется с.о.п. размера меньше

$$G(n,s,k) := \max\left\{\frac{n}{k}, \frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}\right\} + \frac{n}{k} + 1.$$

(2) Если $n \geqslant 32k$ и $60 \leqslant \frac{sk}{n} < e^k$, то найдется (n,s,k)-набор, размер любой с.о.п. которого больше $\frac{n}{64k}\ln\frac{sk}{n}$.

(3) Если

$$k \leqslant n-l \quad \text{и} \quad G\left(\binom{n}{k}, \binom{n}{l}, \binom{n-l}{k}\right) \leqslant s,$$

то найдется (n,s,k)-набор, размер любой с.о.п. которого больше l.

(4) Для всех достаточно больших n если $k^2l + kl^2 < n^{1,8}$, то $k < n-l$ и $\binom{n}{k}\Big/\binom{n-l}{k} < 2e^{kl/n}$.

(5) Для всех достаточно больших n и k если $101\ln\ln k < \ln\frac{sk}{n} < \sqrt{k} < \sqrt[4]{n}$, то найдется (n,s,k)-набор, размер любой с.о.п. которого больше $0{,}99\frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}$.

(6) Если

$$l \leqslant n-k \quad \text{и} \quad \binom{n}{l}\binom{\binom{n}{k}-\binom{n-l}{k}}{s} < \binom{\binom{n}{k}}{s},$$

то найдется (n,s,k)-набор, размер любой с.о.п. которого больше l.

5.3. Системы различных представителей

5.3.1. (1) **Лемма о паросочетаниях.** *Пусть есть несколько (конечное число) юношей и девушек. Каждый юноша любит некоторое (вполне возможно, нулевое) число девушек. Тогда всех юношей можно женить на любимых ими девушках (так, чтобы брачные пары не пересекались) тогда и только тогда, когда для любого множества юношей число девушек, которых любит хотя бы один из них, не меньше числа этих юношей.*

(2) **Теорема Холла.** *Пусть $S_1, \ldots, S_m$ — конечные множества. В каждом из них можно выбрать по элементу $x_i \in S_i$ так, чтобы все x_i были различны, тогда и только тогда, когда для каждого $k \in \{1, \ldots, m\}$ объединение любых k из этих множеств имеет не менее k элементов.*

5.3.2. Какое минимальное количество рёбер можно удалить из графа $K_{n,n}$, чтобы не осталось совершенных паросочетаний (т. е. подграфов из n непересекающихся отрезков)?

Пусть дан набор $\mathcal{M}$ множеств. В каждом из множеств выбрали по элементу. Если все элементы различны, то такой набор назовем *системой различных представителей* (сокращенно с.р.п.). Или, формально, *системой различных представителей* для набора $\mathcal{M}$ множеств называется упорядоченный набор различных элементов $x(S)\in S$, $S\in\mathcal{M}$, т. е. такое инъективное отображение $x\colon \mathcal{M}\to\bigcup\limits_{S\in\mathcal{M}} S$, что $x(S)\in S$ для любого $S\in\mathcal{M}$.

(Упорядоченность набора важна для подсчёта количества с.р.п. в задаче 5.3.5, а не для выяснения существования с.р.п.)

Например, теорема Холла утверждает, что у системы $S_1,\ldots,S_m$ конечных множеств есть система различных представителей тогда и только тогда, когда $\left|\bigcup\limits_{i\in I} S_i\right|\geqslant |I|$ для любого $I\subset\{1,\ldots,m\}$.

5.3.3. Пусть для системы m-элементных множеств каждый элемент, входящий хотя бы в одно из них, входит ровно в l из них. Тогда при $m\geqslant l$ у этой системы множеств есть с.р.п.

5.3.4. С.р.п. поднабора можно дополнить до с.р.п. всего набора. Вот более подробная формулировка. Из набора $\mathcal{M}$ множеств выбрано несколько подмножеств $S_1,\ldots,S_k$. Допустим, что элементы $x_1,\ldots,x_k$ — это с.р.п. набора множеств $S_1,\ldots,S_k\in\mathcal{M}$. Если у всего набора $\mathcal{M}$ есть с.р.п., то существует его с.р.п., содержащая элементы $x_1,\ldots,x_k$.

5.3.5. Обозначим через $F(S_1,\ldots,S_m)$ количество с.р.п. у системы $\{S_1,\ldots,S_m\}$.

(1) Для любого ли k существует система $S_1,\ldots,S_m$ такая, что $F(S_1,\ldots,S_m)=k$?

(2) Найдите все возможные значения $F(S_1,S_2)$ при условии $|S_1|=|S_2|=5$.

(3)* Найдите все возможные значения $F(S_1,S_2,S_3)$ при условии $|S_1|=|S_2|=|S_3|=5$.

5.3.6. Пусть даны два разбиения множества S на m подмножеств: $S=\bigsqcup\limits_{i=1}^m A_i=\bigsqcup\limits_{i=1}^m B_i$, $m\leqslant|S|$. Пусть выполнено одно из следующих условий.

(1) Для любого подмножества $\{i_1,\ldots,i_k\}\subset\{1,\ldots,m\}$ множество $A_{i_1}\cup\ldots\cup A_{i_k}$ содержит не более k из множеств $B_1,\ldots,B_m$.

(2) $|A_1|=\ldots=|A_m|=|B_1|=\ldots=|B_m|$.

Тогда можно перенумеровать множества $A_1,\ldots,A_m$ так, чтобы в новой нумерации $A_i\cap B_i\neq\varnothing$ для любого $i=1,\ldots,m$.

5.3.7*. Пусть даны два разбиения множества S на m подмножеств: $S=\bigsqcup\limits_{i=1}^m A_i=\bigsqcup\limits_{i=1}^m B_i$, $m\leqslant|S|$. Пусть для любых подмножеств $I,J\subset\{1,\ldots,m\}$

выполнено неравенство

$$\left|\left(\bigsqcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigsqcup_{j\in J} B_j\right)\right| \geqslant |I|+|J|-m.$$

Тогда можно перенумеровать множества $A_1, \ldots, A_m$ так, чтобы после нумерации нашлись попарно различные элементы $x_i \in A_i \cap B_i$, $i=1,\ldots,m$.

Такой набор $x_1, \ldots, x_m$ называются *общей системой различных представителей* наборов множеств $A_1, \ldots, A_m$ и $B_1, \ldots, B_m$.

5.3.8. (1) Найдите необходимое и достаточное условие на двудольный граф, при котором вершины можно занумеровать $A_1, \ldots, A_n$ (в первой доле) и $B_1, C_1, \ldots, B_n, C_n$ (во второй доле) так, что есть рёбра $A_1B_1, A_1C_1, \ldots, A_nB_n, A_nC_n$.

(2) Пусть есть m юношей и несколько девушек, каждый юноша любит не менее t девушек, причём всех юношей можно женить на любимых ими девушках (так, чтобы брачные пары не пересекались), т. е. есть паросочетание. Тогда имеется не менее

$$\begin{cases} t!, & t \leqslant m, \\ t!/(t-m)!, & t > m, \end{cases}$$

способов переженить юношей на любимых ими девушках.

5.4. Перманент

Перманент квадратной матрицы $A=(a_{ij})$ размера $n\times n$ определяется формулой

$$\operatorname{Per}(A) := \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)},$$

где Σ_n есть множество всех перестановок n-элементного множества.

5.4.1. Найдите перманент матрицы

(1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

(2) 4×4, у которой $k=0,1,2,3,4$ диагональных элементов — нули, а все остальные (в том числе недиагональные) элементы — единицы;

(3) $n\times n$, у которой на диагонали нули, а вне диагонали — единицы.

Подматрицей данной матрицы называется матрица, полученная из данной вычеркиванием некоторого количества строк и столбцов. *Перманент* прямоугольной матрицы A определяется как сумма перманентов всех квадратных подматриц максимального размера. Или, формулой, при $m<n$

$$\mathrm{Per}(A):=\sum_{\sigma}\prod_{i=1}^{m}a_{i,\sigma(i)},$$

где сумма берётся по всем m-элементным размещениям без повторений чисел от 1 до n. При $m>n$ положим $\mathrm{Per}(A):=\mathrm{Per}(A^T)$.

5.4.2. Найдите перманент матрицы $m\times n$, состоящей из одних единиц.

5.4.3. (1) Перманент не меняется при перестановке строк.

(2) *Формула разложения по строке*. Если $m\leqslant n$, то для любого i

$$\mathrm{Per}(A)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,\mathrm{Per}(A_{ij}),$$

где A_{ij} — матрица, получаемая из исходной вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

5.4.4. (1) Перманент матрицы $n\times n$ из нулей и единиц равен нулю тогда и только тогда, когда есть нулевая подматрица $s\times t$, где $s+t=n+1$.

(2) Для любых $m\leqslant n$ перманент прямоугольной матрицы $m\times n$ из нулей и единиц равен количеству с.р.п. (п. 5.3) для системы из m подмножеств множества $\{1,\ldots,n\}$, определяемых строками этой матрицы.

5.5. Размерность Вапника—Червоненкиса

5.5.1. (1) Математики Вася и Чарли играют. Сначала Чарли отмечает на плоскости k точек. Затем Вася красит некоторые из этих точек. Если теперь Чарли сможет провести прямую, отделяющую покрашенные точки от непокрашенных, то он выиграл, иначе — проиграл. При каком наибольшем k Чарли может выиграть независимо от действий Васи?

(2) То же, но точки отмечаются в пространстве, и Чарли проводит плоскость.

Пусть $\mathscr{R}\subset 2^X$ — семейство подмножеств произвольного множества X. *Размерностью Вапника—Червоненкиса* $\mathrm{VC}(X,\mathscr{R})$ (или VC-размерностью) пары $(X,\mathscr{R})$ называется максимальное n такое, что существует

n-элементное подмножество $A \subset X$, для которого любое подмножество в A является пересечением A и некоторого подмножества из $\mathcal{R}$. Такое подмножество A называется *дробящимся* системой $\mathcal{R}$. Если такого n не существует, то полагают $\mathrm{VC}(X, \mathcal{R}) := \infty$.

Естественные примеры, в том числе пример с бесконечностью, приведены в следующих задачах.

5.5.2. (1) Найдите VC-размерность семейства всех (двумерных замкнутых) прямоугольников на плоскости со сторонами, параллельными осям координат.

(2) **Теорема.** VC-*размерность семейства всех полупространств в* $\mathbb{R}^n$ *равна* $n+1$.

(3) **Теорема Радона.** *Любые* $n+2$ *точки в* $\mathbb{R}^n$ *можно разбить на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.*

5.5.3. Найдите VC-размерность следующих семейств множеств:

(1) $\{\{1, \ldots, k\} : k \in \mathbb{N}\}$;

(2) $\{\{k, k+1, k+2, \ldots\} : k \in \mathbb{N}\}$;

(3) $\{\{k, 2k, 3k, \ldots\} : k \in \mathbb{N}\}$;

(4) $\{\{k_1k_2,\ 2k_1k_2,\ 3k_1k_2,\ \ldots\} : k_1, k_2 \in \mathbb{N}\}$;

(5) $\{\{k, k^2, k^3, \ldots\} : k \in \mathbb{N}\}$.

5.5.4. Найдите VC-размерность следующих конечных семейств:

(1) $\{1,2,3\}$, $\{4,5,6\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,5\}$, $\{2,3,6\}$, $\{3,4,5\}$, $\{3,4,6\}$, $\{2,4,5,6\}$.

(2) $\{1,2,3\}$, $\{3,4,5\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,5\}$, $\{2,4,5\}$, $\{2,3,5\}$, $\{2,6,7\}$, $\{3,4,6,7\}$.

(3) $\{1,2,3\}$, $\{4,5,6\}$, $\{7,8,9\}$, $\{1,4,7\}$, $\{2,5,8\}$, $\{3,6,9\}$, $\{1,6,9\}$.

(4) Можно ли добавить ещё одно множество к системам из предыдущих пунктов так, чтобы VC-размерность увеличилась на 1?

5.5.5. (1) Возможно ли равенство $VC(\mathbb{R}^2, \mathcal{R}) = \infty$ для некоторого набора $\mathcal{R} \subset 2^{\mathbb{R}^2}$?

(2) То же для некоторого счётного набора $\mathcal{R} \subset 2^{\mathbb{R}^2}$ ограниченных множеств.

5.5.6. В любом семействе VC-размерности d, в каждом множестве которого не более r элементов, найдутся такие подмножества X и Y, что

(1) $|X \cap Y| \leqslant r - d$;

(2) $|X \cap Y| \geqslant d - 1$.

5.5.7. Если $\mathcal{R} \subset 2^{\mathcal{R}_n}$ и $|\mathcal{R}| = n$, то для любого $k = 1, 2, \ldots, n$ найдётся такое множество A, что $|A| = k - 1$ и $|\{R \cap A : R \in \mathcal{R}\}| \geqslant k$.

5.5.8. Если $\mathscr{R} \subset 2^{\mathscr{R}_n}$ — семейство VC-размерности d, то существует *наследственное* (т. е. содержащее с каждым множеством все его подмножества) семейство $\mathscr{R}' \subset 2^{\mathscr{R}_n}$ VC-размерности d, для которого

(1) $|\mathscr{R}'| \leqslant |\mathscr{R}|$;

(2) $|\mathscr{R}'| \geqslant |\mathscr{R}|$.

5.5.9. Если $\mathscr{R} \subset 2^{\mathscr{R}_n}$, то

$$|\mathscr{R}| \leqslant \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{VC(\mathscr{R}_n, \mathscr{R})}.$$

5.6. Подсолнухи

Подсолнухом с k лепестками и ядром Y называют такой набор множеств $\{F_1, \ldots, F_k\}$, что $|F_i \cap F_j| = Y$ при $i \neq j$ и все множества $F_i \setminus Y$ непусты. Например,

• попарно непересекающиеся множества образуют подсолнух с пустым ядром;

• одномерные векторные подпространства (п. 7.1) образуют подсолнух с одноэлементным ядром;

• множества X_p всех рациональных дробей с фиксированным простым знаменателем p образуют подсолнух с бесконечным ядром.

Большая часть задач этого раздела взята из книги [J].

5.6.1. Найдите размер минимальной с.о.п. (п. 5.2) подсолнуха.

5.6.2. (1) Если $|\mathscr{F}| > s!\,(k-1)^s$, то в $\mathscr{F}$ найдётся подсолнух с k лепестками.

(2) Найдутся $(k-1)^s$ подмножеств конечного множества, в каждом из которых s элементов и среди которых нельзя выбрать подсолнух с k лепестками.

Кроме подсолнухов, можно рассматривать также другие конфигурации множеств, задаваемые условиями на пересечения. Мы предлагаем читателю самостоятельно приводить интересные примеры таких конфигураций.

Пусть, например, попарные пересечения не обязательно равны, однако содержат одинаковое количество элементов. *Слабой Δ-системой* называется такой набор множеств $S_1, \ldots, S_k$, что $|S_i \cap S_j|$ одинаковы при всех $i \neq j$. Очевидно, что подсолнух является слабой Δ-системой. Обратное неверно. Однако есть следующая теорема.

Теорема Деза. *Если $\mathscr{F}$ — слабая Δ-система из s-элементных множеств и $|\mathscr{F}| \geqslant s^2 - s + 2$, то $\mathscr{F}$ — подсолнух.*

Доказательство теоремы достаточно сложное.

Покажем, что приведённая оценка точна.

5.6.3. Для любого простого числа p существует слабая Δ-система из $(p+1)$-элементных множеств, не являющаяся подсолнухом и состоящая из p^2+p+1 множеств.

5.6.4. *Общая часть* множеств $S_1, \ldots, S_k$ — это объединение $\bigcup\limits_{i\neq j}(S_i \cap S_j)$ всех их попарных пересечений.

(1) Если $\mathscr{F}$ — конечный набор s-элементных множеств и $|\mathscr{F}| > (k-1)^s$, то найдутся k множеств из $\mathscr{F}$, в общей части которых менее s элементов.

(2) Оценка $|\mathscr{F}| > (k-1)^s$ в п. (1) точна.

5.6.5. *Цветком с k лепестками и ядром Y* называется такой набор $\mathscr{F}$ множеств, что каждое из них содержит Y и не существует с.о.п. из $k-1$ элемента для набора $\{S \setminus Y : S \in \mathscr{F}\}$.

(1) Если $\mathscr{F}$ — конечный набор s-элементных множеств и $|\mathscr{F}| > (k-1)^s$, то $\mathscr{F}$ содержит цветок с k лепестками (и некоторым ядром).

(2) Оценка $|\mathscr{F}| > (k-1)^s$ из п. (1) точна.

5.7. Подсказки

5.1.3. (1) Среди $n-k+1$ подмножеств

$$\{1,2,\ldots,k\},\ \{2,3,\ldots,k+1\},\ldots,\{n-k+1,n-k+2,\ldots,n\}$$

не более k лежат в $\mathscr{F}$.

5.2.2. (1) Возьмите объединение.

5.2.4. (1) $\mathscr{M}$ состоит из всех k-элементных подмножеств в $\mathscr{R}_n$, содержащих 1, и всех k-элементных подмножеств в $\mathscr{R}_{2n} \setminus \mathscr{R}_n$, содержащих $n+1$.

5.2.6. (1) Используйте жадный алгоритм.

(4) Используйте неравенство $(1-x)^{-1} \leqslant e^{x+x^2}$ для малых x.

(5) Используйте п. (3, 4).

(6) Подсчет двумя способами (= вероятностный метод), § 1.6.

5.3.1. (2) Примените лемму о паросочетаниях. Нарисуем двудольный граф: вершины долей — это элементы и множества, ребро (x, S) проведено тогда и только тогда, когда $x \in S$.

Несложно доказать утверждение и по индукции. Рассмотрите отдельно случай, когда найдётся такое подмножество $I \subset \{1, \ldots, m\}$, что $\left|\bigcup\limits_{i\in I} S_i\right| = |I|$.

Можно доказывать утверждение и в эквивалентной форме 5.4.4 (1), см. задачу 5.4.4 (2).

5.3.3. Примените теорему Холла 5.3.1 (2).

5.3.4. Достаточно доказать утверждение для $|\mathscr{S}| = k+1$. Для этого надо проверить, что условие невозможности дополнения с.р.п. противоречит условию теоремы Холла для $\mathscr{S}$.

5.3.5. (1) Ответ: да. (2) $F(S_1, S_2) = 25 - |S_1 \cap S_2|$. (3) $F(S_1, S_2, S_3) = 5^3 - 5(|S_1 \cap S_2| + |S_2 \cap S_3| + |S_1 \cap S_3|) + 2|S_1 \cap S_2 \cap S_3|$.

5.4.1. Можно применить задачу 5.4.3.

5.4.4. Примените определение перманента.

5.5.2. (1) Ответ: 4. (2) Примените теорему Радона, см. п. (3).

5.5.3. Ответы: (1) 1; (2) 1; (3) ∞; (4) ∞; (5) ∞.

5.5.4. (1), (2), (3) Ответы: 2.

(4) Можно только в п. (3).

5.5.5. В обоих пунктах ответ — да.

5.5.7. Можно использовать индукцию по k.

5.5.9. Для любых $i \in \mathscr{R}_n$ и $M \subset \mathscr{R}_n$ обозначим через $\mathscr{R}_i(M)$ множество $M \setminus \{i\}$, если $M \setminus \{i\} \notin \mathscr{R}$, и M иначе, т. е. мы уменьшаем множество, если уменьшенного нет в нашей системе. Обозначим $\mathscr{R}_i := \{\mathscr{R}_i(M) \colon M \in \mathscr{R}\}$. Тогда $|\mathscr{R}_i| = |\mathscr{R}|$.

Утверждение. *Если множество дробится системой $\mathscr{R}_i$, то оно дробится и системой $\mathscr{R}$.*

5.6.5. (1) Решение аналогично решению задачи 5.6.2 (1).

(2) Используйте решение задачи 5.6.2 (2).

5.8. Указания

5.1.1. Для каждого подмножества либо оно, либо его дополнение не принадлежат рассматриваемому семейству.

5.1.2. (1) Для каждого $A \subset \mathscr{R}_{n-t}$ положим $X_A := A \cup \{n-t+1, \ldots, n-1, n\}$.

(2) Ответ: да.

Первое решение. Возьмём тот же набор, что и в п. (1), выкинем множество $\{n-t+1, \ldots, n-1, n\}$ и добавим два $(n-1)$-элементных подмножества $\mathscr{R}_{n-1}$ и $\{1, \ldots, n-2, n\}$. Несложно показать, что полученное семейство множеств удовлетворяет всем требованиям.

Второе решение. Обозначим $A := \mathscr{R}_{t+2}$. Возьмём семейство всех подмножеств, которые содержат $A \setminus \{i\}$ для некоторого $i \in A$. Тогда пересечение любых двух из них содержит множество $A \setminus \{i, j\}$, в котором t элементов. Количество подмножеств во взятом семействе не меньше $2^{n-t-2}(t+3) > 2^{n-t} + 1$, если $2 \leqslant t \leqslant n-2$.

Третье решение. Годится семейство всех $(n - [(n+t)/2])$-элементных подмножеств n-элементного множества.

Их число $\dbinom{n}{n - [(n+t)/2]} > 2^{n-t}$.

5.1.3. (2) Рассмотрите дополнения подмножеств из п. (1).

5.1.5. (1) Ответ: $\sim n/k$. (2) Ответ: $(2k+1)(3k+1)$.

Верхняя оценка получается из задачи 1.6.2 (1).

Для построения примера обозначим $l := 2k+1$. Выделим следующие трёхэлементные подмножества в $\mathbb{Z}_{3l}$:

$$\{x, x+l, x+2l\} \quad \text{и} \quad \left\{yl+z, yl+t, (y+1)l+\frac{z+t}{2}\right\}.$$

Здесь $x \in \mathbb{Z}_{3l}$, $y \in \mathbb{Z}_3$, $z, t \in \mathbb{Z}_l$, $z \neq t$, деление на 2 рассматриваем по модулю l. Далее надо взять элементы $a, b \in \mathbb{Z}_{3l}$ и показать, что найдётся такой элемент $c \in \mathbb{Z}_{3l}$, что тройка $\{a, b, c\}$ — одна из выделенных. Это делается рассмотрением случаев $a \equiv b \pmod{l}$ и $a \not\equiv b \pmod{l}$.

(3) Ответ зависит от остатка от деления n на 6.

(4) Рассмотрим данное семейство из $M(n,k,l)$ множеств. Посчитаем двумя способами количество пар (A, x), где $x \in \mathcal{R}_n$ и $A \ni x$ — множество из данного семейства. С одной стороны, оно равно $kM(n,k,l)$. С другой стороны, для каждого $x \in \mathcal{R}_n$ количество множеств $A \setminus x$ не меньше $M(n-1, k-1, l-1)$, поэтому количество множеств A не меньше $nM(n-1, k-1, l-1)$.

5.2.3. (1) Ответ: $n-k+1$.

(2) Ответ: $\dbinom{n}{n-k+1}$.

5.2.4. (1) Ответ: набор всех k-элементных подмножеств в $\mathcal{R}_n$, содержащих 1, и всех k-элементных подмножеств в $\mathcal{R}_{2n} \setminus \mathcal{R}_n$, содержащих $n+1$.

(2) Ответ: $\dbinom{n}{k} - 2$.

5.2.5. (*Это решение написано А. Головановым.*)

(1) Докажем, что следующий набор множеств подходит:

$$\{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,3,6\}, \{1,3,7\}, \{2\}, \{3\}.$$

Действительно, $\{2,3\}$ — с.о.п. А жадный алгоритм на первом шаге выберет элемент 1 и оставит в наборе множества $\{2\}, \{3\}$, поэтому в итоге наберёт множество $\{1,2,3\}$.

(2) Докажем, что подходит следующий набор множеств:

$$\{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,3,6\}, \{1,3,7\}, \{2\}, \{3\},$$
$$\{11,12,14\}, \{11,12,15\}, \{11,13,16\}, \{11,13,17\}, \{12\}, \{13\}.$$

Каждая из двух частей нашей системы имеет минимальную с.о.п. размера два. Эти две части не пересекаются. Поэтому минимальная с.о.п. всей системы содержит 4 элемента.

На первых двух шагах жадный алгоритм выберет элементы 1 и 11 (возможно, в другом порядке). После этого останутся множества $\{2\}, \{3\}, \{12\}, \{13\}$, объединение которых есть с.о.п.

(3) Аналогично пункту (2) подходит следующий набор, состоящий из $6k$ множеств:

$\{1,2,4\},\ \{1,2,5\},\ \{1,3,6\},\ \{1,3,7\},\ \{2\},\ \{3\},$
$\{11,12,14\},\ \{11,12,15\},\ \{11,13,16\},\ \{11,13,17\},\ \{12\},\ \{13\},$
$\{21,22,24\},\ \{21,22,25\},\ \{21,23,26\},\ \{21,23,27\},\ \{22\},\ \{23\},\ \ldots$

5.2.6. (1), (2), (3), (6) См. решения в [R6, §§ 3, 4].

В решении пунктов (4), (5) пропускаются слова «для всех достаточно больших n».

(4) Имеем $k < \sqrt{k^2 l + k l^2} < n^{0,9} < n/2$. Аналогично $l < n^{0,9}$. Далее,

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-l}{k}} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{k!}{(n-l)(n-l-1)\ldots(n-l-k+1)} =$$
$$= \frac{n}{n-l} \cdot \frac{n-1}{n-l-1} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n-l-k+1} =$$
$$= \left(\left(1-\frac{l}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{l}{n-1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{l}{n-k+1}\right)\right)^{-1} <$$
$$< \left(1-\frac{l}{n-k}\right)^{-k} \overset{(*)}{<} \exp\left(\frac{kl}{n-k} + k\left(\frac{l}{n-k}\right)^2\right) \overset{(**)}{<}$$
$$\overset{(**)}{<} \exp\left(\frac{kl}{n} + 2\frac{k^2 l}{n^2} + 4\frac{kl^2}{n^2}\right) < 2\exp\frac{kl}{n}, \quad \text{где}$$

• неравенство $(*)$ справедливо, поскольку $\dfrac{l}{n-k} < 2n^{-0,1}$ и $\dfrac{1}{1-x} < e^{x+x^2}$ для малых $x>0$;

• неравенство $(**)$ справедливо, поскольку $k < n/2$, значит,
$$\frac{1}{n-k} < \frac{n+2k}{n^2} = \frac{1}{n} + 2\frac{k}{n^2} < \frac{2}{n}.$$

(5) Обозначим
$$l := \left[0{,}99\frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}\right] \leqslant 0{,}99\frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n} < \frac{n}{k}\ln\frac{sk}{n}.$$
Имеем $k + l < \sqrt{n} + \frac{n}{k}\sqrt{k} < n$ для $k>1$. Поэтому
$$\frac{\binom{n}{l}\binom{n-l}{k}}{\binom{n}{k}} = \binom{n-k}{l} > n-k > n-\sqrt{n} > e^2.$$
С другой стороны,
$$\frac{\binom{n}{l}\binom{n-l}{k}}{\binom{n}{k}} < \binom{n}{l} < \frac{n^l}{l!} \overset{(*)}{<} \left(\frac{en}{l}\right)^l \overset{(**)}{<} k^l \quad \text{для } k \geqslant 9.$$

Здесь неравенства $(*)$ и $(**)$ выполнены по утверждению 6.1.6 (3) и ввиду $\frac{l}{n} > \frac{1}{2k}\ln\frac{sk}{n} > \frac{101\ln\ln k}{2k} > \frac{101}{4k} > \frac{e}{k}$ соответственно.

Поэтому

$$G\left(\binom{n}{k}, \binom{n}{l}, \binom{n-l}{k}\right) < 2\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-l}{k}}\ln\frac{\binom{n}{l}\binom{n-l}{k}}{\binom{n}{k}} \overset{(*)}{<} 2\exp\left(\frac{kl}{n}\right)\cdot l\ln k <$$

$$< 2\left(\frac{sk}{n}\right)^{0{,}99}\frac{n}{k}\ln\left(\frac{sk}{n}\right)\ln k \overset{(**)}{<} 2s\left(\frac{sk}{n}\right)^{-1/100}\ln\left(\frac{sk}{n}\right)\left(\frac{sk}{n}\right)^{1/101} \overset{(***)}{<} s$$

для всех достаточно больших k. Здесь

• неравенство $(*)$ выполнено ввиду вышеприведенной оценки и пункта (4), который применим, поскольку $k^2l < nk\sqrt{k} < n^{7/4}$ и $kl^2 < \frac{n^2}{k}\sqrt{k} < n^{7/4}$;

• неравенство $(**)$ выполнено ввиду $101\ln\ln k < \ln\frac{sk}{n}$;

• неравенство $(***)$ выполнено для всех достаточно больших k ввиду $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-1/(100\cdot 101)}\ln x = 0$ и $\frac{sk}{n} > \ln k$.

Значит, по пункту (3) найдется (n,s,k)-набор, размер любой с.о.п. которого больше l. Ср. [R6, § 4.6].

5.3.1. (2) Индукция по m. База очевидна. Предположим, что для всех систем с меньшим количеством элементов утверждение верно.

Пусть найдётся такое множество $I \subsetneq \mathcal{R}_m$, что $\left|\bigcup\limits_{i\in I} S_i\right| = |I|$. Применим предположение индукции для $S_I := \{S_i : i \in I\}$. Далее, пересечения множеств из $S_{\mathcal{R}_m\setminus I}$ со множеством $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i\right) \setminus \left(\bigcup\limits_{i\in I} S_i\right)$ «непокрытых» элементов образуют систему, для которой выполнено условие леммы Холла. Значит, можно применить предположение индукции.

Если же такое множество I не найдётся, возьмём произвольный элемент x произвольного множества S_k. Дополнения оставшихся множеств до этого элемента образуют систему, для которой выполнено условие леммы Холла. Значит, можно применить предположение индукции.

5.3.2. Если удалить все рёбра, инцидентные фиксированной вершине, то паросочетаний не будет. Если же удалено $n-1$ ребро, то выполнено условие леммы о паросочетаниях. Ответ: n.

5.3.4. Рассмотрим произвольную вершину $y \neq x_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ графа из доказательства теоремы Холла. Посмотрим на множество вершин, до которых мы можем дойти. Если мы можем дойти до множества S_{k+1}, то несложно понять, как расширить с.р.п. Иначе не выполнено условие теоремы Холла.

5.3.5. (1) Можно взять множество из одного элемента и непересекающееся с ним множество из k элементов.

(2) Ответ: $20 \leqslant F(S_1, S_2) \leqslant 25$.

(3) Ответ: $60, 68, 71, 73, 76, 79, 81, 82, 84, 86, 87, 89, 90, 92, 94, 95, 97, 99, 100, 102, 105, 107, 110, 112, 115, 120, 125$.

5.3.6. (1) Для каждого $j = 1, 2, \ldots, m$ обозначим $S_j := \{k\colon A_k \cap B_j \neq \neq \varnothing\}$. Требуется построить с.р.п. для этого семейства. Примените теорему Холла 5.3.1 (2).

5.4.4. В сумме, определяющей перманент, произведение равно 0, если хотя бы один сомножитель равен 0, и равно 1, если каждый сомножитель равен 1. Последнее выполнено, когда выбранные элементы — это с.р.п.

5.5.2. (1) Пусть подмножество A плоскости $\mathbb{R}^2$ имеет более 4 точек. Возьмём одну из его крайних правых точек, одну из его крайних левых точек, одну из его крайних верхних точек и одну из его крайних нижних точек. Получится подмножество множества A из не более чем четырёх элементов. Любой прямоугольник, содержащий это подмножество, содержит всё A.

(3) Отождествим данные точки $X_1, X_2, \ldots, X_{n+2}$ с их радиус-векторами. Сначала докажем, что найдутся такие $c_1, \ldots, c_{n+2} \in \mathbb{R}$, не все из которых равны нулю, что

$$c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_{n+2}X_{n+2} = 0 \quad \text{и} \quad c_1 + \ldots + c_{n+2} = 0.$$

В самом деле, рассмотрим набор векторов $X_1 - X_{n+2}, X_2 - X_{n+2}, \ldots \ldots, X_{n+1} - X_{n+2}$. Поскольку это $n+1$ вектор в $\mathbb{R}^n$, то для этих векторов найдётся нетривиальная линейная зависимость с коэффициентами $c_1, \ldots, c_{n+1}$. Тогда набор $c_1, \ldots, c_{n+1}, (-c_1 - \ldots - c_{n+1})$ — требуемый.

Теперь перенумеруем точки так, чтобы сначала шли положительные значения c_i. Перенесем слагаемые с отрицательными коэффициентами в правую часть. Получим: $c_1X_1 + \ldots + c_kX_k = -c_kX_k - \ldots - c_{n+2}X_{n+2}$. Domножим это равенство на такой коэффициент, чтобы сумма коэффициентов справа и слева стала равна 1. После этого равенство будет утверждать, что выпуклые оболочки множеств $\{X_1, \ldots, X_k\}$ и $\{X_{k+1}, \ldots, X_{n+2}\}$ пересекаются.

5.5.3. (3) Любое подмножество трёхэлементного множества $\{2 \cdot 3, 3 \cdot 5, 5 \cdot 2\}$ выделяется пересечением. Аналогично для любого n строится n-элементное множество с таким свойством.

(4) Любое подмножество трёхэлементного множества $\{2^{2\cdot 3}, 2^{3\cdot 5}, 2^{5\cdot 2}\}$ выделяется пересечением. Аналогично для любого n строится n-элементное множество с таким свойством.

(5) Это семейство содержит семейство из п. (3).

5.5.4. Для п. (1), (2), (3), посчитав количество множеств, можно вывести, что размерность d не больше 3. В каждом из этих пунктов по определению $d \geqslant 2$. Далее перебором доказываем, что $d = 2$.

5.5.5. (1) Возьмём набор всех подмножеств плоскости.

(2) Возьмём набор всех конечных подмножеств любого счётного ограниченного множества.

5.5.6. Возьмём подмножество A из d элементов, дробящееся данным семейством.

(1) Возьмём множества X, Y из семейства, для которых $X \cap A = \varnothing$ и $Y \cap A = A$.

(2) При $d > 0$ возьмём $a \in A$ и множества X, Y из семейства, для которых $X \cap A = A \setminus \{a\}$ и $Y \cap A = A$.

5.5.7. База $k = 1$ очевидна. Допустим, для множества A из $k-1$ элемента это верно.

Если $|\{R \cap A\colon R \in \mathscr{R}\}| > k$, то возьмём $A_+ := A \cup \{i\}$ для некоторого $i \notin A$. Тогда при $R_1 \cap A \neq R_2 \cap A$ имеем $R_1 \cap A_+ \neq R_2 \cap A_+$. Иначе найдутся два множества $R_1, R_2 \in \mathscr{R}$ такие, что $R_1 \cap A = R_2 \cap A$. Тогда найдётся такой элемент x, которым различаются множества R_1 и R_2. Значит, $x \notin A$. Возьмём $A_+ := A \cup \{x\}$. Тогда $|\{R \cap A_+ : R \in \mathscr{R}\}| > k = |A_+|$.

Можно также использовать индукцию по k вниз (такое решение предложено Д. Контуровым). Тогда база $k = n$ неочевидна (она называется *теоремой Бонди*).

5.5.8. (1) Семейство $\mathscr{R}' := 2^{\mathscr{R}_d}$ наследственно, и $|\mathscr{R}'| = 2^d \leqslant |\mathscr{R}|$.

(2) Возьмём $\mathscr{R}' := \binom{n}{0} \cup \binom{n}{1} \cup \binom{n}{2} \cup \ldots \cup \binom{n}{d}$. Утверждение вытекает из задачи 5.5.9.

5.5.9. *Доказательство утверждения из подсказки.* Действительно, если это множество A не содержит элемента i, то утверждение очевидно. Иначе для любого $B \subset A$, содержащего i, найдётся $R \in \mathscr{R}$ такое, что $B = A \cap \mathscr{R}_i(R)$. Так как $i \in B$, то $i \in \mathscr{R}_i(R)$. Значит, $\mathscr{R}_i(R) = R$, т. е. $R \setminus \{i\} \in \mathscr{R}$. Так как $R \cap A = B$, то $(R \setminus \{i\}) \cap A = B \setminus \{i\}$.

Итак, A дробится системой $\mathscr{R}$. $\square$

Решение задачи с использованием утверждения. Будем заменять $\mathscr{R}$ на $\mathscr{R}_i$ для разных i, пока это возможно. Если это невозможно для $\mathscr{R}_{i_1 \ldots i_k}$, то $\mathscr{R}_{i_1 \ldots i_k}$ — наследственное семейство. Обозначим $d := \mathrm{VC}(\{1, \ldots, n\}, \mathscr{R})$. Если $\mathscr{R}_{i_1 \ldots i_k}$ содержит хотя бы одно $(d+1)$-элементное множество, то по утверждению это множество дробится в $\mathscr{R}$. Противоречие. Значит,

$$|\mathscr{R}| = |\mathscr{R}_{i_1 \ldots i_k}| \leqslant \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{d}.$$

5.6.2. (1) Индукция по s. Пусть существует $s(k-1)$-элементное подмножество, пересекающееся с любым подмножеством из $\mathscr{F}$. Тогда хотя бы один его элемент x содержится более чем в $(s-1)!\,(k-1)^{s-1}$ подмножествах из $\mathscr{F}$. Поэтому можно применить предположение индукции к $\mathscr{F}_x := \{A \setminus \{x\} : A \in \mathscr{F},\ A \ni x\}$.

Если же такого подмножества не существует, то найдётся k попарно непересекающихся подмножеств из $\mathscr{F}$. Они образуют подсолнух.

(2) Рассмотрим s попарно непересекающихся $(k-1)$-элементных множеств $A_1, \ldots, A_s$ и систему $\{B\colon |B| = s \text{ и } |B \cap A_i| = 1 \text{ для любого } i\}$ всех s-элементных множеств, пересекающихся с каждым из A_i ровно по одному элементу.

5.6.3. Для $p=2$ достаточно рассмотреть правильный треугольник, вписанную в него окружность и три высоты. (Какие семь точек будут элементами нашего множества?) В общем случае примером является множество прямых (т. е. подмножеств, заданных уравнениями $ax+by+cz=0$) на проективной плоскости над $\mathbb{Z}_p$, т. е. на множестве
$$\frac{\mathbb{Z}_p^3 \setminus \{(0,0,0)\}}{(x,y,z)\sim(lx,ly,lz),\ l\in\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}}.$$

5.6.4. (1) Докажем эквивалентное утверждение: если общая часть каждого поднабора из k множеств из $\mathscr{F}$ имеет мощность не меньше s, то $|\mathscr{F}| \leqslant (k-1)^s$.

Двойная индукция по k, s. База: $k=2$ или $s=1$. Пусть k фиксировано, ведём индукцию по s.

Рассмотрим множество $S_0 \in \mathscr{F}$. Для $X \subset S_0$ обозначим через $\mathscr{F}_X$ семейство всех множеств, пересекающихся с S_0 в точности по X. Тогда $\mathscr{F}$ есть непересекающееся объединение $\mathscr{F}_X$ по всем $X \subset S_0$ и $\{S_0\}$. Для каждого $X \subset S$ по предположению индукции $|\mathscr{F}_X| \leqslant (k-2)^{s-|X|}$. Поэтому
$$|\mathscr{F}| \leqslant 1 + \sum_{X\subset S_0} (k-2)^{s-|X|} \leqslant \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} (k-2)^{s-i} = (k-1)^s.$$

(2) Берём набор из $(k-1)^s$ множеств, построенный в решении задачи 5.6.2 (2). В каждом из них s элементов. Общая часть любых k множеств имеет мощность не меньше s, так как в каждом из множеств есть элемент, лежащий минимум в двух множествах.

5.6.5. (1) Индукция по s. Для $s=1$ семейство $\mathscr{F}$ состоит из как минимум k различных одноэлементных множеств. Поэтому база $s=1$ очевидна. Пусть для $s-1$ утверждение выполнено, докажем его для s. Если $\mathscr{F}$ не имеет с.о.п. размера меньше k, то само $\mathscr{F}$ является цветком с пустым ядром и k лепестками. Иначе существует с.о.п размера $k-1$. Тогда по крайней мере $|\mathscr{F}|/(k-1)$ множеств из $\mathscr{F}$ содержат некоторый элемент x.

Применим предположение индукции к $\mathscr{F}_x := \{S \setminus \{x\} : S \in \mathscr{F}, S \ni x\}$. Получим, что $\mathscr{F}_x$ содержит цветок с k лепестками и некоторым ядром Y. Тогда изначальное семейство содержит цветок с таким же количеством лепестков и ядром $Y \cup \{x\}$.

(2) Берём набор из $(k-1)^s$ множеств, построенный в решении задачи 5.6.2 (2). Для него элементы множества A_1 образуют с.о.п. Значит, размер минимальной с.о.п. не больше $k-1$.

§ 6. Аналитические и вероятностные методы

6.1. Асимптотики

Если не оговорено противное, то o, O (рукописные обозначения: $\overline{o}$, $\underline{O}$), асимптотики и пределы рассматриваются при $n \to \infty$.

Запись $f(n) \ll g(n)$ для неотрицательных функций f, g означает, что $f(n) = o(g(n))$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 0$. Запись $f(n) \gtrsim g(n)$ для неотрицательных функций f, g означает, что $f(n) > (1 + o(1))g(n)$. Найти асимптотику для функции $a(n)$ означает найти «явную» функцию $f(n)$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a(n)}{f(n)} = 1$.

6.1.1. Найдите асимптотику для

(1), (2), (3) сумм из задачи 1.1.6;

(4) количества A_n подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, не содержащих двух подряд идущих чисел;

(5)* То же, что в п. (4), для *трёх* подряд идущих чисел.

В ответе можно использовать функцию $x_P(a, b)$, которая по числам a, b и многочлену P, имеющему единственный корень на отрезке $[a, b]$, выдает этот корень.

6.1.2. Найдите асимптотику наибольшего количества рёбер в графе с n вершинами, не содержащем k-клики. Здесь $k = k_n = o(n)$.

6.1.3. Докажите следующие соотношения, предполагая в асимптотиках, что $n \to \infty$, а k фиксировано. (Число $\mathrm{ex}_H(n)$ определено в задаче 2.7.6.)

(1) $\mathrm{ex}_{P_k}(n) \gtrsim \dfrac{k-2}{2} \cdot n$.

(2) $\mathrm{ex}_{C_{2k+1}}(n) \gtrsim \dfrac{n^2}{4}$.

(3) $\mathrm{ex}_{K_{1,k}}(n) \sim \dfrac{k-1}{2} \cdot n$.

Замечание. Знаменитая теорема Эрдёша—Стоуна—Шимоновица утверждает, что для любого фиксированного H такого, что $\chi(H) > 2$, при $n \to \infty$ выполнено $\mathrm{ex}_H(n) \sim \dfrac{n^2}{2}\dfrac{\chi(H)-2}{\chi(H)-1}$. (Для двудольных H известно лишь, что $\mathrm{ex}_H(n) = o(n^2)$.) То есть если мы запрещаем графу иметь некоторый фиксированный подграф H, то доля рёбер, которые при этом можно провести, среди всевозможных рёбер определяется хроматическим числом графа H. Удивительно, что хроматическое число возникает в этой задаче! Доказательство теоремы можно прочесть по ссылке [w1]. (Этой теоремой нельзя пользоваться при решении задачи 6.1.3 (2).)

6.1.4. (1) $n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)^n = (2+o(1))^n$. По определению это означает, что существует функция $\psi(n)=o(1)$, для которой

$$n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)^n = (2+\psi(n))^n;$$

или, что то же самое,

$$\sqrt[n]{n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)^n} - 2 = o(1).$$

(2) $3^{\sqrt{n}}\left(2+\frac{1}{n}\right)^n = (2+o(1))^n$.

6.1.5. (1) Найдите асимптотику для $\sqrt[n]{\binom{n}{[n/2]}}$ (ср. с задачами 1.4.3 (2) и 6.1.10 (2)).

(2) $\frac{2^n}{n+1} < \binom{n}{[n/2]} < 2^n$.

(3) Найдите асимптотику для $\sqrt[m]{\binom{3m}{m}}$.

(4) $\frac{3^{3m}}{3m+1} < 2^{2m}\binom{3m}{m} < 3^{3m}$.

(5) $\binom{n}{[an]} = (a^{-a}(1-a)^{a-1}+o(1))^n$, где $0<a<1$.

(6) $\frac{n!}{[a_1n]!\ldots[a_sn]!} = (e^{-a_1\ln a_1-\ldots-a_s\ln a_s}+o(1))^n$, где $a_1+\ldots+a_s=1$, $0<a_k<1$.

6.1.6. (1) Найдите асимптотику для $\ln(n!)$.

(2) Найдите асимптотику для $\sqrt[n]{n!}$.

(3) $n^ne^{-n+1}\leqslant n!\leqslant n^{n+1}e^{-n+1}$;

(4) $n!\leqslant n^ne^{-n+1}\sqrt{n}$.

(5)* *Формула Стирлинга.* $n!\sim n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}}=1$.

6.1.7. (1) $\binom{n}{k} < \frac{n^k}{k!}$.

(2) $\ln\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{n^k} = -\frac{k(k+1)}{2n}\left(1+O\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ для $k=k_n<\frac{n}{2}$.

Это означает, что существует функция $\psi(n)=O\left(\frac{k}{n}\right)$, для которой

$$\ln\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{n^k} = -\frac{k(k+1)}{2n}(1+\psi(n));$$

или, что то же самое,

$$-1-\frac{2n}{k(k+1)}\ln\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{n^k} = O\left(\frac{k}{n}\right).$$

(3) $\binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!} e^{-\frac{k(k-1)}{2n} + O(k^3/n^2)}$ для $k = k_n < \frac{n}{2}$.

(Сформулируйте сами, что здесь означает $e^{-\frac{k(k-1)}{2n} + O(k^3/n^2)}$.)

(4) $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$ для $k = k_n = o(\sqrt{n})$.

Неформально, это означает, что для $k \ll \sqrt{n}$ вероятность выпадения ровно k орлов при n подбрасываниях монеты приближенно равна $\frac{n^k}{k!} 2^{-n}$. В неформальном замечании к этому и следующему пунктам достаточно интуитивного понимания того, что такое вероятность.

(5) $\binom{2n}{n-k} \Big/ \binom{2n}{n} = e^{-\frac{k^2}{n}(1+o(1))}$ для $k = k_n = o(n)$.

(Сформулируйте сами, что здесь означает $e^{-\frac{k^2}{n}(1+o(1))}$.)

Неформально, это означает, что для $k \ll n$ вероятность P_k выпадения ровно $n - k$ орлов при $2n$ подбрасываниях монеты приближенно равна $P_0 e^{-k^2/n}$ (*нормальное распределение*).

6.1.8. (1) Верно ли, что записи $e^{o(n)}$ и $o(e^n)$ «равнозначны»?

То есть верно ли, что для любой функции $f : \mathbb{Z} \to (0, +\infty)$ условия $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln f(n)}{n} = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) e^{-n} = 0$ равносильны?

(2) Подберите функции $f, g : \mathbb{Z} \to (0, +\infty)$ такие, что $f(n) \sim g(n)$, но $e^{f(n)} \neq O(e^{g(n)})$.

(3) Могут ли функции $f, g : \mathbb{Z} \to (0, +\infty)$ одновременно удовлетворять соотношениям $f(n) = o(g(n))$ и $g(n) = o(f(n))$?

(4) Могут ли функции $f, g : \mathbb{Z} \to (0, +\infty)$ одновременно удовлетворять соотношениям $f(n) = O(g(n))$ и $g(n) = O(f(n))$?

(5) Следует ли из двух соотношений из п. (4), что $f(n) \sim g(n)$?

6.1.9. (1) Какая функция растёт быстрее: $x^{(x^x)}$ или $(x!)^{(2^x)}$?

То есть найдите $\lim\limits_{x\to\infty} x^{(x^x)} (x!)^{(-2^x)}$.

(2) Существует ли функция $\psi(n) = o(1)$, для которой $(2 + \psi(n))^n \times$ $\times\, 2^{-n} e^{-\sqrt{n}} \to \infty$?

(Как в любой математической задаче, нужно обосновать ответ: привести пример такой функции или доказать её существование или доказать, что такой функции не существует.)

В задачах 6.1.10 (2, 3, 4, 5, 6, 7), в отличие от остальных, можно пользоваться без доказательства *формулой Стирлинга* 6.1.6 (5).

6.1.10. Найдите асимптотику для

(1) $\ln\binom{n^2}{n}$; (2) $\binom{n}{[n/2]}$; (3) $\binom{n^2}{n}$; (4)* $\binom{n}{[n^\alpha]}$, $\alpha \in (0,1)$;

(5) $(2n-1)!! := (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1$; (6) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$; (7)* $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^4$.

6.1.11. Найдите асимптотику функции $s=s(n)$, заданной как

(1) $s^s=n$;

(2) $s^{s^3}=n$;

(3) $s(n):=\max\{k:\ k!\leqslant n\}$;

(4) $s(n):=\min\left\{m\in\mathbb{N}:\ \binom{n}{m}<2^{\binom{m}{2}}\right\}$ (ср. с задачей 4.1.5);

(5) $s(n):=\min\left\{m\in\mathbb{N}:\ \dfrac{2^m}{m}>n\right\}$ (функция $2^m/m$ возникает как сложность реализации функций алгебры логики);

(6) $s(n):=\min\left\{m\in\mathbb{N}:\ \binom{m}{[m/2]}>n\right\}$ (ср. с задачей 1.4.3 (2)).

6.1.12*. В ответах можно использовать константы, заданные в виде суммы рядов. Найдите асимптотику для

(1) количества линейных подпространств в $\mathbb{Z}_2^n$ (см. задачу 1.4.7 и определение перед ней);

(2) количества унициклических графов с n вершинами (см. задачу 2.2.5 (2) и определение перед ней).

6.2. Независимость и доказательства существования

Введение

Цель этого раздела — продемонстрировать метод доказательства некоторых интересных комбинаторных результатов (пунктов (2) задач 6.2.1—6.2.4 и 6.2.16—6.2.26), заключающийся в применении локальной леммы Ловаса 6.2.15 (2).

Об открытии леммы Ловаса и её роли в математике. Локальная лемма Ловаса была доказана в 1973 году выдающимся венгерским математиком Ласло Ловасом. Впрочем, тогда Ловасу было всего 25 лет, и, хотя яркие результаты у него уже к тому времени были, всё-таки на тот момент его воспринимали не как классика, но как восходящую звезду. Он уже был трёхкратным победителем международных математических олимпиад (1964, 1965 и 1966 годов). Классиком Ловас станет позже, и весьма серьёзную роль в этом сыграет доказанная им локальная лемма. Разумеется, не только она: будет и топологический метод в комбинаторике, и мощные результаты в теории алгоритмов, и значительный вклад в науку о графовых пределах, и многое другое. Тем не менее, локальная лемма — это замечательный инструмент вероятностной комбинаторики, благодаря которому были получены и продолжают получаться многочисленные яркие результаты в области дискретной математики и теории алгоритмов.

Работа, в которой Ловас формулирует и доказывает свою локальную лемму, написана в соавторстве с Полом Эрдёшем — ещё одним великим специалистом по комбинаторике, основателем большой научной школы, автором множества задач и идей. Среди прочего, Эрдёш был одним из самых активных пропагандистов вероятностного метода в комбинаторике. Поэтому, несмотря на то, что локальную лемму доказал именно Ловас, роль Эрдёша во всём этом не стоит недооценивать. В статье Эрдёша и Ловаса [EL] речь шла о раскрасках *гиперграфов* (т. е. наборов подмножеств конечного множества). Как раз ради доказательства существования некоторой раскраски локальная лемма и придумывалась (т. е. ради обобщения задач 6.2.1, 6.2.16 и 6.2.17; не бойтесь, эти задачи формулируются и решаются без слова «гиперграф»). Однако очень быстро стало понятно, насколько это мощный и плодотворный инструмент. Например, почти сразу же с его помощью Дж. Спенсер улучшил нижнюю оценку *числа Рамсея* (см. определение в п. 4.1 и задачу 6.2.21), которая не поддавалась улучшению в течение сорока лет. Сейчас диапазон применения леммы становится всё шире. Здесь теория графов и гиперграфов, здесь экстремальные задачи комбинаторики, теория алгоритмов и даже комбинаторная геометрия и теория диофантовых приближений.

За прошедшие десятилетия появились разнообразные усовершенствования локальной леммы, многие из которых уже лишь отдаленно напоминают первоначальный вариант. И это ещё одно свидетельство исключительной плодотворности идеи Ловаса.

Как устроено изложение в этом разделе. Основные идеи демонстрируются по одной и на «олимпиадных» примерах, т. е. на простейших частных случаях, свободных от технических деталей. Мы показываем, *как можно придумать* лемму Ловаса. Путь к её доказательству и применениям намечен в виде задач (всех задач этого и следующего разделов, кроме задач 6.2.6 и 6.2.7, которые просто поясняют понятие независимости). Обучение путем решения задач не только характерно для серьезного изучения математики, но и продолжает древнюю культурную традицию[1)].

Обычно лемму Ловаса излагают на вероятностном языке. Однако, по нашему мнению, приводимое комбинаторное изложение более доступно и полезно для начинающего. Действительно, излагать вероятностные идеи (например, независимости) и развивать вероятностную

[1)] Например, послушники дзенских монастырей обучаются, размышляя над загадками, данными им наставниками. Впрочем, эти загадки являются скорее парадоксами, а не задачами. См. подробнее [Su].

интуицию, но при этом сохранять строгость изложения, разумнее, не вводя понятия вероятностного пространства, а на комбинаторном языке, ср. п. 1.6[2)]. Это как раз подготовит начинающего к введению этого довольно абстрактного понятия, ср. с [ZSS, § 27 «Начинать с языка или содержания?»]. Кроме того, вероятностной интуиции начинающего противоречит получение вероятностными методами абсолютно (а не с некоторой вероятностью) верного результата[3)]. (Впрочем, для человека, уже владеющего понятием вероятностного пространства, изложение на вероятностном языке не хуже комбинаторного.)

Приведём интересные факты, которые можно доказать при помощи леммы Ловаса и вряд ли можно доказать без нее! Видимо, из задач 6.2.1—6.2.4 вы сможете решить сейчас только пункты (1). К пунктам (2) разумно вернуться после изучения следующего подраздела. Более того, задача 6.2.2 естественнее по формулировке, но сложнее двух следующих.

6.2.1. (1) По каждому из 100 видов работ в фирме имеется ровно 8 специалистов. Сотрудник может быть специалистом по нескольким видам работ; распределение специалистов по видам работ известно тому, кто назначает выходные. Каждому сотруднику нужно дать выходной в субботу или в воскресенье. Докажите, что это можно сделать так, чтобы и в субботу, и в воскресенье для каждого вида работ на работе был специалист по нему. (Это задача 1.6.7.)

(2) По каждому из нескольких видов работ в фирме имеется ровно 8 специалистов. (Теперь видов работ не обязательно 100.) Каждый вид работ имеет общих специалистов не более чем с 30 другими видами. Каждому сотруднику нужно дать выходной в субботу или в воскресенье. Докажите, что это можно сделать так, чтобы и в субботу, и в воскресенье для каждого вида работ на работе был специалист по нему.

Замечание. Для каждого вида работ x обозначим через A_x множество распределений выходных, при которых для вида работ x и в субботу, и в воскресенье на работе есть специалист по x. Нужно доказать, что $\bigcap\limits_x A_x \neq \varnothing$. В п. (1) это делается путём подсчёта количества элемен-

---

[2)] Отличие элементарной теории вероятностей от перечислительной комбинаторики скорее в том, что речь идёт о *долях* вместо чисел, и интерес часто представляют *оценки*, а не равенства.

[3)] Объяснять, как с помощью вероятностных методов можно получить абсолютно верный результат, лучше на более простых примерах. См., например, задачи 6.2.5, 6.2.10, 6.2.11 и 6.3.3 (1, 2). Мы хотели бы сделать книгу доступной даже для тех, кто не разбирал таких примеров.

тов. В п. (2) этого уже не хватает; нужна идея из следующего раздела, в котором мы покажем, как понятие *независимости* (там и определённое) можно применять для оценки количества элементов в пересечении множеств.

Описанную идею можно сформулировать так. Нужное условие мы представляем в виде пересечения некоторого числа условий. При этом ясно, что для каждого из них есть конструкция, ему удовлетворяющая. Иногда отсюда можно вывести, что есть конструкция, удовлетворяющая всем этим условиям одновременно! Эта идея часто применяется в математике. (Для читателя, знакомого с соответствующими понятиями, напомним, что в анализе так доказывается существование решения дифференциального уравнения, в топологии — вложимость n-мерного компакта в $\mathbb{R}^{2n+1}$, ср. [S3, § 2].) Число условий может быть бесконечно, поэтому идея пересечения ‘равносильна’ идее итерационного процесса. А теперь мы покажем, как применять эту идею в комбинаторике. Несмотря на конечность числа условий ее применение весьма нетривиально.

6.2.2. (1) По кругу стоит 200 студентов из 10 групп, в каждой из которых 20 студентов. Докажите, что можно в каждой группе выбрать по старосте так, чтобы никакие два старосты не стояли рядом.

(2) То же для 1 600 студентов из 100 групп, в каждой из которых 16 студентов.

6.2.3. (1) Докажите, что можно раскрасить первые 8 натуральных чисел в 2 цвета так, чтобы не было одноцветной арифметической прогрессии длины 3.

(2) Докажите, что можно раскрасить первые 15 миллионов натуральных чисел в 2 цвета так, чтобы не было одноцветной арифметической прогрессии длины 32.

6.2.4. (1) Докажите, что для любого $M \in \mathbb{R}$ можно так раскрасить все вещественные числа в 2 цвета, чтобы для любого $x \in \mathbb{R}$ числа x и $x+M$ были разных цветов.

(2) Докажите, что для любых различных 25 чисел $M_1, \dots, M_{25} \in \mathbb{R}$ можно раскрасить все вещественные числа в 3 цвета так, чтобы для любого $x \in \mathbb{R}$ среди чисел $x+M_1, \dots, x+M_{25}$ были числа каждого из трёх цветов.

Решения пунктов (2) вышеприведённых задач основаны на идее, аналогичной решению задачи 6.2.1 (2).

Для удобства читателя этот раздел структурирован более тонко, чем остальные. В частности, некоторые указания и решения к задачам 6.2.5—6.2.15 приведены прямо в нём (а не в конце параграфа).

Независимость и лемма Ловаса

Приведём задачи, которые подведут нас к лемме Ловаса 6.2.15 (2) (почему она интересна, написано в предыдущем разделе).

6.2.5. Каждый житель города либо здоров, либо болен, а также либо богат, либо беден. Богатство и здоровье *независимы*, т. е. доля богатых здоровых среди богатых равна доле здоровых среди всех жителей. Известно, что есть богатый горожанин и есть здоровый горожанин. Обязательно ли найдётся богатый здоровый горожанин?

Подмножества A и B конечного множества M называются *независимыми*, если

$$|A \cap B| \cdot |M| = |A| \cdot |B|.$$

При $B \neq \varnothing$ это равносильно тому, что доля множества $A \cap B$ в B равна доле множества A в M.

6.2.6. Зависимы ли следующие подмножества? (Мы называем *зависимыми* подмножества, не являющиеся независимыми.)

(1) В множестве всех клеток шахматной доски подмножество клеток в первых трёх её строках с подмножеством клеток в последних четырёх её столбцах.

(2) Подмножества $\{1,2\} \subset \{1,2,3,4\}$ и $\{1,3\} \subset \{1,2,3,4\}$.

(3) Подмножества $\{1,2\} \subset \{1,2,3,4,5,6\}$ и $\{1,3\} \subset \{1,2,3,4,5,6\}$.

6.2.7. Зависимы ли следующие подмножества множества целых чисел от 1 до 105?

(1) Подмножество чисел, делящихся на 5, и подмножество чисел, делящихся на 7.

(2) Подмножество чисел, делящихся на 15, и подмножество чисел, делящихся на 21.

(3) Подмножество чисел, делящихся на 15, и подмножество чисел, делящихся на 5.

(4) Подмножество чисел, делящихся на 10, и подмножество чисел, делящихся на 7.

6.2.8. (Ср. с замечанием после задачи 6.2.1 (2).) Зависимы ли следующие подмножества множества всех раскрасок чисел $1, 2, \ldots, 400$ в два цвета?

(1) Подмножество раскрасок, для которых $\{1, 2, \ldots, 8\}$ одноцветно, и подмножество раскрасок, для которых $\{11, 12, \ldots, 18\}$ одноцветно.

(2) Подмножество раскрасок, для которых $\{1, 2, \ldots, 8\}$ неодноцветно, и подмножество раскрасок, для которых $\{11, 12, \ldots, 18\}$ неодноцветно (ср. с задачей 6.2.1 (2)).

(3) Подмножество раскрасок, для которых $\{1, 2, \ldots, 8\}$ одноцветно, и подмножество раскрасок, для которых $\{6, 7, \ldots, 13\}$ одноцветно.

6.2.9. Подмножества A и B конечного множества независимы тогда и только тогда, когда A и $\overline{B}$ независимы.

6.2.10. (1) Обязательно ли найдётся богатый здоровый умный горожанин, если в городе доля богатых горожан больше $\frac{2}{3}$, доля здоровых больше $\frac{2}{3}$ и доля умных больше $\frac{2}{3}$?

(2) Тот же вопрос, если в городе есть богатый горожанин, есть здоровый горожанин и есть умный горожанин, богатство, здоровье и ум попарно независимы, и доля богатых здоровых умных среди богатых здоровых такая же, как и доля умных среди всех жителей. (Вместе с условием попарной независимости последнее называется *независимостью в совокупности*.)

(3) Тот же вопрос, если в городе богатых горожан больше половины, здоровых больше половины, умных больше половины, богатство и ум независимы, здоровье и ум независимы.

Задача 6.2.10 показывает, что чем сильнее условие, характеризующее независимость нескольких множеств, тем меньшей доли каждого множества достаточно, чтобы гарантировать непустоту пересечения. Причем наиболее интересный результат (6.2.10 (3)) получается «посередине» между крайними условиями — полного отсутствия независимости (6.2.10 (1)) и независимости в совокупности (6.2.10 (2)). Так часто бывает: наиболее полезные соображения находятся между «крайними» точками зрения.

6.2.11. (1) Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — подмножества 720-элементного множества, в каждом из которых более 480 элементов. Если A_k и A_{k+1} независимы для любого $k = 1, 2, 3$, то $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \neq \varnothing$.

(2) Пусть $n \geqslant 2$ и $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества, доля каждого из которых больше $1 - \frac{1}{n-1}$. Если A_k и A_{k+1} независимы для любого $k = 1, 2, \ldots, n-1$, то $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \neq \varnothing$.

Подробнее о независимости см. [KZP].

Для формулировки леммы Ловаса нужно еще более «хитрое» условие независимости на несколько множеств, чем рассмотренные ранее.

Подмножество A конечного множества M называется *независимым от набора подмножеств* $B_1, \ldots, B_k \subset M$, если A независимо с любым подмножеством, являющимся пересечением нескольких (возможно, одного) множеств из $B_1, \ldots, B_k$.

6.2.12. Приведите пример подмножеств A, B_1, B_2 конечного множества,

(1) попарно независимых, но для которых A не является независимым от набора B_1, B_2;

(2) не являющихся попарно независимыми, но для которых A независимо от набора B_1, B_2.

6.2.13. Обозначим через M семейство всех раскрасок множества $\{1,2,\ldots,400\}$ в два цвета. Для подмножества $\alpha\subset\{1,2,\ldots,400\}$ обозначим через $A_\alpha\subset M$ подмножество тех раскрасок, для которых α одноцветно. Тогда $A_{\{1,2,\ldots,8\}}$ не зависит от набора $\{A_\alpha\colon \alpha\subset\{9,10,\ldots,400\}\}$. (Ср. с замечанием после задачи 6.2.1 (2).)

6.2.14. Следующие условия на подмножества $A,B_1,\ldots,B_k$ равносильны:

- A независимо от набора $B_1,\ldots,B_k$;
- $\overline{A}$ независимо от набора $B_1,\ldots,B_k$;
- $\overline{A}$ независимо от набора $\overline{B}_1,\ldots,\overline{B}_k$.

6.2.15. (1) **Локальная лемма Ловаса в симметричной форме**[4]**.** *Пусть $A_1,\ldots,A_n$ — подмножества конечного множества. Если для некоторого d и любого k доля подмножества A_k не меньше $1-\dfrac{1}{4d}$ и существует набор из не менее чем $n-d$ подмножеств A_j, от которого A_k не зависит, то $A_1\cap\ldots\cap A_n\neq\varnothing$.*

(2) При $d>2$ утверждение п. (1) верно, если заменить $1-\dfrac{1}{4d}$ на $1-\dfrac{1}{e(d+1)}$.

(3) Если $a_k=1$ при любом $k\leqslant 0$ и для некоторого $d\geqslant 2$ выполнено $a_{k+1}\geqslant a_k-\dfrac{a_{k-d}}{4d}$ при любом $k\geqslant 0$, то $a_k>0$ при любом k.

Читатель может перед доказательством леммы 6.2.15 (1) применить ее к решению задачи 6.2.1 (2). Доказательство леммы нетривиально обобщает идеи решения задач 6.2.10 и 6.2.11. Из этих задач ясно, что нужно оценивать снизу количество элементов в пересечении s из данных множеств, начиная с $s=1$ и заканчивая $s=n$, при помощи индукции по s. Как часто бывает, наиболее трудная часть — догадаться, какое конкретно утверждение нужно доказывать по индукции (и по каким

---

[4]Вот формулировка на вероятностном языке, которая не используется в дальнейшем. *Пусть дано вероятностное пространство и $A_1,\ldots,A_n$ — события. Пусть для некоторого d и любого k вероятность события A_k не меньше $1-\dfrac{1}{4d}$ и существует набор из не менее чем $n-d$ событий A_j, от которого A_k не зависит. Тогда вероятность события $A_1\cap\ldots\cap A_n$ положительна.*

параметрам вести индукцию). Вот оно:

$$|A_1 \cap \ldots \cap A_{k+t}| \geqslant |A_1 \cap \ldots \cap A_k| \left(1 - \frac{1}{d}\right)^t \quad \text{для любых } k, t \geqslant 0.$$

Указания и решения: первая серия

6.2.1. (1) См. указание к задаче 1.6.7.

(2) Обозначим через A множество распределений выходных. (Имеем $|A| = 2^n$, где n — число специалистов.) Для каждого вида работ x обозначим через $\widehat{x}$ множество специалистов по нему, а через A_x — множество распределений выходных, при которых для вида работ x и в субботу, и в воскресенье на работе есть специалист по x. Тогда $|A_x|/|A| = 2^{-7}$. Подмножество A_x не зависит от набора $\{A_y : \widehat{y} \cap \widehat{x} = \varnothing\}$. Так как каждый вид работ имеет общих специалистов не более чем с 30 другими видами, то вне этого набора не более 30 подмножеств. Применим локальную лемму Ловаса в симметричной форме (задачу 6.2.15 (1)) к дополнениям множеств A_x и $d = 2^5$. Это возможно ввиду утверждения задачи 6.2.9 и неравенства $30 < 2^5$. Получим $\bigcap\limits_x \overline{A_x} \neq \varnothing$.

6.2.2. (1) Выберем произвольного студента произвольной группы и назначим его старостой. Далее действуем так: на каждом шаге выбираем из группы, в которой еще не выбран староста, студента, не являющегося соседом никакого выбранного старосты. Так как выбранных старост не больше 9, то соседей у выбранных старост не больше 18. Следовательно, на каждом шаге мы можем найти нужного студента. В итоге получим 10 человек из разных групп, никакие два из которых не являются соседями.

6.2.4. (1) Покрасим каждое число $x \in \mathbb{R}$ в четность числа $[x/M]$, т. е. в черный цвет, если число $[x/M]$ четно, и в нечерный цвет, если оно нечетно.

6.2.6. Ответы: (1), (2) независимы; (3) зависимы.

6.2.7. Ответы: (1) независимы; (2), (3), (4) зависимы.

6.2.8. Ответы: (1), (2) независимы; (3) зависимы.

6.2.10. (3) Забудьте про глупых людей!

Приведём более сложное решение. Зато оно подводит к лемме Ловаса. Обозначим через У, Б, З множества умных, богатых и здоровых горожан. Будем пропускать знаки пересечения и числа элементов. Тогда $\text{УБ} > \frac{\text{У}}{2} < \text{УЗ}$. Значит,

$$\text{УБЗ} = \text{УБ} - \text{УБ}\overline{\text{З}} > \frac{\text{У}}{2} - \text{У}\overline{\text{З}} > \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}\right)\text{У} = 0.$$

Замечание. Для решения задачи достаточно наличия умного человека. Не обязательно, чтобы умных было большинство.

6.2.11. (1) Будем пропускать знаки пересечения и числа элементов. Не уменьшая общности, $A_2 \geqslant A_3$. Тогда аналогично решению задачи 6.2.10 (3) $A_1A_2A_3 > A_2/3$. Поэтому

$$A_1A_2A_3A_4 = A_1A_2A_3 - A_1A_2A_3\overline{A_4} > \frac{1}{3}A_2 - A_3\overline{A_4} > \frac{1}{3}(A_2 - A_3) \geqslant 0.$$

(2) Решение не было известно авторам заметки [IRS] на момент публикации. Оно предложено А. Ляховцом, А. Матушкиным и О. Орел [Mn].

6.2.15. (3) Достаточно доказать для любых $k, t \geqslant 0$ неравенство

$$I(k+t,t): \quad a_{k+t} \geqslant a_k\left(1-\frac{1}{d}\right)^t.$$

Утверждение задачи получается из $I(t,t)$. Неравенство $I(k+t,t)$ доказывается индукцией по паре[5] (s,t), где $s = k+t$. База $s = k+t = t = 0$ очевидна.

Докажем шаг, т. е. докажем неравенство $I(k+t,t)$, предполагая выполненным неравенство $I(k'+t',t')$ для всех пар $(k'+t',t')$, лексикографически меньших, чем пара $(k+t,t)$. Тогда $k+t>0$. Случай $t=0$ очевиден. Пусть теперь $t>0$.

Случай $t>1$ сводится к последовательному применению неравенств $I(k+t,1)$ и $I(k+t-1,t-1)$:

$$a_{k+t} \geqslant a_{k+t-1}\left(1-\frac{1}{d}\right) \geqslant a_k\left(1-\frac{1}{d}\right)^{1+t-1} = a_k\left(1-\frac{1}{d}\right)^t.$$

Пусть $t=1$. Тогда

$$a_{k+1} \geqslant a_k - \frac{a_{k-d}}{4d} \overset{(2)}{\geqslant} a_k - \frac{a_k}{4d(1-\frac{1}{d})^d} \overset{(3)}{\geqslant} a_k\left(1-\frac{1}{d}\right), \quad \text{где}$$

• второе неравенство получается из $I(k,d)$ и верно по предположению индукции;

• третье неравенство справедливо ввиду $\left(1-\frac{1}{d}\right)^d \geqslant \left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

(1) Можно считать, что $d>1$, иначе утверждение очевидно. По условию существует такое $X \subset \{1,2,\ldots,n\}$, что $|X| \geqslant n-d$ и A_{k+1} не зависит от набора $\{A_j : j \in X\}$. Тогда

$$|\{1,2,\ldots,k\} - X| \leqslant n - |X| \leqslant n-(n-d) = d.$$

[5] Подумайте, почему не проходит индукция по паре (k,t) или по $s+t=k+2t$, а также зачем рассматривать $k>0$, если утверждение задачи вытекает из случая $k=0$.

Поэтому можно считать, что A_{k+1} не зависит от набора $A_1, A_2, \ldots, A_{k-d}$ (при $k \leqslant d$ этот набор пуст). Обозначим $A_{1,2,\ldots,m} := A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m$. Тогда

$$|A_{1,2,\ldots,k+1}| - |A_{1,2,\ldots,k}| = -|\overline{A_{k+1}} \cap A_{1,2,\ldots,k}| \overset{(1)}{\geqslant} -|\overline{A_{k+1}} \cap A_{1,2,\ldots,k-d}| \overset{(2)}{\geqslant} \overset{(2)}{\geqslant} -\frac{|A_{1,2,\ldots,k-d}|}{4d}, \quad \text{где}$$

• при $k \leqslant d$ по определению считаем, что $A_{1,2,\ldots,k-d}$ есть то данное в условии множество, подмножествами которого являются $A_1, \ldots, A_n$;

• первое неравенство справедливо ввиду $A_{1,2,\ldots,k} \subset A_{1,2,\ldots,k-d}$;

• второе — ввиду того, что доля подмножества A_{k+1} не меньше $1 - \dfrac{1}{4d}$, и, при $k > d$, ввиду независимости $\overline{A_{k+1}}$ от набора $A_1, A_2, \ldots, A_{k-d}$ (см. задачу 6.2.9).

Для $X = \{x_1, \ldots, x_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ обозначим $a_X := |A_{x_1,\ldots,x_k}|$. Мы доказали, что для любых k-элементного подмножества $X \subset \{1, \ldots, n\}$ и $x \in \{1, \ldots, n\} \setminus X$ существует такое $(k-d)$-элементное подмножество $Y \subset X$ (пустое при $k \leqslant d$), что $a_{X \cup \{x\}} \geqslant a_X - \dfrac{a_Y}{4d}$. Из этого выводится, что $a_{X \cup Y} \geqslant \left(1 - \dfrac{1}{d}\right)^{|Y|} a_X$ для любых непересекающихся множеств $X, Y \subset$ $\subset \{1, \ldots, n\}$. Делается это при помощи индукции по паре $(|X| + |Y|, |Y|)$ аналогично п. (3).

Указания и решения: вторая серия

6.2.2. (2) Обозначим через A семейство подмножеств из 100 студентов, в которых по одному студенту из каждой группы. Для любого студента x обозначим через A_x семейство подмножеств из A, содержащих и студента x, и следующего за ним по часовой стрелке студента x_+.

Если x и x_+ одногруппники, то A_x пусто. Иначе $|A_x|/|A| = 1/256$. Итак, всегда $|A_x|/|A| \leqslant 1/256$.

Множество A_x не зависит от набора α_x всех тех A_y, для которых ни один из студентов y, y_+ не является одногруппником ни со студентом x, ни со студентом x_+. (Таким образом,

$$\alpha_x := \{A_y : \{y, y_+\} \cap (\widehat{x} \cup \widehat{x_+}) = \varnothing\},$$

где $\widehat{z}$ — группа студента z.) Семейство A_z не входит в набор α_x тогда и только тогда, когда один из студентов z, z_+ является одногруппником с одним из студентов x, x_+. Тех z, которые являются одногруппниками для x, ровно 16. Аналогичное верно с заменой пары (x, z) на любую из пар (x_+, z), (x, z_+), (x_+, z_+). Поэтому количество студентов z, для которых $A_z \notin \alpha_x$, не больше $16 \cdot 4 = 64$.

Применим локальную лемму Ловаса в симметричной форме (задачу 6.2.15 (2)) к дополнениям множеств A_x и $d = 64$. Это возможно ввиду утверждения задачи 6.2.9 и равенства $4 \cdot 64 = 256$. Получим $\bigcap\limits_x \overline{A_x} \neq \varnothing$.

Замечание. Необычно, что при решении этой задачи вместо «увеличения симметрии» (т. е. рассмотрения подмножеств, в которых есть студент, стоящий рядом с x) полезно «уменьшить симметрию» (т. е. рассмотреть подмножества, в которых есть студент, следующий за x по часовой стрелке).

6.2.3. Обозначим $n := 15 \cdot 10^6$. Обозначим через A семейство раскрасок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в 2 цвета. Для любой 32-элементной арифметической прогрессии $\alpha \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ обозначим через A_α семейство раскрасок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в 2 цвета, для которых α одноцветна. Тогда $|A_\alpha|/|A| = 2^{-31}$. Подмножество A_α не зависит от набора $\{A_\beta : \beta \cap \alpha = \varnothing\}$. Каждую 32-элементную арифметическую прогрессию в $\{1, 2, \ldots, n\}$ пересекает не более $32^2[n/31] < 2^{10}2^{19} = 2^{29}$ других таких прогрессий (докажите!). Применим локальную лемму Ловаса в симметричной форме (задачу 6.2.15 (1)) к дополнениям множеств A_α и $d = 2^{29}$. Это возможно ввиду утверждения задачи 6.2.9. Получим $\bigcap\limits_\alpha \overline{A_\alpha} \neq \varnothing$.

6.2.4. (2) Докажем следующее более слабое утверждение.

Для любых 25 различных чисел $M_1, \ldots, M_{25} \in \mathbb{R}$ и конечного множества $X \subset \mathbb{R}$ можно раскрасить все вещественные числа в 3 цвета так, чтобы для любого $x \in X$ среди чисел $x, x + M_1, \ldots, x + M_{25}$ были числа каждого цвета.

При помощи *соображений компактности* можно вывести из этого утверждения его аналог для бесконечного X, в частности для $X = \mathbb{R}$ [AS, разд. 5.2].

Обозначим через A семейство раскрасок множества $X \cup (M_1 + X) \cup \ldots \cup (M_{25} + X)$ в 3 цвета. Для любого $x \in X$ обозначим через $A_x \subset A$ подсемейство раскрасок, для которых среди цветов чисел $x, x + M_1, \ldots, x + M_{25}$ не все цвета присутствуют. Тогда $|A_x|/|A| \leqslant 3(2/3)^{26}$. Каждое множество A_x «зависимо не более чем с $25 \cdot 26 = 650$ другими» (т. е. независимо от набора всех множеств, кроме некоторых 650). Применим локальную лемму Ловаса в симметричной форме (задачу 6.2.15 (2)) к дополнениям множеств A_x и $d = 650$. Это возможно ввиду утверждения задачи 6.2.9 и неравенства $(3/2)^{26} > 2^{13} > 8000 > 7800 = 3 \cdot 2600 = 3 \cdot 4 \cdot 650$. Получим $\bigcap\limits_x \overline{A_x} \neq \varnothing$.

Дополнительные задачи

6.2.16. Даны число

(1) $k \geqslant 10$; (2) $k = 9$

и семейство k-элементных подмножеств конечного множества M. Если каждый элемент множества M содержится ровно в k подмножествах семейства, то существует раскраска множества M в два цвета, для которой каждое подмножество семейства содержит элементы обоих цветов. (То есть хроматическое число любого k-однородного k-регулярного гиперграфа равно двум при $k \geqslant 9$. Ср. с задачей 6.2.1 (2).)

6.2.17. В конечном множестве выбрано несколько подмножеств. В каждом из них не менее 3 элементов. Каждое из них пересекается не более чем с a_i выбранными i-элементными подмножествами. Если $\sum\limits_i a_i 2^{-i} \leqslant 1/8$, то можно покрасить элементы данного множества в два цвета так, чтобы каждое выбранное подмножество содержало элементы обоих цветов.

6.2.18. (1) Для любого разбиения множества вершин цикла длины $16n$ на n множеств по 16 вершин можно выбрать по вершине из каждого множества так, что между выбранными n вершинами нет рёбер.

(2) То же для $11n$ вершин.

(3) В графе степень каждой вершины не превосходит Δ. Все вершины раскрашены в r цветов. Вершин каждого цвета не менее $2e\Delta + 1$. Тогда можно выбрать r вершин разных цветов, никакие две из которых не соединены ребром.

6.2.19. (1) Каждую k-элементную арифметическую прогрессию в $\{1, 2, \ldots, n\}$ пересекает не более $k^2 \left[\dfrac{n}{k-1}\right]$ других таких прогрессий.

(2) Для любого натурального k существует раскраска первых $\left[\dfrac{2^{k-3}(k-1)}{k^2}\right]$ натуральных чисел в 2 цвета, для которой нет одноцветной k-элементной арифметической прогрессии.

(3) Каждую k-элементную арифметическую прогрессию в $\{1, 2, \ldots$ $\ldots, n\}$ пересекает не более nk других таких прогрессий.

(4) Для любого натурального k существует раскраска первых $\left[\dfrac{2^{k-3}}{k}\right]$ натуральных чисел в 2 цвета, для которой нет одноцветной k-элементной арифметической прогрессии.

6.2.20. (1) Если $X \subset \mathbb{R}$ — конечное множество и m, r — натуральные числа, для которых $4rm(m-1)\left(1 - \dfrac{1}{r}\right)^m < 1$, то для любого m-элементного подмножества $M \subset \mathbb{R}$ существует раскраска множества $\mathbb{R}$ в r цветов такая, что для любого $x \in X$ множество $x + M := \{x + a : a \in M\}$ содержит точки каждого из r цветов.

(2) То же для $X = \mathbb{Z}$.

(3) То же для $X = \mathbb{R}$.

6.2.21. (1) Если $\binom{n}{2}\binom{k}{n-2} + 1 < 2^{\binom{n}{2}-1}/e$, то $R(n,n) > k$, где $R(n,n)$ — *число Рамсея* (п. 4.1).

(2) $R(n,n) \gtrsim \sqrt{2}e^{-1}n2^{n/2}$. (Ср. с задачей 4.1.5.)

6.2.22. Имеется несколько цветов. Каждой вершине некоторого графа сопоставлен список из не менее чем $10d$ этих цветов, где $d > 1$. Для любых вершины v и цвета из её списка имеется не более d соседей вершины v, в списке которых есть этот цвет. Тогда можно так раскрасить каждую вершину графа в некоторый цвет из ее списка, чтобы концы любого ребра были разных цветов.

6.2.23. В ориентированном графе в каждую вершину входит не больше Δ рёбер и из каждой вершины выходит не меньше δ рёбер. Тогда для любого натурального $k \leqslant \dfrac{1}{1-(4\delta\Delta)^{-1/\delta}}$ найдётся ориентированный цикл длины, кратной k.

6.2.24. Клетки доски $n \times n$ раскрашены в несколько цветов. Клеток каждого цвета не больше чем $\dfrac{n-1}{16}$. Тогда можно поставить на доску n попарно не бьющих друг друга ладей, чтобы они стояли на клетках разных цветов.

6.2.25. КНФ-*формула* — конъюнкция набора дизъюнкций нескольких из переменных $x_1, \ldots, x_n$ или их отрицаний. Если в каждом «сомножителе» КНФ-формулы ровно k «слагаемых» и у каждого «сомножителя» есть общие переменные не более чем с 2^{k-2} другими, то булева функция, определяемая формулой, не является тождественным нулем.

Замечание. Одной из центральных в информатике является проблема k-выполнимости (k-SAT problem): для данной КНФ-формулы, в каждой дизъюнкции которой ровно k переменных, установить, является ли задаваемая ею булева функция тождественным нулем. При $k = 2$ есть полиномиальный алгоритм её решения. При бóльших k быстрых алгоритмов, отвечающих на этот вопрос, неизвестно. Построение такого алгоритма, либо доказательство его несуществования, эквивалентно решению знаменитой открытой проблемы «P $\neq$ NP».

6.2.26. (1) **Локальная лемма Ловаса.** *Пусть* $A_1, \ldots, A_n$ — *подмножества конечного множества,* $J_1, \ldots, J_n \subset \{1, \ldots, n\}$ *и* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in (0, 1)$.

Пусть также для любого k

• *доля подмножества* A_k *не меньше* $1-(1-\gamma_k)\prod\limits_{j\notin J_k}\gamma_j$;

• *множество* A_k *не зависит от набора* $\{A_j : j\in J_k\}$.

Тогда[6)] *доля пересечения* $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ *не меньше* $\prod\limits_{k=1}^{n}\gamma_k>0$.

(2) Существует такое $c>0$ что $R(3,n)>cn\sqrt{n}$ для любого n.

Замечание. При помощи более сложных вычислений из локальной леммы Ловаса выводится, что $R(3,n)>c_1n^2/\ln^2 n$. Более того, это «лучшее», что можно выжать из локальной леммы Ловаса. Известно также неравенство $R(3,n)>c_2n^2/\ln n$ (теорема Кима). Его доказательство вместо локальной леммы Ловаса использует квазислучайные графы, неравенства плотной концентрации и пр.

6.3. Случайные графы

Начнём с интересных задач, которые можно решить при помощи случайных графов. (Более простые решения без случайных графов неизвестны. Известны такие же или более сложные, и то не для всех задач.)

6.3.1. Если в графе $G=(V,E)$ с n вершинами минимальная степень вершины равна δ, то

(1) для любого $p\in(0,1)$ существует такое множество вершин $A\subset V$, что в объединении A и множества всех вершин, не соединённых ни с какой вершиной из A, имеется не более $np+n(1-p)^{\delta+1}$ вершин;

(2) существует такое множество вершин $D\subset V$, что любая вершина из $V\setminus D$ соединена ребром с некоторой вершиной из D и $|D|\leqslant n\dfrac{1+\ln(\delta+1)}{\delta+1}$.

Для решения следующих задач 6.3.2 и 6.3.3 (3) нужна приведённая ниже теория. К их решению разумно вернуться после задачи 6.3.9.

6.3.2. (1) Если $\binom{k}{m}p^{\binom{m}{2}}+\binom{k}{n}(1-p)^{\binom{n}{2}}<1$ для некоторого $p\in(0,1)$, то $R(m,n)>k$ (здесь $R(m,n)$ — числа Рамсея, см. п. 4.1).

(2)* $R(4,n)\geqslant\Omega\left(\dfrac{n^2}{\ln^2 n}\right)$ (мы пишем $g\geqslant\Omega(f)$, если $f=O(g)$).

[6)] Вот формулировка на вероятностном языке, которая не используется в дальнейшем. *Пусть дано вероятностное пространство,* $A_1,\ldots,A_n$ — *события,* $J_1,\ldots,J_n\subset\{1,\ldots,n\}$ *и* $\gamma_1,\ldots,\gamma_n\in(0,1)$. *Пусть для любого* k *вероятность события* A_k *не меньше* $1-(1-\gamma_k)\prod\limits_{j\notin J_k}\gamma_j$ *и событие* A_k *не зависит от набора* $\{A_j : j\in J_k\}$. *Тогда вероятность события* $A_1\cap\ldots\cap A_n$ *не меньше* $\prod\limits_{j=1}^{m}\gamma_j$.

6.3.3. (1) *Cherchez la femme*. На русско-французской встрече не было представителей других стран. Суммарное количество денег у французов оказалось больше суммарного количества денег у русских, и суммарное количество денег у женщин оказалось больше суммарного количества денег у мужчин. Обязательно ли на встрече была француженка?

(2) Денежные купюры разного достоинства и разных стран упакованы в два чемодана. Средняя стоимость купюры равна 100 рублям. Общее число купюр в левом чемодане больше, чем в правом. Обязательно ли в левом чемодане найдётся купюра стоимостью не более 200 рублей? (Ср. с неравенством Маркова 6.3.9 (1).)

(3) Для любых целых $l, q > 0$ существует граф, не содержащий обходов длины менее l и который невозможно правильно раскрасить в q цветов. (См. определение правильности раскраски в п. 3.1.)

Зафиксируем $p \in (0,1)$ и назовем *вероятностью* графа (в модели, или в вероятностном пространстве, Эрдёша—Реньи) с n вершинами $\{1,2,\dots,n\}$ и r рёбрами число $\mathrm{P}(G) = \mathrm{P}_p(G) := p^r(1-p)^{\frac{n(n-1)}{2}-r}$. *Вероятностью* семейства (или, что то же самое, свойства) графов с вершинами $1,2,\dots,n$ называется сумма вероятностей входящих в него графов.

Случайной величиной называется функция, определённая на множестве графов с вершинами $1,2,\dots,n$.

Например, количество рёбер графа — случайная величина.

Пусть случайная величина Y принимает k различных значений $y_1,\dots,y_k$. Тогда *математическим ожиданием* (мат. ожиданием) случайной величины Y называется её «взвешенное среднее»

$$\mathbb{E}Y := \sum_{s=1}^{k} y_s \mathrm{P}(Y^{-1}(y_s)),$$

где $Y^{-1}(y_s)$ — множество всех графов G, для которых $Y(G) = y_s$. Последнюю вероятность обозначают $\mathrm{P}(Y = y_s)$.

6.3.4. Для данных n и p вероятность наличия k вершин, между которыми нет рёбер, меньше $e^{k\ln n - pk(k-1)/2}$.

6.3.5. Для данных n и p найдите мат. ожидание количества

(1) изолированных вершин;

(2) треугольников;

(3) k-клик;

(4) k-клик, являющихся компонентами связности;

(5) гамильтоновых циклов;

(6) несамопересекающихся циклов длины k;

(7) несамопересекающихся циклов длины k, являющихся компонентами связности с ровно k рёбрами;

(8) деревьев с k вершинами;

(9) древесных компонент данного размера k, т. е. деревьев с k вершинами, являющихся компонентами связности.

6.3.6. Для данного p найдите асимптотику (при постоянном k и $n \to \infty$) функции $\mathbb{E}^{(k)}(Y) := \mathbb{E}(Y(Y-1)\dots(Y-k+1))$ (т. е. *k-го факториального момента*), если Y — число изолированных вершин.

Дисперсией случайной величины X называется число $\mathbb{D}X := \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$.

6.3.7. Для данных n и p найдите дисперсию количества

(1) изолированных вершин; (2) треугольников.

6.3.8. Докажите, что для любых случайных величин X и Y выполнены следующие свойства:

(1) $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$;

(2) $\mathbb{D}(X+Y) = \mathbb{D}X + \mathbb{D}Y$, если X и Y независимы (т. е. для любых x, y выполнено $\mathrm{P}(X=x, Y=y) = \mathrm{P}(X=x)\cdot\mathrm{P}(Y=y)$).

6.3.9. Пусть X — случайная величина (определённая перед задачей 6.3.4) и $a > 0$.

(1) *Неравенство Маркова*. $\mathrm{P}(|X| > a) \leqslant \mathbb{E}|X|/a$. (Ср. с задачей 6.3.3 (1).)

(2) *Неравенство Чебышёва*. $\mathrm{P}(|X - \mathbb{E}X| > a) \leqslant \mathbb{D}X/a^2$.

Событие A_n *происходит асимптотически почти наверное* (*или с асимптотической вероятностью* 1) *относительно последовательности* $f(n)$, если $\mathrm{P}_{f(n)}(A_n) \to 1$. Общепринятое сокращение: при $p(n) = f(n)$ событие A_n происходит а.п.н. (формально, эта фраза не имеет смысла, поскольку означает «если $p(n) = f(n)$, то событие A_n происходит а.п.н.», а без указания последовательности $f(n)$ фраза «событие A_n происходит а.п.н.» не может быть определена как надо).

Напомним, что здесь n — число вершин графа.

6.3.10. При $p(n) = 1/(2n)$

(1) а.п.н. имеется более $n/2$ изолированных вершин;

(2)* для некоторого $C > 0$ а.п.н. каждая компонента связности имеет менее $C\ln n$ вершин (специалисты говорят: менее $O(\ln n)$ вершин);

(3)* а.п.н. каждая компонента связности является деревом или унициклическим графом;

(4)* для некоторого $C > 0$ а.п.н. имеется менее C унициклических компонент.

6.3.11. (1) При $p(n) = o\left(n^{-3/2}\right)$ а.п.н. рёбра попарно не пересекаются.

(2) При $p = p(n) = o\left(n^{-3/2}\right)$ и $pn^2 \to \infty$ существует такая функция $r = r(n) = o(pn^2)$, что а.п.н. число вершин степени 1 больше $pn^2 - r$ и меньше $pn^2 + r$, а степени всех остальных вершин равны нулю.

6.3.12. Теорема о связности случайного графа. *Если* $c > 1$ $(0 < c < 1)$, *то при* $p(n) = c \ln n/n$ *а.п.н. случайный граф связен* (*несвязен*).

6.3.13. (1) Найдите хотя бы одну такую функцию $p^*(n)$, что

• при $p(n)/p^*(n) \to 0$ а.п.н. граф не содержит треугольника,

• при $p(n)/p^*(n) \to +\infty$ а.п.н. граф содержит треугольник.

(2) То же с заменой треугольника на подграф, изоморфный K_4.

Замечание. Такая функция p^* называется *пороговой вероятностью*. Пороговая вероятность существует для любого монотонного семейства графов. Монотонно возрастающим (убывающим) семейством графов называется такое семейство графов, которое вместе с каждым графом содержит любой его надграф (подграф).

6.3.14. Хроматическое число графа а.п.н. не больше

(1) одного при $p(n) = o(1/n^2)$;

(2) двух при $p(n) = o(1/n)$;

(3) трёх при $p(n) = c/n$, где $c < 1$.

6.3.15*. (1) Жадный алгоритм раскраски (см. задачу 3.2.3) для любого положительного ε а.п.н. (при $p(n) = 1/2$) ошибается не более чем в $2 + \varepsilon$ раз.

(2) Для любых $\varepsilon, \delta > 0$ существует такая последовательность G_n графов с n вершинами, что при случайной нумерации вершин графа G_n (т. е. для вероятности каждой нумерации, равной 1/2) вероятность того, что отношение числа цветов в жадной раскраске к $\chi(G_n)$ больше $n^{1-\varepsilon}$, больше δ. (Иными словами, с одной стороны, почти для любого графа в любой нумерация жадная раскраска хороша, но, с другой стороны, есть графы, которые почти как ни нумеруй, а всё дрянь получится!)

Замечание. См. подробнее [R3, R4, R5]. В частности, в [R4] доказаны следующие результаты.

Первая теорема Боллобаша. *Существует последовательность* $f_n = o\left(\frac{n}{2\log_2 n}\right)$, *для которой при* $p(n) = 1/2$ *а.п.н.* $\left|\chi(G) - \frac{n}{2\log_2 n}\right| < f_n$.

(Эта теорема обобщается на практически любые значения p [JLR].)

Вторая теорема Боллобаша. *Для любого* $\alpha > 2/3$ *существуют последовательности* a_n *и* b_n, *для которых при* $p(n) = n^{-\alpha}$ *а.п.н.* $\chi(G) \in \{a_n, b_n\}$.

(В этой теореме для некоторых α последовательности a_n и b_n могут быть выбраны так, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.)

Замечание. Приведём результат [B, с. 100, теорема 5.4]. Пусть $p_n = p(n)$. Для $k \geqslant 2$ обозначим через $T_k = T_{k,p_n}$ число компонент связности в случайном графе, являющихся деревьями с k вершинами.

(1) Если $p_n = o(n^{-k/(k-1)})$, то а.п.н. $T_k = 0$.

(2) Если $\lim\limits_{n\to\infty} p_n n^{k/(k-1)} = c > 0$, то последовательность случайных величин $T_k = T_{k,p_n}$ *сходится при* $n \to \infty$ *к случайной величине, имеющей распределение Пуассона с параметром* $\lambda := c^{k-1}k^{k-2}/k!$, т. е. для любого $s \in \mathbb{Z}$, $s \geqslant 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(T_k = s) = \dfrac{\lambda^s}{s!}e^{-\lambda}$.

(3) Если $n^{k/(k-1)} = o(p_n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(p_n kn - \ln n - (k-1)\ln\ln n) = -\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}(T_k \geqslant L) = 1$ для любого $L > 0$.

(4) Если $\lim\limits_{n\to\infty}(p_n kn - \ln n - (k-1)\ln\ln n) = x \in \mathbb{R}$, то последовательность случайных величин $T_k = T_{k,p_n}$ сходится при $n \to \infty$ к случайной величине, имеющей распределение Пуассона с параметром $\lambda := e^{-x}/(k \cdot k!)$.

(5) Если $\lim\limits_{n\to\infty}(p_n kn - \ln n - (k-1)\ln\ln n) = +\infty$, то а.п.н. $T_k = 0$.

6.4. Подсказки

6.1.1. (4), (5) См. задачу 1.1.3.

6.1.2. См. задачу 2.7.1.

6.2.19. (3) Оцените количество пересекающих прогрессий, содержащих данный элемент $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$, и просуммируйте по всем x.

6.2.20. (1) Обозначим через A семейство раскрасок множества $M + X$ в r цветов. Для любого $x \in X$ обозначим через A_x семейство раскрасок множества $M + X$ в r цветов, для которых множество $x + M$ содержит не все цвета.

(2) Используйте компактность.

6.2.21. (1) Для любого $S \subset \{1, 2, \ldots, r\}$ обозначим через A_S множество графов с r вершинами, для которых индуцированный на S подграф пуст.

6.2.22. Сначала надо уменьшить множество цветов, чтобы каждой вершине было поставлено в соответствие ровно $10d$ цветов. Покрасим множество вершин случайно равновероятно в те цвета, которые им сопоставлены.

6.2.25. Примените локальную лемму Ловаса в симметричной форме (задачу 6.2.15 (1)).

6.3.1. (1) Возьмём произвольное $0 < p < 1$. Неформально говоря, будем считать, что $\mathrm{P}(v \in A) = p$ для каждой вершины v и подмножества

$A \subset V$. Формально, поставим в соответствие каждому подмножеству $A \subset V$ число $p^{|A|}(1-p)^{n-|A|}$. Иными словами, рассмотрим вероятностное пространство всех подмножеств множества V с вероятностью подмножества A, равной $p^{|A|}(1-p)^{n-|A|}$. (Это возможно, поскольку сумма всех 2^n таких вероятностей равна 1.) Тогда для каждой вершины v имеем $\mathrm{P}(v \in A) = \sum\limits_{A \ni v} p^{|A|}(1-p)^{n-|A|} = p$. Определим случайную величину χ_A (*индикатор* события $v \in A$) как

$$\chi_A(v) = 1_{v \in A} := \begin{cases} 1, & v \in A; \\ 0, & v \notin A. \end{cases}$$

6.3.2. (1) Рассмотрите модель $G(k, p)$.

6.3.3. (3) Набор вершин называется *независимым*, если между вершинами в этом наборе нет рёбер. По задаче 3.1.3 достаточно для некоторого достаточно большого n построить граф, в котором длина каждого несамопересекающегося цикла больше l и любые $k = k(n)$ вершин зависимы, для некоторой функции k такой, что

$$\lim_{m \to \infty} \frac{m}{k(m) - 1} = \infty.$$

Такой граф легко получить из графа с n вершинами, в котором любые $k = k(n)$ вершин зависимы и в котором меньше $n/2$ несамопересекающихся циклов длины менее l.

Назовем *французским* граф, в котором меньше $n/2$ несамопересекающихся циклов длины менее l. Назовем *женским* граф, любые $k = k(n)$ вершин в котором зависимы. Придумайте, как раздать графам деньги, чтобы существование француженки вытекало из п. (1). Иными словами, как поставить графам в соответствие веса, при помощи которых можно будет доказать существование графа с обоими свойствами.

6.3.4. Воспользуйтесь тем, что если случайная величина Y принимает только целые значения, то $\mathrm{P}(Y > 0) \leqslant \mathbb{E}Y$.

6.3.6. k-й факториальный момент для числа того-то — это мат. ожидание числа упорядоченных последовательностей длины k из того-то, в которых все элементы различны.

6.3.10. (1) Посчитайте мат. ожидание и дисперсию количества изолированных вершин.

(2) Найдите мат. ожидание количества связных компонент размера более $C \ln n$.

(3) Введите случайные величины аналогично тому, как это было сделано в решении п. (2), и посчитайте их мат. ожидания, используя п. (2).

(4) То же самое.

6.3.11. (1) Рёбра попарно не пересекаются тогда и только тогда, когда степень каждой вершины равна 0 или 1.

(2) Число вершин степени 1 равно половине количества рёбер. Оцените мат. ожидание и дисперсию количества рёбер.

6.3.13. Обозначим через ξ_n количество подграфов, изоморфных данному. Оцените $\mathbb{E}\xi_n$ и $\mathbb{D}\xi_n$. Подберите функцию $p^*(n)$, для которой

$$\mathbb{E}\xi_n \to 0 \text{ при } \frac{p(n)}{p^*(n)} \to 0 \text{ и } \mathbb{D}\xi_n = o(\mathbb{E}^2\xi_n) \text{ при } \frac{p(n)}{p^*(n)} \to +\infty.$$

6.3.14. (2) $\mathrm{P}(\chi(G) \leqslant 2) \geqslant \mathrm{P}(G \text{ дерево}) \to 1$.

6.5. Указания

6.1.1. (4) Ответ: $A_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}$. Указание: для сокращения вычислений введите $A_0 = 1$ и даже $A_{-1} = 1$.

(5) $A_n \sim Ca^n$, где C — некоторое число (его можно и нужно найти), a — единственный вещественный корень уравнения $x^3 = x^2 + x + 1$ (он положителен). В доказательстве нужно показать, что a больше модуля r каждого из двух комплексно сопряжённых корней этого многочлена. Нетрудно проверить, что $a > 1$. По теореме Виета $ar^2 = 1$. Значит, $r < 1 < a$.

Другое доказательство того, что $a > r$. Обозначая комплексные корни через $re^{\pm i\varphi}$, записываем теорему Виета:

$$a \cdot 2r\cos\varphi + r^2 = -1, \quad a + 2r\cos\varphi = 1, \quad ar^2 = 1.$$

Из $a > 0$ и первого уравнения получаем $\cos\varphi < 0$. Из этого и второго уравнения получаем $a > 1$. Из этого и третьего уравнения получаем $r < 1$. Значит, $r < a$.

6.1.5. (1) Следует из п. (2).

(2) Следует из тождества для суммы биномиальных коэффициентов и задачи 1.4.3 (1).

(3) Следует из п. (4). (Такое решение этого и следующего пунктов предложено П. Ахтямовым.)

(4) Следует из бинома Ньютона для $(1+2)^{3m}$ и аналога задачи 1.4.3 (1).

(5) Для рациональных a — аналогично п. (1), (3). Для иррациональных a нужно перейти к пределу в оценках (но не в асимптотиках!). Другое решение получается использованием задачи 6.1.6 (2).

(6) Первое решение аналогично первому решению п. (5).

Второе решение. По задаче 6.1.6 (2) $\sqrt[n]{n!} \sim n/e$. Значит, для любого $0 < a \leqslant 1$ выполнено

$$\sqrt[n]{[an]!} \sim ([an]/e)^{[an]/n} \sim ([an]/e)^a \sim (an/e)^a = a^a (n/e)^a.$$

Деля эквивалентность $\sqrt[n]{[an]!} \sim a^a (n/e)^a$ для $a = 1$ на аналогичные эквивалентности для $a = a_1, \ldots, a_s$, получаем

$$\sqrt[n]{\frac{n!}{[a_1 n]! \ldots [a_s n]!}} \sim a_1^{-a_1} \cdot \ldots \cdot a_s^{-a_s},$$

что и требовалось.

6.1.6. (1) Следует из $(n/M)^{n(1-1/M)} < n! < n^n$ для любого M и достаточно больших n.

(2) Следует из п. (3).

(3) (*Это решение написано А. Жуком*.) Необходимое неравенство равносильно следующему:

$$n \ln n - (n-1) < \ln 1 + \ldots + \ln n < (n+1) \ln n - (n-1).$$

Так как $\ln x$ есть возрастающая функция и $\lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant \lceil x \rceil$, то

$$\ln \lfloor x \rfloor \leqslant \ln x \leqslant \ln \lceil x \rceil, \ x \in [1, +\infty).$$

Интегрируя по $[1, n]$, получаем

$$\int_1^n \ln \lfloor x \rfloor \, dx < \int_1^n \ln x \, dx < \int_1^n \ln \lceil x \rceil \, dx.$$

Вычислим значения этих интегралов:

$$\int_1^n \ln \lfloor x \rfloor \, dx = \int_1^2 \ln \lfloor x \rfloor \, dx + \ldots + \int_{n-1}^n \ln \lfloor x \rfloor \, dx = \ln 1 + \ldots + \ln(n-1),$$

$$\int_1^n \ln x \, dx = x(\ln x - 1)\Big|_1^n = n \ln n - (n-1),$$

$$\int_1^n \ln \lceil x \rceil \, dx = \int_1^2 \ln \lceil x \rceil \, dx + \ldots + \int_{n-1}^n \ln \lceil x \rceil \, dx = \ln 2 + \ldots + \ln n.$$

Получаем искомые неравенства:

$$\ln 1+\ldots+\ln(n-1)+\ln n=\int\limits_1^n \ln\lfloor x\rfloor\,dx+\ln n<$$

$$<\int\limits_1^n \ln x\,dx+\ln n=(n+1)\ln n-(n-1),$$

$$n\ln n-(n-1)=\int\limits_1^n \ln x\,dx<$$

$$<\int\limits_1^n \ln\lceil x\rceil\,dx=\ln 2+\ldots+\ln n=\ln 1+\ln 2+\ldots+\ln n.$$

Немного другое решение. Оценим интеграл методом прямоугольников:

$$\int\limits_1^n \ln x\,dx<\ln 1+\ln 2+\ldots+\ln n<\int\limits_2^{n+1} \ln x\,dx.$$

Так как

$$\int \ln x\,dx=x\ln x-x+C,$$

то имеем

$$n^n e^{-n+1}<n!<\frac{(n+1)^{n+1}e^{-n+1}}{4}.$$

Так как $(n+1)^{n+1}=n^{n+1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\leqslant 4n^{n+1}$, получаем требуемое.

Оценка сверху следует также из п. (4).

Другое решение — индукция по n с использованием неравенств

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

(4) Оценив интеграл методом трапеций, получаем

$$\frac{\ln 1}{2}+\ln 2+\ln 3+\ldots+\ln(n-2)+\ln(n-1)+\frac{\ln n}{2}<\int\limits_1^n \ln x\,dx.$$

Решение по индукции есть, но требует громоздких вычислений.

(5) См., например, [w4] (это доказательство ближе всего к идеям настоящего курса), [w5] (это доказательство продолжает идеи п. (3), (4)), [w6] (это доказательство, видимо, самое короткое).

6.1.7. (2) Так как $-x-x^2<\ln(1-x)<-x$ при $0<x<1/2$ и $k<n/2$, получаем

$$-\frac{1}{n}-\frac{2}{n}-\ldots-\frac{k}{n}-\frac{1^2}{n^2}-\frac{2^2}{n^2}-\ldots-\frac{k^2}{n^2}< \\ <\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)<-\frac{1}{n}-\frac{2}{n}-\ldots-\frac{k}{n}.$$

Поэтому

$$\ln\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{n^k}= \\ =-\frac{k(k+1)}{2n}+O\left(\frac{k(k+1)(2k+1)}{6n^2}\right)=-\frac{k(k+1)}{2n}\left(1+O\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

Замечание. Для любого $\alpha<1$ утверждение верно при $k_n<\alpha n$. Если условие $k_n<\alpha n$ заменить на $k_n<n$, то полученное утверждение, по-видимому, неверно.

(3) Следует из п. (2).

(4) Следует из п. (1), (2).

(5) Для $k\geqslant 0$ имеем:

$$\frac{\binom{2n}{n-k}}{\binom{2n}{n}}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}= \\ =\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n^{k-1}}\,\frac{n^k}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}.$$

Используя п. (2) и аналогичную оценку для $\dfrac{n^k}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}$, получаем

$$-\ln\frac{\binom{2n}{n-k}}{\binom{2n}{n}}=\frac{(k-1)k}{2n}\left(1+O\left(\frac{k}{n}\right)\right)+\frac{k(k+1)}{2n}\left(1+O\left(\frac{k}{n}\right)\right)= \\ =\frac{k^2}{n}\left(1+O\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\frac{k^2}{n}(1+o(1)).$$

6.1.8. (1) Нет, не равносильны. Рассмотрите функцию $f(n)=2^n$.

6.1.9. (1) $(x!)^{2^x}\leqslant x^{x2^x}=x^{o(x^x)}$.

(2) Да, существует. Например, $\psi(n)=n^{-1/3}$.

Доказательство:

$$(2+\psi(n))^n2^{-n}e^{-\sqrt{n}}=2^n(1+n^{-1/3}/2)^n2^{-n}e^{-\sqrt{n}}= \\ =(1+n^{-1/3}/2)^{2n^{1/3}\cdot\frac{n^{2/3}}{2}}e^{-n^{1/2}}=e^{\frac{n^{2/3}}{2}(1+o(1))-n^{1/2}}\to\infty.$$

6.1.10. (1) По задаче 6.1.6 (3) $\dfrac{\ln(n!)}{n} = \ln n - 1 + O\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Отсюда

$$\frac{\ln\binom{n^2}{n}}{n} = n(\ln(n^2) - 1) + O(1) - (\ln n - 1) - (n-1)(\ln(n^2-n) - 1) =$$
$$= (2n-1)\ln n - (n-1)\ln(n^2-n) + O(1) =$$
$$= (2n-1)\ln n - (2n-2)\ln n - (n-1)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + O(1) =$$
$$= \ln n + (n-1)O\left(\frac{1}{n}\right) + O(1) \sim \ln n.$$

(2) Ответ: $\dbinom{n}{[n/2]} \sim \dfrac{2^n}{\sqrt{\pi n/2}}$.

(3) Следует из 6.1.7 (3). Или аналогично решению п. (4), для $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

(4) После применения формулы Стирлинга 6.1.6 (5) получаем

$$\binom{n}{n^\alpha} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n^\alpha}}\left(\frac{n}{n-n^\alpha}\right)^{n-n^\alpha} = \frac{n^{-\alpha/2}}{\sqrt{2\pi}}(1-n^{\alpha-1})^{n^\alpha - n}.$$

Для вычисления асимптотики второго сомножителя нужно найти асимптотическое поведение его логарифма с точностью до $o(1)$. Имеем

$$(n^\alpha - n)\ln(1-n^{\alpha-1}) = (n-n^\alpha)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^{k(\alpha-1)}}{k}\right).$$

В зависимости от α нужно отбросить все слагаемые ряда, начиная с некоторого.

(5) $(2n-1)!! = \dfrac{2^{-n}(2n)!}{n!}$.

(6) Это число равно $\dbinom{2n}{n}$.

(7) Используйте 6.1.7 (3) и идею решения задачи 6.1.12 (2).

6.1.11. (1) Логарифмируя, получаем: $s\ln s = \ln n$. Поэтому при $n > 27$ имеем

$$s > 3 \Rightarrow \ln s > 1 \Rightarrow s < \ln n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln s = \ln\ln n - \ln\ln s \sim \ln\ln n \Rightarrow s = \frac{\ln n}{\ln s} \sim \frac{\ln n}{\ln\ln n}.$$

(2) Логарифмируя, получаем: $s^3\ln s = \ln n$. Аналогично предыдущему, при $n > 3^{3^3}$ имеем

$$s > 3 \Rightarrow \ln s > 1 \Rightarrow s < \sqrt[3]{\ln n} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3\ln s = \ln\ln n - \ln\ln s \sim \ln\ln n \Rightarrow s = \sqrt[3]{\frac{\ln n}{\ln s}} \sim \sqrt[3]{\frac{3\ln n}{\ln\ln n}}.$$

(3), (4), (5), (6) Аналогично предыдущим пунктам.

(3) Ответ: $\dfrac{\ln n}{\ln\ln n}$.

(4) Ответ: $2\log_2 n$.

(5) Ответ: $\log_2 n$.

(6) Ответ: $\log_2 n$. Используйте результат задачи 6.1.5 (2).

6.1.12. (1) Указание. Просуммируйте по k выражения из 1.4.7 (6).

Ответ: $C_{n \bmod 2} \cdot 2^{n^2/4}$, где $C_{n \bmod 2}$ — некоторое число, не зависящее от n, но зависящее от чётности числа n (эти числа можно и нужно представить в виде сумм рядов).

Замечание М. Н. Вялого. В статье [w7] этот множитель выражается через разные другие ряды и произведения; для чётных и нечётных размерностей множители разные. Также см. статью [w3]. Доказанный в ней результат слабее, но его доказательство, судя по всему, значительно проще.

(2) Разбейте сумму $\dfrac{n^{n-1}}{2}\sum\limits_{k=3}^{n}\Big(1-\dfrac{1}{n}\Big)\Big(1-\dfrac{2}{n}\Big)\ldots\Big(1-\dfrac{k-1}{n}\Big)$ на две части: от $k=3$ до $k=[n^{0,6}]$ и от $k=[n^{0,6}]+1$ до $k=n$.

6.2.16. Обозначим через A число раскрасок. (Оно равно 2^n, где n — число элементов.) Для любого подмножества e из семейства обозначим через A_e множество раскрасок, для которых подмножество e одноцветно. Тогда $|A_e|/|A|=2^{1-k}$. Подмножество A_e не зависит от набора $\{A_f : f\cap e=\varnothing\}$. Вне этого набора не более k^2 множеств. Применим локальную лемму Ловаса в симметричной форме (задачу 6.2.15 (1)) к дополнениям множеств A_e и $d=2^{k-3}$. Это возможно ввиду задачи 6.2.9 и неравенства $k^2<2^{k-3}$ для $k\geqslant 10$. Получим $\bigcap\limits_e \overline{A_e}\ne\varnothing$.

6.2.18. (1) Обозначим через $V_1,\ldots,V_n$ множества разбиения и через A — семейство n-элементных подмножеств множества вершин, которые пересекаются с каждым V_j по одному элементу. Для любого ребра u цикла обозначим через A_u семейство подмножеств из A, содержащих оба конца ребра u. Тогда $|A_u|/|A|\leqslant 1/256$. Если концы ребра u цикла лежат в $V_j\cup V_k$, то A_u не зависит от набора всех тех A_f, для которых ни один конец ребра f не лежит в $V_j\cup V_j$. Количество остальных A_f не больше 64. Применим локальную лемму Ловаса в симметричной форме (задачу 6.2.15 (1)) к дополнениям множеств A_u и $d=64$. Это возможно ввиду задачи 6.2.9 и равенства $4\cdot 64=256$. Получим $\bigcap\limits_u \overline{A_u}\ne\varnothing$.

(2), (3) Аналогично решению п. (1). Используйте задачу 6.2.15 (3).

6.2.19. (3) Пусть $x\in\{1,2,\ldots,n\}$. Тогда для прогрессии с разностью d, у которой x является i-м элементом, имеем $1\leqslant x-(i-1)d$ и $x+(k-i)d\leqslant n$. Так как прогрессия восстанавливается по (i,d), то можно просуммировать возможные d, удовлетворяющие первому неравенству при $i \leqslant \frac{k}{2}$ и второму при $i \geqslant \frac{k}{2}$. При чётном k получаем:

$$\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \frac{n-x}{k-i} + \sum_{i=\frac{k}{2}+1}^{k} \frac{x-1}{i-1} = (n-x)\sum_{i=1}^{\frac{k}{2}} \frac{1}{k-i} + (x-1)\sum_{i=\frac{k}{2}+1}^{k} \frac{1}{i-1} =$$

$$= (n-x+x-1)\sum_{i=\frac{k}{2}+1}^{k} \frac{1}{i-1} \leqslant n-1.$$

Последнее неравенство можно проверить по индукции. Случай нечётного k аналогичен.

(4) Обозначим $n := [2^{k-3}/k]$. Обозначим через A семейство раскрасок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в 2 цвета. Для любой k-членной арифметической прогрессии $\alpha \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ обозначим через A_α семейство раскрасок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в 2 цвета, для которых α одноцветна. Тогда $|A_\alpha|/|A| = 2^{1-k}$. Подмножество A_α не зависит от набора $\{A_\beta : \beta \cap \alpha = \varnothing\}$. По п. (3) остальных A_β не более nk. Применим локальную лемму Ловаса в симметричной форме (задачу 6.2.15 (1)) к дополнениям множеств A_α и $d = nk$. Это возможно ввиду задачи 6.2.9 и неравенства $4 \cdot 2^{1-k} nk \leqslant 1$. Получим $\bigcap\limits_{\alpha} \overline{A_\alpha} \neq \varnothing$.

6.2.20. (1) Тогда $|A_x|/|A| = r\left(1 - \frac{1}{r}\right)^m$. Каждое множество A_x пересекается не более чем с $m(m-1)$ другими. Применим локальную лемму Ловаса в симметричной форме (задачу 6.2.15 (1)) к дополнениям множеств A_x и $d = m(m-1)$. Это возможно ввиду задачи 6.2.9 и неравенства, данного в условии. Получим $\bigcap\limits_{x} \overline{A_x} \neq \varnothing$.

6.2.22. См. подсказку. Обозначим через $A_{u,k}$ событие «обе вершины ребра u покрашены в цвет $k = 1, \ldots, d$». Тогда $\mathrm{P}(A_{u,k}) \leqslant \frac{1}{100d^2}$. Обозначим через $\alpha_{u,k}$ набор всех событий $A_{f,l}$, где f пробегает все рёбра, не пересекающиеся с u, а l — все цвета от 1 до d. Тогда $A_{u,k}$ не зависит от набора $\alpha_{u,k}$. Количество событий $A_{f,l}$, не входящих в этот набор, не превосходит произведения

• количества способов выбрать вершину ребра u,

• количества способов выбрать цвет, в который покрашена выбранная вершина,

• количества способов выбрать ребро, выходящее из выбранной вершины.

Это произведение есть $2 \cdot 10d \cdot d = 20d^2$. После этого применим локальную лемму Ловаса в симметричной форме (задачу 6.2.15 (1)).

6.3.1. (1) См. подсказку. По аддитивности математического ожидания (ср. с задачей 6.3.8 (1)) $\mathbb{E}(|A|) = \mathbb{E}\Big(\sum\limits_v 1_{v\in A}\Big) = np$.

Для подмножества $A \subset V$ обозначим через OA множество вершин, лежащих в A или соединённых с некоторой вершиной из A. Тогда $P(v \notin OA) \leqslant (1-p)^{\delta+1}$. Поэтому аналогично предыдущему $\mathbb{E}(|V - OA|) \leqslant$ $\leqslant n(1-p)^{\delta+1}$.

Значит, по аддитивности математического ожидания

$$\mathbb{E}(|A| + |V - OA|) \leqslant np + n(1-p)^{\delta+1}.$$

Тогда существует подмножество $A \subset V$, для которого

$$|A| + |V - OA| \leqslant np + n(1-p)^{\delta+1}.$$

(2) Возьмём

$$D := A \cup (V - OA) \quad \text{и} \quad p = \ln(\delta+1)/(\delta+1).$$

Вспомнив, что $(1-p)^{\delta+1} \leqslant e^{-p(\delta+1)} = 1/(\delta+1)$, получаем искомое.

Заметим, что приводимое вероятностное решение можно записать на комбинаторном языке путём подсчёта двумя способами количества пар с весами.

6.3.3. (1) Возьмем вероятностное пространство Эрдёша—Реньи с $p = n^{1/(2l)-1}$. По утверждению 6.3.4, вероятность наличия k независимых вершин меньше $e^{k\ln n - pk(k-1)/2}$. Это меньше половины при $k =$ $= k(n) := [n^{1-1/(4l)} \ln n]$ и достаточно больших n.

По задаче 6.3.5 (5) математическое ожидание количества несамопересекающихся циклов длины менее l равно

$$E = \sum_{s=3}^{l-1} \frac{n(n-1)\ldots(n-s+1)}{2s} p^s < \sum_{s=3}^{l-1} n^s p^s < l(np)^l = l\sqrt{n}.$$

Значит, по неравенству Маркова 6.3.9 (1) вероятность того, что число несамопересекающихся циклов длины менее l больше $n/2$, меньше $\dfrac{E}{n/2} < \dfrac{1}{2}$ для достаточно больших n.

Поэтому для любого достаточно большого n существует такой граф с n вершинами, в котором нет k независимых вершин и в котором не более $n/2$ несамопересекающихся циклов длины менее l. Для каждого такого несамопересекающегося цикла удалим из графа одну из вершин несамопересекающегося цикла. Получим граф, в котором нет несамопересекающихся циклов длины менее l и нет k независимых вершин.

По задаче 3.1.3 этот граф невозможно правильно раскрасить менее чем в $n/(k(n)-1) \sim \sqrt[4l]{n}/\ln n$ цветов. Значит, для достаточно большого n этот граф — искомый.

(Мы благодарны А. Матушкину за упрощение решения.)

6.3.4. Эта вероятность не превосходит

$$\binom{n}{k}(1-p)^{k(k-1)/2} < n^k e^{-pk(k-1)/2} = e^{k\ln n - pk(k-1)/2}.$$

6.3.5. Ответы: (5) $(n-1)!\,p^n/2$; (6) $\dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{2k}p^k$.

6.3.6. Из подсказки можно вывести, что $\mathbb{E}^{(k)}(Y) = n(n-1)\ldots$ $\ldots(n-k+1)(1-p)^{k(n-k)+\frac{k(k-1)}{2}}$. Асимптотика ищется при помощи этой формулы.

6.3.10. (2) См. подсказку. По п. (1) а.п.н. любая связная компонента имеет размер менее $n/2$. Значит, искомое мат. ожидание асимптотически не больше

$$\sum_{C\ln n<k<n/2}\binom{n}{k}k^{k-2}p^{k-1}(1-p)^{k(n-k)}.$$

Действительно, сначала мы выбираем вершины, которые войдут в компоненту. Затем выбираем остов, в нём $k-1$ ребро. Далее, эти k вершин не соединены со всеми вершинами извне.

Разбиваем полученную сумму на части $k\leqslant n/10$ и $k>n/10$. При $C\ln n<k\leqslant n/10$ имеем:

$$\binom{n}{k}k^{k-2}p^{k-1}(1-p)^{k(n-k)} < \frac{n^k}{k!\,(2n)^{k-1}}k^{k-2}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{k(n-k)} <$$
$$< \frac{nk^{k-2}e^{-9k/20}}{2^{k-1}k!} \overset{(*)}{<} nk^{-5/2}2^{-k}e^ke^{-9k/20} < n\lambda^k, \quad \text{где} \quad \lambda := \frac{e^{11/20}}{2} < 1.$$

Здесь $(*)$ выполняется для достаточно больших n ввиду формулы Стирлинга. Поэтому первая часть суммы не превосходит $\dfrac{n\lambda^{C\ln n}}{1-\lambda} \sim \dfrac{n^{1+C\ln\lambda}}{1-\lambda} \to$ $\to 0$ при $C>-1/\ln\lambda$.

Вторая часть суммы оценивается аналогично; можно воспользоваться равенством $\dbinom{n}{an} = (a^{-a}(1-a)^{a-1}+o(1))^n$ (задача 6.1.5).

6.3.11. (1) (*Это решение написано А. Матушкиным*). Вероятность того, что степень каждой вершины больше 1, не превосходит

$$n(1-(1-p)^{n-1}-(n-1)p(1-p)^{n-2}) \leqslant$$
$$\leqslant n(1-(1-p(n-1))-(n-1)p(1-p(n-2))) =$$
$$= n(n-1)(n-2)p^2 \to 0.$$

Здесь неравенство выполнено в силу неравенств Бернулли $(1-p)^{n-1}\geqslant$ $\geqslant 1-p(n-1)$ и $(1-p)^{n-2}\geqslant 1-p(n-2)$.

Немного другое решение. Вероятность того, что степень каждой вершины есть 0 или 1, равна

$$((1-p)^{n-1}+(n-1)p(1-p)^{n-2})^n=((1-p)^{n-2}(1+(n-2)p))^n\geqslant$$
$$\geqslant(1-(n-2)^2p^2)^n=(1-o(n^{-1}))^n\to 1.$$

(2) В силу линейности мат. ожидания мат. ожидание количества X рёбер $\mathbb{E}X=pn(n-1)/2\sim pn^2/2$. В силу того, что рёбра выбираются независимо друг от друга, $\mathbb{D}X=p(1-p)n(n-1)/2<pn^2/2$. Возьмем $r=r(n):=(pn^2)^{2/3}$. Ясно, что $r=o(pn^2)$ и $r\to\infty$. По п. (1) и неравенству Чебышёва вероятность того, что число вершин степени 1 меньше pn^2-r или больше pn^2+r, «асимптотически не превосходит»

$$\mathrm{P}\big(|2X-pn^2|\geqslant r\big)\leqslant\mathrm{P}\left(|X-\mathbb{E}X|\geqslant\frac{r}{4}\right)\leqslant\frac{\mathbb{D}X}{(r/4)^2}<\frac{8pn^2}{r^2}=\frac{8}{\sqrt{r}}\to 0.$$

6.3.13. Подойдёт, например, (1) $p^*(n)=1/n$. (2) $p^*(n)=n^{-2/3}$.

Если $\dfrac{p(n)}{p^*(n)}\to 0$, то $\mathbb{E}\xi_n\to 0$, значит, $\mathrm{P}(\xi_n>0)\to 0$.

Если же $\dfrac{p(n)}{p^*(n)}\to+\infty$, то $\mathbb{D}\xi_n=o(\mathbb{E}^2\xi_n)$. (Например, в п. (1) $\mathbb{E}\xi_n=\binom{n}{3}p^3$, и дисперсия посчитана в задаче 6.3.7 (2).) Значит, по неравенству Чебышёва а.п.н. $\mathbb{E}\xi_n/2<\xi_n<3\mathbb{E}\xi_n/2$. Значит, а.п.н. $\xi_n>0$.

6.3.14. (1) $\mathrm{P}(\chi(G)\leqslant 1)=(1-p)^{n(n-1)/2}\to 1$.

(2) См. подсказку. Ибо мат. ожидание количества несамопересекающихся циклов меньше $\dfrac{(np)^3}{1-np}\to 0$ при $n\to\infty$.

§ 7. Алгебраические методы

7.1. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике

Напомним, что для множества F
$$F^n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)\colon a_1, a_2, \ldots, a_n \in F\}.$$
Элементы этого множества называются *векторами* (или *наборами*, или *точками*). Если $F \in \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, то векторы можно покомпонентно складывать:
$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$
Если $F \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, то вектор можно покомпонентно умножить на число $\lambda \in F$:
$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$
(Это можно делать и для $F = \mathbb{Z}_2$, но неинтересно.)

7.1.1. Теорема о линейной зависимости.

($\mathbb{Z}_2$) *Среди любых $n+1$ наборов длины n из нулей и единиц найдётся несколько (не ноль) наборов, покомпонентная сумма по модулю два которых есть нулевой набор.*

($\mathbb{Q}$) *Для любых $n+1$ векторов $v_1, \ldots, v_{n+1} \in \mathbb{Q}^n$ найдутся рациональные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$, не все равные нулю, для которых $\lambda_1 v_1 + \ldots$ $\ldots + \lambda_{n+1} v_{n+1} = (0, \ldots, 0)$.*

($\mathbb{R}$) *Аналог теоремы* ($\mathbb{Q}$) *справедлив для вещественных, комплексных и целых чисел.*

Наборы из задач 7.1.1($\mathbb{Z}_2$), ($\mathbb{Q}$) называются *линейно зависимыми* — над $\mathbb{Z}_2$ и над $\mathbb{Q}$ соответственно. *Линейная независимость* — отрицание *линейной зависимости*. Аналогично определяется линейная (не)зависимость многочленов над $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Q}$ соответственно. (Эти и следующие понятия используются в формулировках задач 7.1.4 (3), 7.1.5 (3), 7.1.7 (2) и в решениях некоторых задач.)

Для $F \in \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ *скалярное произведение* $F^n \times F^n \to F$ определяется формулой
$$x \cdot y = (x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$
Векторы $x, y \in F^n$ называются *ортогональными*, если $x \cdot y = 0$.

Расстояние между точками пространства $\mathbb{R}^n$ определяется формулой
$$|(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)| := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Линейным подпространством называется подмножество $L \subset \mathbb{Q}^n$, замкнутое относительно сложения векторов и умножения на рациональные числа. Линейное подпространство L называется *n-мерным*, если найдутся такие линейно независимые векторы $v_1, \ldots, v_n \in L$, что любой вектор $v \in L$ линейно выражается через данные векторы, т. е. найдутся числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Q}$, для которых $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$. Число n называют *размерностью* пространства L. Ср. с определением перед задачей 1.4.7.

Замечание. Аналогичные определения можно дать и в более общей ситуации — это приводит к понятию *кольца* и *модуля* над ним. Попытка доказать (и использовать!) аналог теоремы о линейной зависимости (задачи 7.1.1($\mathbb{Z}_2$), ($\mathbb{Q}$)) приводит к понятиям *поля* и *линейного пространства* над ним. (Для случая целых чисел уже не все обобщения проходят.) Подробности можно найти в учебнике по линейной алгебре.

Фраза «N элементов» (в частности, подмножеств) означает «N попарно различных элементов» (в частности, подмножеств).

7.1.2. Дано семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества $\mathcal{R}_n$.

(1) Если в каждом подмножестве из $\mathcal{F}$ нечётное число элементов, а в пересечении любых двух подмножеств из $\mathcal{F}$ чётное число элементов, то $|\mathcal{F}| \leqslant n$.

(2) Постройте пример, когда эта оценка достигается.

(3) Если в пересечении любых двух подмножеств из $\mathcal{F}$ ровно q элементов и в каждом подмножестве из $\mathcal{F}$ более q элементов, то $|\mathcal{F}| \leqslant n$.

(4) Если $q > 0$ и в пересечении любых двух подмножеств из $\mathcal{F}$ ровно q элементов, то $|\mathcal{F}| \leqslant n$.

7.1.3. (1) Существуют 2^k подмножеств $2k$-элементного множества, в каждом из которых чётное число элементов и в пересечении любых двух из которых чётное число элементов.

(2) Больше чем 2^k подмножеств в условиях п. (1) быть не может.

7.1.4. (1) Наибольшее число точек в $\mathbb{R}^n$ с равными попарными расстояниями равно $n+1$.

(2) Постройте $\dfrac{n(n-1)}{2}$ точек в $\mathbb{R}^n$, попарные расстояния между которыми принимают только два различных значения.

(3) Для $a \in \mathbb{R}$ и точек $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ обозначим $P_v(x) := |x - v|^2 - a^2$. Если попарные расстояния между k точками $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$ равны a, то многочлены $P_{u_1}, \ldots, P_{u_k}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

(4) Если попарные расстояния между k точками в $\mathbb{R}^n$ принимают только два различных значения, то $k \leqslant \dfrac{(n+1)(n+4)}{2}$.

7.1.5. (1) Среди любых 327 попарно пересекающихся 9-элементных подмножеств 25-элементного множества найдутся два подмножества, в пересечении которых ровно 3 или ровно 6 элементов.

(2) Для $n,k\in\mathbb{Z}$ обозначим

$$V_{n,k}:=\Big\{(x_1,\dots,x_n)\in\{0,1\}^n:\ \sum_s x_s=k\Big\}.$$

Среди любых 327 точек в $V_{25,9}$ есть две, скалярное произведение которых лежит в $\{0,3,6\}$.

(3) Для любого $\vec a\in V_{25,9}$ раскроем скобки в произведении

$$(\vec a\cdot(x_1,x_2,\dots,x_{25})-1)(\vec a\cdot(x_1,x_2,\dots,x_{25})-2),$$

где $x_1,x_2,\dots,x_{25}$ — переменные. С каждым из полученных одночленов проведём следующую операцию: для каждого i, если в одночлене есть множитель x_i^2, заменим этот множитель на 1. Полученный многочлен обозначим $F_{\vec a}(x_1,\dots,x_{25})$. Докажите, что если скалярное произведение никаких двух векторов среди $\vec a_1,\dots,\vec a_s\in V_{25,9}$ не делится на 3, то многочлены $F_{\vec a_1},\dots,F_{\vec a_s}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

(4) Укажите 326 многочленов, линейными комбинациями которых с рациональными коэффициентами можно получить каждый многочлен $F_{\vec a}$, $\vec a\in V_{25,9}$.

7.1.6. (1) Среди любых 107 пятиэлементных подмножеств 14-элементного множества найдутся два подмножества, в пересечении которых ровно 2 элемента.

(2) То же для 93 подмножеств.

(3) То же для 92 подмножеств.

(4) Невозможно раскрасить в 21 цвет все пятиэлементные подмножества 14-элементного множества так, чтобы любые два пятиэлементные подмножества, пересекающиеся ровно по двум элементам, были разноцветны.

(Ср. с замечанием в задаче 5.1.4. Вот эквивалентная формулировка. Вершинами графа являются все пятиэлементные подмножества 14-элементного множества. Его рёбрами являются пары подмножеств, пересекающиеся ровно по двум элементам. Докажите, что этот граф нельзя правильно раскрасить в 21 цвет.)

7.1.7. (1) Для простого p и целого t число $G(t):=(t-1)(t-2)\dots$ $\dots(t-p+1)$ делится на p тогда и только тогда, когда t не делится на p.

(2) Пусть p простое и $n=4p$. Обозначим

$$M=\{(1,y_2,y_3\dots,y_n):\ y_k\in\{1,-1\}\ \text{и среди}\ y_2,\dots,y_n\ \text{число минус единиц чётно}\}.$$

Обозначим $G(t) := (t-1)(t-2)\ldots(t-p+1)$. Для любого $\vec{a} \in M$ раскроем скобки в произведении $G(\vec{a} \cdot (1, x_2, \ldots, x_n))$, где $x_2, \ldots, x_n$ — переменные. В каждом из полученных одночленов для каждого i будем заменять x_i^2 на 1, пока это возможно. Полученный многочлен обозначим $F_{\vec{a}}(x_2, \ldots, x_n)$.

Докажите, что если скалярное произведение никаких векторов среди $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s \in M$ не равно нулю, то многочлены $F_{\vec{a}_1}, \ldots, F_{\vec{a}_s}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

(3) Существуют n и ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^n$, которое невозможно разбить на $n+1$ непустых частей меньшего диаметра.

7.1.8. (1) **Теорема Франкла—Уилсона.** *Если t простое, то среди любых $1 + \sum\limits_{j=0}^{t-1} \binom{n}{j}$ различных подмножеств n-элементного множества, в каждом из которых k элементов, найдутся два подмножества, число элементов в пересечении которых делится на t.*

(2) То же, только задано целое q и «делится на t» заменено на «сравнимо с q по модулю t».

7.1.9. (1) Если множество рёбер графа K_n является объединением множеств рёбер s полных двудольных графов, не пересекающихся по рёбрам, то $s \geqslant n-1$.

(2) Постройте набор двудольных графов, на котором эта оценка достигается.

Более подробное и развернутое изложение можно найти в [Mk, R1], а более продвинутое — в [BF].

7.2. Матрицы Адамара

7.2.1. Теорема Адамара. *Если у матрицы A размера $n \times n$ все элементы по модулю не больше 1, то $|\det A| \leqslant n^{n/2}$.*

Квадратная матрица H называется *матрицей Адамара*, если все её элементы равны ± 1 и $H \cdot H^T = nE_n$, где n — порядок матрицы H и E_n — единичная матрица.

7.2.2. Постройте матрицу Адамара $n \times n$ для
(1) $n=2$; (2) $n=4$; (3) $n=8$; (4) $n=16$; (5) $n=12$.

7.2.3. (1) У матрицы Адамара любые два столбца ортогональны.

(2) Матрица является матрицей Адамара тогда и только тогда, когда её элементы равны ± 1 и любые две строки ортогональны.

(3) Для матриц Адамара достигается верхняя оценка в теореме Адамара. (Название матрицы Адамара получили благодаря этому результату.)

(4) Если существует матрица Адамара $n \times n$ и $n > 2$, то n делится на 4.

Гипотеза. Матрица Адамара $n \times n$ существует для любого числа n, делящегося на 4.

Гипотеза не доказана даже для некоторых чисел, меньших 1000; а именно: для $668, 716, 892$.

Для решения двух следующих задач потребуются простейшие свойства квадратичных вычетов; см. [GIM, § 9], [Vi, § 5], [ZSS, п. 3.3].

7.2.4. Для простого числа p обозначим $S_d = S_{p,d} := \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}_p} \left(\dfrac{j(j+d)}{p}\right)$ (это сумма символов Лежандра).

(1) Докажите, что S_d не зависит от $d \neq 0$.

(2) Найдите S_d для каждого $d \in \mathbb{Z}_p$.

7.2.5. Постройте матрицу Адамара $n \times n$ для

(1) $n = 2a$, если существует матрица Адамара $a \times a$;

(2) $n = ab$, если существуют матрицы Адамара $a \times a$ и $b \times b$;

(3) $n = p + 1$, где p — простое число вида $4k - 1$;

(4) $n = 2p + 2$, где p — простое число вида $4k + 1$.

Матрица Адамара называется *нормализованной*, если у неё первая строчка и первый столбец состоят из одних единиц.

7.2.6. Нарисуйте все нормализованные матрицы Адамара порядков $1; 2; 4$.

7.2.7. Адамаровость матрицы сохраняется при следующих преобразованиях:

(1) умножение строчки или столбца на -1;

(2) перестановка строчек или столбцов местами.

Матрицы Адамара, получаемые друг их друга применением некоторого числа преобразований (1) и (2), называются *эквивалентными*.

7.2.8. (1) Какие из матриц из задачи 7.2.6 эквивалентны?

(2) Любая матрица Адамара эквивалентна некоторой нормализованной.

Количество классов эквивалентности: для порядков $1, 2, 4, 8, 12$ — 1, 16 — 5, 20 — 3, 24 — 60, 28 — 487, 32 — больше миллиона.

7.2.9. Для любых ли матриц Адамара H и H' матрицы $H \otimes H'$ и $H' \otimes H$ эквивалентны? Здесь тензорное произведение $\otimes$ определено в указании к задаче 7.2.5 (1, 2).

7.2.10. Матрица Адамара H, построенная при помощи конструкции (Пейли) из задачи 7.2.5 (4), эквивалентна матрице H^T.

7.2.11*. Существует ли матрица Адамара H, не эквивалентная матрице H^T?

7.3. Подсказки

7.1.2. (1) Если подмножеств больше n, то по теореме о корректности определения размерности одно из них равно симметрической разности некоторых других: $A = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_s$.

(3) Возьмём векторы $v_1, \ldots, v_s \in \{0,1\}^n$, соответствующие подмножествам $\{A_1, \ldots, A_s\} = \mathcal{F}$. По теореме о корректности определения размерности достаточно показать линейную независимость этих векторов над $\mathbb{Q}$.

7.1.3. (2) Для семейства U подмножеств множества $\mathcal{R}$, замкнутого относительно суммы по модулю 2 (т. е. для линейного подпространства в $\mathbb{Z}_2^n$), обозначим

$$U^\perp := \{X \subset \mathcal{R} : |X \cap Y| \text{ чётно для любого } Y \in U\}.$$

Докажите, что $\dim U^\perp \leqslant n - \dim U$.

7.1.4. (4) Докажем, что если попарные расстояния между k точками в $\mathbb{R}^n$ равны, то $k \leqslant n+2$. Это сложное доказательство более слабой верхней оценки $n+2$ интересно тем, что его обобщение работает для двух расстояний. Обозначим через a данное расстояние. Многочлен $P_v(x_1, \ldots, x_n)$ является линейной комбинацией (с коэффициентами, не зависящими от $x_1, \ldots, x_n$) многочленов $|x|^2, x_1, \ldots, x_n$ и 1. В этом списке $n+2$ многочлена. По п. (3) многочлены, соответствующие данным точкам в $\mathbb{R}^n$, линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Поэтому количество точек не превосходит $n+2$.

7.1.5. (1) Следует из п. (2).

(2) Следует из п. (3).

(3) Пусть, напротив,

$$\lambda_1 F_{\vec{a}_1} + \ldots + \lambda_s F_{\vec{a}_s} = 0$$

для некоторых $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s \in V_{25,9}$ и рациональных $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, причём не все λ_k равны нулю. Умножим это равенство на некоторое рациональное число, чтобы сделать $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ целыми, не все из которых делятся на 3. Не уменьшая общности, можно считать, что λ_1 не делится на 3. Подставим в полученное равенство значения $x_1 = (\vec{a}_1)_1, \ldots, x_n = (\vec{a}_1)_n$.

7.4. Указания

7.1.1. *Доказательство для целых чисел*. Рассмотрим векторы с целыми координатами как векторы с рациональными координатами. Подберём рациональные коэффициенты для линейной комбинации, равной 0. Умножим все коэффициенты на общий знаменатель. Получим равную 0 линейную комбинацию с целыми коэффициентами.

7.1.2. (1) См. подсказку. Тогда

$$1 \equiv |A \cap A| \equiv |A \cap B_1| + |A \cap B_2| + \ldots + |A \cap B_s| \equiv 0 \pmod 2.$$

Противоречие.

(2) Подойдёт семейство одноэлементных множеств.

(3) Если не все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ равны нулю, то

$$\left(\sum_j \lambda_j v_j\right) \cdot \left(\sum_k \lambda_k v_k\right) = \sum_j \lambda_j^2 v_j^2 + 2 \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant s} \lambda_j \lambda_k v_j \cdot v_k =$$
$$= \sum_j \lambda_j^2 |A_j| + 2 \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant s} \lambda_j \lambda_k q > q\left(\sum_j \lambda_j\right)^2 \geqslant 0,$$

поскольку $|A_j| > q$.

Другое завершение решения. Домножим равенство $\sum_j \lambda_j v_j = 0$ скалярно на v_i. Получим $-q(\lambda_1 + \ldots + \lambda_s) = (|A_i| - q)\lambda_i$. Так как это верно для любого $i = 1, \ldots, v_s$, то знаки чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ одинаковы. Так как они не могут быть противоположны знаку их суммы, то $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots$ $\ldots = \lambda_s = 0$.

(4) Аналогично решению п. (3). Предпоследнее неравенство строгое, поскольку может быть лишь одно k-элементное множество.

7.1.4. (1) Пусть в $\mathbb{R}^n$ имеется $s+1$ точек $A_0, \ldots, A_s$ с попарными расстояниями 1 между ними (если расстояния не равны 1, то сделаем их таковыми с помощью гомотетии). Достаточно доказать, что s векторов $v_j := \overrightarrow{A_0 A_j}$ линейно независимы. Так как треугольник $A_0 A_j A_k$ правильный со стороной 1, то $v_j^2 = 1$ и $v_j \cdot v_k = 1/2$ для любых $j \ne k$. Поэтому если числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ не все равны нулю, то

$$\left(\sum_j \lambda_j v_j\right) \cdot \left(\sum_k \lambda_k v_k\right) = \sum_j \lambda_j^2 v_j^2 + 2 \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant s} \lambda_j \lambda_k v_j \cdot v_k =$$
$$= \sum_j \lambda_j^2 + \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant s} \lambda_j \lambda_k \geqslant \frac{1}{2}\left(\sum_j \lambda_j\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_j \lambda_j^2\right) > 0.$$

Другое завершение решения. Домножим равенство $\sum\limits_j \lambda_j v_j = 0$ скалярно на v_i. Получим $-(\lambda_1 + \ldots + \lambda_s) = \lambda_i$. Так как это верно для любого $i = 1, \ldots, v_s$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_s = 0$.

(2) Подойдёт множество $V_{n,2} := \Big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n : \sum\limits_j x_j = 2\Big\}$.

(3) Пусть, напротив, $\lambda_1 P_{u_1} + \ldots + \lambda_s P_{u_s} = 0$ для некоторых рациональных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, не все из которых равны нулю. Подставим в полученное равенство значения $x = u_1$. Получим $P_{u_1}(u_1) = -a^2$ и $P_{u_j}(u_1) = 0$ для $j \ne 1$. Поэтому $\lambda_1 = 0$. Аналогично получаем $\lambda_2 = \ldots$ $\ldots = \lambda_s = 0$. Противоречие.

(4) Обозначим через a и b данные расстояния. Для каждой из точек v нашего множества и $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$P_v(x) := (|x - v|^2 - a^2)(|x - v|^2 - b^2).$$

Этот многочлен от $x_1, \ldots, x_n$ является линейной комбинацией (с коэффициентами, не зависящими от $x_1, \ldots, x_n$) многочленов

$$|x|^4,\ 1,\ |x|^2 x_k,\ x_k x_l,\ x_k \quad (k, l = 1, \ldots, n,\ l \leqslant k).$$

В этом списке $2 + 2n + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)(n+4)}{2}$ многочленов. Аналогично решению п. (3) эти многочлены линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Поэтому количество точек не превосходит $\dfrac{(n+1)(n+4)}{2}$.

7.1.5. (2) Следует из п. (3), поскольку размерность линейного пространства многочленов от $x_1, \ldots, x_{25}$ степени не более 2 и свободных от квадратов равна $1 + 25 + 25 \cdot 24/2 = 326$.

(3) Так как $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 = 9$ делится на 3, то $\lambda_1 F_{\vec{a}_1}(\vec{a}_1)$ не делится на 3.

Так как $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_k$ не делится на 3, то $F_{\vec{a}_k}(\vec{a}_1)$ делится на 3. Противоречие.

7.1.6. (1) Аналогично решению задачи 7.1.5, только нужно раскрыть скобки в произведении

$$\vec{a} \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_{14})(\vec{a} \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_{14}) - 1). \qquad (*)$$

(2), (3) *Решение А. Мазанова.* Аналогично решению п. (1), только многочлен, полученный из $(*)$ «заменой $x_k^2 \to 1$», является линейной комбинацией многочленов $x_i x_j$ с $i \ne j$. (Более точно, этот многочлен равен $2\sum\limits_{i \ne j} a_i a_j x_i x_j$.)

(2) *Alio modo.* Аналогично решению п. (1), только можно избавиться от одночленов, содержащих x_{14}, при помощи равенства $\sum\limits_s x_s = 2$.

Размерность линейного пространства многочленов от $x_1, \dots, x_{13}$ степени не более 2 и свободных от квадратов переменных равна $1 + 13 + \frac{13 \cdot 12}{2} = 92$.

(3) *Alio modo*. Аналогично решению п. (1), только можно избавиться от $1, x_1, \dots, x_{14}$ при помощи сравнений $-\sum_s x_s \equiv 1 \mod 3$ и $x_i \equiv 2x_i - x_i^2 \equiv x_i \sum_{s \neq i} x_s \mod 3$.

(4) Так как $\binom{14}{5} = 91 \cdot 22$, то $\binom{14}{5}/92 > 21$.

7.1.7. (2), (3) См. решение в [S6]. Ср. с [R1, R2].

7.1.9. (1) Пусть граф K_n представлен в виде объединения непересекающихся по рёбрам полных двудольных графов $B_1, \dots, B_m$. Обозначим через X_i и Y_i доли графа B_i. Определим матрицу A_i так: $a^i_{kl} = 1$, если k-я вершина графа K_n принадлежит X_i и l-я принадлежит Y_i, иначе $a^i_{kl} = 0$ (это матрица смежности ориентированного графа, соответствующего B_i). В матрице $A := A_1 + \ldots + A_m$ на диагонали стоят нули, а среди a_{kl} и a_{lk}, $l \neq k$, одна единица и один ноль. Тогда $A + A^T = I_n - E_n$, где E_n — единичная матрица, а I_n – матрица из всех единиц.

Докажем, что *если для матрицы A из вещественных чисел $A + A^T = I_n - E_n$, то* $\mathrm{rk} A \geqslant n - 1$. Действительно, допустим, что $\mathrm{rk} A \leqslant n - 2$. Тогда существует нетривиальное решение $x = (x_1, \dots, x_n)$ системы уравнений $Ax = 0$, $\sum_i x_i = 0$. Для такого x имеем $I_n x = 0$. Значит, $A^T x = -x$. Следовательно, $-x \cdot x = A^T x \cdot x = x \cdot Ax = 0$. Противоречие.

Теперь утверждение задачи следует из свойства $\mathrm{rk}(A + B) \leqslant \mathrm{rk} A + \mathrm{rk} B$ и того, что каждая из матриц A_i имеет ранг 1.

(2) В качестве очередного двудольного графа берём все (оставшиеся) рёбра, выходящие из одной вершины.

7.2.3. (При написании этого решения использован текст А. Голованова.)

(1) Можно делать аналогично пункту (2) или свести к нему следующим образом.

Так как $H \cdot H^T = nE_n$, то $H^T = nH^{-1}$. Значит, $H^T \cdot (H^T)^T = H^T \cdot H = nH^{-1} \cdot H = nE_n$. Поэтому H^T также является матрицей Адамара. Тогда строки матрицы H^T ортогональны. Теперь из п. (2) вытекает, что ортогональны и столбцы матрицы H.

(2) Скалярное произведение строк i и j матрицы H равно $(H \cdot H^T)_{ij}$.

$\Rightarrow$ Если матрица является матрицей Адамара, то все её элементы равны ± 1 и $(H \cdot H^T)_{ij} = (nE_n)_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

$\Leftarrow$ Если у матрицы все элементы равны ± 1, и скалярное произведение строк i и j равно 0 при $i \neq j$, то $(H \cdot H^T)_{ij}$ равно 0 при $i \neq j$ и равно n

иначе (поскольку скалярный квадрат вектора из n чисел, каждое из которых равно ± 1, есть сумма n единиц). Значит, $H \cdot H^T = nE_n$, т. е. H — матрица Адамара.

(3) Имеем

$$|\det H|^2 = \det H \cdot \det H^T = \det HH^T = \det nE_n = n^n.$$

7.2.5. (1), (2) Обозначим данные матрицы Адамара через A и B. Докажите адамаровость матрицы $H = A \otimes B$ размера $ab \times ab$, определённой формулой

$$H_{ka+l,pa+q} := B_{kp}A_{lq}, \quad 1 \leqslant l, q \leqslant a, \quad 1 \leqslant k, p \leqslant b.$$

(3), (4) Определим *матрицу Якобсталя* Q размера $p \times p$ формулой $Q_{jl} := \left(\dfrac{j-l}{p}\right)$.

(3) Используя задачу 7.2.4, докажите, что матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & e^T \\ e & Q-E \end{pmatrix},$$

где e — столбец из единиц, является матрицей Адамара.

(4) *Конструкция Пейли*. Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & e^T \\ e & Q \end{pmatrix},$$

где e — столбец из единиц. Используя задачу 7.2.4, докажите, что если заменить 0 на матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, а ± 1 — на $\pm\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, то получится матрица Адамара размера $8k+4$.

Подробнее см. [So], через кронекерово произведение (с. 101—102) и через квадратичные вычеты (с. 103—104).

§ 8. Теоремы об инцидентностях в геометрии

8.1. Задачи

8.1.1. Теорема Сильвестра—Галлаи. *Пусть даны n точек на плоскости, не все точки лежат на одной прямой. Тогда найдётся прямая, которая пройдёт ровно через две точки.*

Числом скрещиваний $\mathrm{cr}(\widetilde{G})$ изображения $\widetilde{G}$ графа на плоскости называется число пар таких пересекающихся рёбер, которые не имеют общих вершин.

Числом скрещиваний $\mathrm{cr}(G)$ графа G называется минимальное число скрещиваний среди всех изображений графа на плоскости.

Замечание. Планарные графы составляют ничтожную долю от всех графов: для планарности в графе должно быть «мало» рёбер, в то время как в «типичном» графе число рёбер квадратично по числу вершин. Поэтому вместо того, чтобы делить мир на чёрное и белое, планарные и непланарные графы, часто хочется классифицировать графы более тонко, по степени их «удалённости от планарных». Соответствующих характеристик непланарности несколько. Одна из главных — это число скрещиваний.

8.1.2. Докажите, что для любого графа G с n вершинами и e рёбрами выполнено неравенство $\mathrm{cr}(G) \geqslant e - 3n$.

8.1.3*. Дан граф G с n вершинами и e рёбрами.

(1) Если $e \geqslant 4n$, то $\mathrm{cr}(G) \geqslant \dfrac{e^3}{64 \cdot n^2}$.

(2) $\mathrm{cr}(G) \geqslant \dfrac{e^3}{64 \cdot n^2} - n$.

Пусть P — множество некоторых точек на плоскости, L — множество некоторых прямых на плоскости. *Числом инциденций*

$$I(P, L) := |\{(p, l) \in P \times L : p \in l\}|$$

называется количество пар вида (точка на прямой, прямая), где прямая и точка взяты из соответствующих множеств. Обозначим через $I(n, m)$ максимальное число инциденций для всех конфигураций из n различных точек и m различных прямых на плоскости.

8.1.4*. Для произвольного n верно неравенство $I(n, n) \geqslant n^{4/3}/3$.

8.1.5. Пусть P — множество из n различных точек на плоскости, L — множество из m различных прямых. Пусть G — граф, определяемый следующим образом. Вершины G соответствуют точкам из множества P, а ребро между двумя вершинами G проводится, если и только если две соответствующие точки из множества P лежат на какой-либо прямой из множества L рядом, т. е. не разделены другой точкой из множества P. Таким образом, рёбрам графа G соответствуют отрезки прямых из множества L. Пусть e — число рёбер в графе G.

(1) $\operatorname{cr}(G) \leqslant m^2$.

(2) $e \geqslant I(P, L) - m$.

(3) *Теорема Семереди—Троттера.* $I(P, L) \leqslant 4(mn)^{2/3} + m + 4n$.

Замечание. Из задач 8.1.4 и 8.1.5 (3) следует, что $n^{4/3}/3 \leqslant I(n, n) \leqslant \leqslant 9n^{4/3}$. Важность этого результата, в частности, в том, что он показывает комбинаторные различия между плоскостью $\mathbb{R}^2$ и конечными проективными плоскостями. (См. указание к задаче 5.6.3, а также [J, 12.4]) Для них соответствующая формула выглядела бы как $cn^{3/2}$. Из этой задачи выросла целая область, которая изучает различные обобщения данного вопроса, например, на случай полиномиальных кривых, пространств бóльших размерностей и т. п. Кроме того, она тесно связана с задачами о расстояниях, которые мы обсудим ниже, и с вопросами о сложности геометрических конфигураций. Стоит отметить, что исторически первый вопрос в духе вопроса Эрдёша об инциденциях был поставлен Сильвестром ещё в XIX веке (см. задачу 8.1.1). Однако он не получил должного внимания.

8.1.6. Существует такое число c, что для любых n точек на плоскости верно следующее утверждение. Для $2 \leqslant k \leqslant \sqrt{n}$ число прямых, каждая из которых содержит по крайней мере k из этих точек, не превосходит cn^2/k^3.

8.1.7*. Теорема Спенсера—Семереди—Троттера. *Существует такое c, что для любых n точек плоскости количество неупорядоченных пар точек, находящихся на расстоянии 1, не превосходит $cn^{4/3}$.*

8.2. Подсказки

8.1.2. Зафиксируйте изображение $\widetilde{G}$ графа G на плоскости, содержащее ровно $\operatorname{cr}(G)$ скрещиваний. Удалите рёбра на изображении $\widetilde{G}$ до получения плоского графа G'. Примените к графу G' оценку 2.4.3 (5).

8.1.4. Постройте конфигурацию из точек и прямых на основе целочисленных точек прямоугольника $[1, k] \times [1, 2k^2]$.

8.1.5. (1) Рассмотрите естественное изображение $\widetilde{G}$ графа G, в котором вершинам соответствуют точки из множества P, а рёбрам — отрезки прямых из множества L.

(2) Оцените число рёбер графа G при помощи соответствия между множеством рёбер графа G и множеством отрезков прямых из множества L.

(3) Примените задачу 8.1.3 (2). Ср. [NPP].

8.1.7. Сведите задачу к задаче об инциденциях между n данными точками и m единичными окружностями. Далее рассуждайте по аналогии с задачей 8.1.5. Будьте внимательны — у вас может получиться граф с петлями и кратными рёбрами!

8.3. Указания

8.1.1. От противного. Рассмотрите пару (прямая через как минимум 3 точки множества, точка не на этой прямой), между которыми расстояние минимально. Найдите пару, у которой расстояние будет меньше.

8.1.2. В случае $n = 1, 2$ неравенство очевидно. Иначе, по задаче 2.4.3 (5) получаем неравенство $e' \leqslant 3n' - 6$, где e' — число рёбер, $n' = n$ — число вершин плоского графа G'. При переходе от $\widetilde{G}$ к G' достаточно удалить не более $\mathrm{cr}(G)$ рёбер. Поэтому $e' \geqslant e - \mathrm{cr}(G)$. Имеем:

$$3n - 6 \geqslant e' \geqslant e - \mathrm{cr}(G) \Rightarrow \mathrm{cr}(G) \geqslant e - 3n.$$

8.1.3. (1) Положим $0 \leqslant p \leqslant 1$. Определим случайный подграф H графа G следующим образом. Вершины $V(H)$ графа H выбираются независимым образом с вероятностью p. (Формальное построение вероятностного пространства проводится аналогично п. 6.3.) Ребро графа G является ребром графа H тогда и только тогда, когда обе вершины ребра лежат в $V(H)$. Обозначим через e_H количество рёбер, а через n_H — количество вершин графа H.

Для каждой из n вершин G вероятность появления в H равна p, поэтому $\mathbb{E}(n_H) = pn$ и $\mathbb{E}(e_H) = p^2 e$.

Рассмотрим изображение $\widetilde{G}$ графа G с числом скрещиваний $\mathrm{cr}(G)$. Без ограничения общности можно считать, что на изображении $\widetilde{G}$ смежные рёбра не пересекаются вне общей вершины. Обозначим через $\widetilde{H}$ изображение графа H, полученное из $\widetilde{G}$ стиранием лишних рёбер и вершин. Вероятность остаться в $\widetilde{H}$ для каждой пары рёбер, пересекающейся вне вершины в $\widetilde{G}$, равна p^4. Поэтому $\mathbb{E}(\mathrm{cr}(\widetilde{H})) \leqslant p^4 \,\mathrm{cr}(G)$.

По задаче 8.1.2 $\mathrm{cr}(\widetilde{H}) \geqslant e_H - 3n_H$. Следовательно,

$$p^4 \,\mathrm{cr}(G) \geqslant \mathbb{E}(\mathrm{cr}(\widetilde{H})) \geqslant \mathbb{E}(e_H) - 3\mathbb{E}(n_H) = p^2 e - 3pn.$$

По условию, $\dfrac{4n}{e} \leqslant 1$. Положив $p := \dfrac{4n}{e}$, мы получаем требуемое неравенство.

(2) Если $e \geqslant 4n$, то неравенство следует из п. (1). Иначе данное неравенство следует из очевидного неравенства $\mathrm{cr}(G) > 0$.

8.1.4. Обозначим через P множество точек указанной решётки, через L — множество прямых вида $y = ax + b$, где $a \in \mathcal{R}_k$, $b \in \mathcal{R}_{k^2}$. Тогда для каждого $x \in \mathcal{R}_k$

$$ax + b \leqslant ak + b \leqslant k^2 + k^2 < 2k^2.$$

Отсюда $I(P, L) \geqslant k \cdot k^3 = k^4$. Так как $n = |P| = k \cdot 2k^2 = 2k^3$, то $k = \sqrt[3]{n/2}$. Поэтому $I(n, n) \geqslant I(P, L) \geqslant n^{4/3}/2^{4/3} \geqslant n^{4/3}/3$.

8.1.5. (1) Так как две прямые из множества L пересекаются не более чем по одной точке, то $\mathrm{cr}(G) \leqslant \mathrm{cr}(\widetilde{G}) \leqslant m^2$.

(2) Рассмотрим произвольную прямую $l \in L$. Обозначим через k_l количество точек на l. Тогда количество рёбер в графе G, которые соответствуют отрезкам прямой l, равно $k_l - 1$. Так как каждое ребро из графа G соответствует отрезку некоторой прямой из множества L, имеем:

$$e = \sum_{l \in L} (k_l - 1) \geqslant I(P, L) - m.$$

(3) Последовательно применяя п. (1), 8.1.3 (2), п. (2), получаем

$$m^2 \geqslant \mathrm{cr}(G) \geqslant \frac{e^3}{64 \cdot n^2} - n \geqslant \frac{(I(P, L) - m)^3}{64 \cdot n^2} - n \iff$$
$$\iff I(P, L) \leqslant 4(mn)^{2/3} + m + 4n.$$

8.1.6. Пусть P — множество из n различных точек на плоскости, L — множество из m различных прямых, каждая из которых содержит по крайней мере k точек из P. Тогда

$$m(k-1) \leqslant I(P, L) - m \leqslant 4(mn)^{2/3} + 4n,$$

где второе неравенство верно в силу утверждения 8.1.5 (3).

Рассмотрев отдельно два случая: $n \leqslant (nm)^{2/3}$ и $n \geqslant (nm)^{2/3}$, получаем требуемое неравенство.

8.1.7. Обозначим через $f(n)$ искомое количество пар точек. Нарисуем окружности единичного радиуса с центрами в точках. Оставим лишь те окружности, на которые попало не менее трёх точек.

Рассмотрим граф G, в котором вершины соответствуют точкам, а рёбра определяются следующим образом. Соединим пару вершин графа ребром, если соответствующие точки попадают на какую-либо из окружностей и расположены друг за другом, т. е. не разделены третьей точкой. Обозначим через e число рёбер в графе G.

Аналогично решению задач 8.1.5 (1, 2) получаем, что $\mathrm{cr}(G) \leqslant 2n^2$ и $f(n) \leqslant e + O(n)$. Далее, используя неравенство, аналогичное 8.1.5 (3), получаем требуемое.

§ 9. Аддитивная комбинаторика

9.1. Задачи

Суммой $A+B$ подмножеств $A, B \subset \mathbb{R}$ или $A, B \subset \mathbb{Z}_m$ называется множество

$$A+B := \{a+b : a \in A, b \in B\}.$$

9.1.1. (1) Если $A, B \subset \mathbb{Z}_4$, $|A+B| = |A| \neq 0$ и $|B| = 2$, то $|A| \in \{2, 4\}$.
(2) Если $A, B \subset \mathbb{Z}_6$, $|A+B| = |A| \neq 0$ и $|B| = 2$, то $|A| \in \{3, 6\}$.

Базовые свойства суммы множеств даются следующей задачей.

9.1.2. Для любых конечных подмножеств $A, B \subset \mathbb{R}$
(1) $\max\{|A|, |B|\} \leqslant |A+B| \leqslant |A| \cdot |B|$;
(2) $|A| \leqslant |A+A| \leqslant \dfrac{|A|(|A|+1)}{2}$.

9.1.3. (1) Если $A = \{2^j : j = 0, 1, \ldots, n-1\}$, то $|A+A| = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
(2) Для любой конечной арифметической прогрессии $P \subset \mathbb{R}$ верно неравенство $|P+P| = 2|P| - 1$.

Замечание. Задача 9.1.3 (1) даёт пример подмножества, для которого достигается верхняя оценка в задаче 9.1.2 (2). Задача 9.1.3 (2) даёт пример подмножества, для которого «почти достигается» нижняя оценка в задаче 9.1.2 (2). Пример подмножества, для которого эта оценка достигается — произвольное одноэлементное подмножество.

9.1.4. Теорема Кнезера для $\mathbb{R}$. *Для любых конечных подмножеств $A, B \subset \mathbb{R}$ верно неравенство $|A+B| \geqslant |A| + |B| - 1$.*

Следующий $\mathbb{Z}_p$-аналог можно использовать в дальнейшем без доказательства.

Теорема Коши—Дэвенпорта. *Для любого простого числа p и для произвольных двух подмножеств $A, B \subset \mathbb{Z}_p$ верно неравенство*

$$|A+B| \geqslant \min\{|A| + |B| - 1, p\}.$$

9.1.5. (1) Если $A, B \subset \mathbb{R}$ и $|A+B| = |A|$, то $|B| = 1$.
(2) Если p простое, $A, B \subset \mathbb{Z}_p$ и $|A+B| = |A|$, то либо $|B| \leqslant 1$, либо $A = \mathbb{Z}_p$.

Аналогично сумме множеств можно определить их *разность*:

$$A-B := \{a-b : a \in A, b \in B\}.$$

9.1.6. *Неравенство Ружи.* Для любых конечных подмножеств A, B, $C \subset \mathbb{R}$
$$|C| \cdot |A - B| \leqslant |A - C| \cdot |B - C|.$$

9.1.7. (1) Для любого непустого конечного подмножества $X \subset \mathbb{R}$ выполнено неравенство $|X - X| \leqslant \dfrac{|X+X|^2}{|X|}$.

(2) Для любых непустых конечных подмножеств $X, Y \subset \mathbb{R}$ выполнено неравенство $|X + X| \leqslant \dfrac{|X+Y|^2}{|Y|}$.

(3) Для любых конечных подмножеств $X, Y \subset \mathbb{R}$ таких, что $X \cap Y \neq \varnothing$ выполнено неравенство $|X + Y| \leqslant \dfrac{|X+X| \cdot |Y+Y|}{|X \cap Y|}$.

9.1.8. Для любых непустых подмножеств $A, B \subset \mathbb{R}$ следующие утверждения эквивалентны:

(1) $|A+B| = |A| \cdot |B|$;
(2) $|A-B| = |A| \cdot |B|$;
(3) $|\{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in A \times A \times B \times B : a_1 + b_1 = a_2 + b_2\}| = |A| \cdot |B|$;
(4) $|\{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in A \times A \times B \times B : a_1 - b_1 = a_2 - b_2\}| = |A| \cdot |B|$;
(5) $|A \cap (\{x\} - B)| = 1$ для любого $x \in A + B$;
(6) $|A \cap (B + \{y\})| = 1$ для любого $y \in A - B$;
(7) $(A - A) \cap (B - B) = \{0\}$.

Сумма произвольных подмножеств $X_1, X_2, \ldots, X_n \subset \mathbb{R}$ определяется как
$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n := \{x_1 + x_2 + \ldots + x_n : x_i \in X_i \text{ для любого } 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$
Для произвольного подмножества $X \subset \mathbb{R}$ и любого целого $k > 0$ положим
$$kX := \underbrace{X + X + \ldots + X}_{k \text{ раз}}.$$

Неравенство Ружи (задача 9.1.6) можно обобщить на случай суммы n множеств.

Неравенство Плюннеке—Ружи. *Для любых непустых конечных подмножеств* $A_1, A_2, \ldots, A_n, B \subset \mathbb{R}$
$$|A_1 + A_2 + \ldots + A_n| \leqslant \frac{|A_1 + B| \cdot |A_2 + B| \cdot \ldots \cdot |A_n + B|}{|B|^{n-1}}.$$

9.1.9. Для любого конечного подмножества $A \subset \mathbb{R}$ и произвольного $n \in \mathbb{N}$ верны неравенства $|A| \leqslant |nA| \leqslant \dbinom{|A| + n - 1}{n}$.

Аналогично сумме множеств можно определить их *произведение*:
$$AB := \{ab : a \in A, b \in B\}.$$

9.1.10. Если $A, B \subset \mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$, $|AB| = |A| \neq 0$ и $|B| = 2$, то $|A| \in \{2, 4\}$.

9.1.11. (1) Существует такое $c > 0$, что для любого конечного множества $A \subset \mathbb{R}$ выполняется неравенство $\max\{|A+A|, |A \cdot A|\} \geqslant c|A|^{5/4}$.

(2) Существует такое $c > 0$, что для любой арифметической прогрессии $P \subset \mathbb{R}$ длины более 3 верно неравенство $|P \cdot P| > c|P|^{5/4}$.

Замечание. На самом деле, если P — арифметическая прогрессия длины n во множестве целых чисел, то можно улучшить оценку из задачи 9.1.11 (2). А именно, для любого $\varepsilon \in (0, 2)$ существует такое $c > 0$, что $|P \cdot P| \geqslant c|P|^{\varepsilon}$. Доказательство этого факта использует нетривиальные теоремы из теории чисел, поэтому выходит за рамки этой книги.

9.1.12. Дано произвольное конечное непустое подмножество $A \subseteq \mathbb{R}$. Обозначим через $\mathscr{L}$ семейство прямых на плоскости, задаваемых уравнением $y = a(x - b)$, где $a, b \in A$. Обозначим $\mathscr{P} := (A+A) \times (A \cdot A)$. Докажите, что общее количество инциденций (определение смотрите в § 8) между прямыми из $\mathscr{L}$ и точками из $\mathscr{P}$ не меньше чем $|A|^3$.

9.2. Подсказки

9.1.1. Задача решается перебором.

9.1.2. (2) Для любых двух $a_1, a_2 \in A$ верно равенство $a_1 + a_2 = a_2 + a_1$. Дальше используйте определение.

9.1.3. (1) Рассмотрите четыре целых числа $0 \leqslant i, j, k, l \leqslant n-1$ таких, что $i \leqslant j$, $k \leqslant l$, $i \neq k$, и покажите, что $2^i + 2^j \neq 2^k + 2^l$.

9.1.4. Упорядочим каждое множество и рассмотрим $|A| + |B| - 1$ заведомо разных сумм.

9.1.5. (1) Используйте теорему Кнезера.

9.1.6. Используйте формулу $a - b = (a - c) + (c - b)$.

9.1.8. Докажите и используйте следующий факт: если $|A + B| = |A| \cdot |B|$, то для любого элемента $z \in A + B$ существует единственная пара $(a, b) \in A \times B$, для которой $z = a + b$.

9.1.9. Используйте определение.

9.1.11. (1) Рассмотрите множество точек $\mathscr{P}$ и множество прямых $\mathscr{L}$, определённые в задаче 9.1.12. Запишите оценку количества инциденций между прямыми из $\mathscr{L}$ и точками из $\mathscr{P}$, которую даёт теорема Семереди—Троттера (задача 8.1.5). Сравните её с оценкой из задачи 9.1.12. Из получившегося двойного неравенства выведите требуемое неравенство.

9.1.12. Посчитайте $|\mathscr{P}|$ и $|\mathscr{L}|$. Потом докажите, что каждая прямая из $\mathscr{L}$ содержит по крайней мере $|A|$ точек из $\mathscr{P}$.

9.3. Указания

9.1.2. Случай, когда одно из множеств A или B пусто, очевиден. Далее будем полагать, что A и B содержат хотя бы один элемент.

(1) Верхняя оценка вытекает из определения. Нижняя оценка следует из того, что $|\{a\}+B|=|B|$ для любого $a\in A$ и $|A+\{b\}|=|A|$ для любого $b\in B$.

(2) Нижняя оценка следует из п. (1).

9.1.3. (1) См. подсказку. Без ограничения общности будем считать, что $i<k$. Тогда $1+2^{j-i}\neq 2^{k-i}+2^{l-i}$. Нечётное число равно чётному. Противоречие.

(2) Можно считать, что $P=\mathscr{R}_n$. Тогда $P+P=\mathscr{R}_{2n-1}$.

9.1.5. (2) Если $A\neq\mathbb{Z}_p$, то $|A|<p$. Тогда по теореме Коши—Дэвенпорта $|A|=|A+B|\geqslant|A|+|B|-1$. Поэтому $|B|\leqslant 1$.

9.1.6. Для любого $x\in A-B$ обозначим через a_x наименьшее из чисел $a\in A$, для которых существует такое $b\in B$, что $a-b=x$. Определим отображение $F: C\times(A-B)\to(A-C)\times(B-C)$ формулой

$$F(c,x):=(a_x-c,a_x-x-c).$$

Имеем

$$F(c,x)=F(d,y)\iff\begin{cases}a_x-c=a_y-d\\ a_x-x-c=a_y-y-d\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=(a_x-c)-(a_x-x-c)=(a_y-d)-(a_y-y-d)=y.$$

А тогда и $c=d$. Значит, F инъективно. Из этого вытекает неравенство Ружи.

9.1.7. (1) Положим в неравенстве Ружи (задача 9.1.6) $A=B=X$, $C=-X$.

(2) Положим в неравенстве Ружи (задача 9.1.6) $C=-Y$, $A=X$ и $B=-X$.

(3) Положим в неравенстве Ружи (задача 9.1.6) $A=X$, $B=-Y$ и $C=-(X\cap Y)$. Получим

$$|X+Y|\leqslant\frac{|X+(X\cap Y)|\cdot|Y+(X\cap Y)|}{|X\cap Y|}\leqslant\frac{|X+X|\cdot|Y+Y|}{|X\cap Y|}.$$

9.1.11. (2) Примените п. (1) и задачу 9.1.3 (2).

Предметный указатель

Литература

[A] *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: МЦНМО, 2012.

[AM] *Акопян А. В., Мусин О. Р.* О множествах с двумя расстояниями // Мат. просвещение — 2013. — Вып. 17. — С. 136—151.
URL: `http://www.mccme.ru/free-books/matpros/mph.pdf`

[AS] *Алон Н., Спенсер Дж.* Вероятностный метод. — М.: Бином, 2011.

[B] *Bollobás B.* Random graphs. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001. — (Cambridge studies in advanced mathematics; V. 73).

[BF] *Babai L., Frankl P.* Linear algebra methods in combinatorics. Part 1. — University of Chicago: Dept. of computer science, 1992.

[BM] *Bogdanov I., Matushkin A.* Algebraic proofs of linear versions of the Conway—Gordon—Sachs theorem and the van Kampen—Flores theorem.
URL: `http://arxiv.org/abs/1508.03185`

[EL] *Erdős P., Lovász L.* Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions. Infinite and finite sets // Colloq. Math. Soc. János Bolyai. V. 10. — Amsterdam: North-Holland, 1975. — P. 609—627.

[Ga] *Гарднер М.* Рамсеевская теория графов // Квант. — 1988. — № 4. — С. 15—20, 82.
URL: `http://kvant.mccme.ru/1988/04/ramseevskaya_teoriya_grafov.htm`

[GIF] *Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В.* Ленинградские математические кружки. — Киров: АСА, 1994.

[GIM] Основы комбинаторики и теории чисел. Сборник задач: Учебное пособие / А. А. Глибичук, Д. Г. Ильинский, Д. В. Мусатов и др. — Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2015.

[GKP] *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник А.* Конкретная математика. — М.: Мир, 1998.

[Gra] *Грэхем Р.* Начала теории Рамсея. — М.: Мир, 1984.

[Gri] *Григорьев И.* Порождение перестановок «восьмёркой».
URL: `http://www.mccme.ru/mmks/dec10/grigoryev_report.pdf`

[Hal] *Холл М.* Комбинаторика. — М.: Мир, 1970.

[Har] *Харари Ф.* Теория графов. — М.: УРСС, 2003.

[I] *Игнатьев М. В.* Квантовая комбинаторика // Мат. просвещение. — 2014. — Т. 18. — С. 66—111.

[IKR] *Ильинский Д. Г., Купавский А. Б., Райгородский А. М., Скопенков А. Б.* Дискретный анализ для математиков и программистов (подборка задач) // Мат. просвещение. — 2013. — Т. 17. — С. 162—181.
URL: `http://www.mccme.ru/free-books/matpros/matprosi.html`

[IRS] *Ильинский Д. Г., Райгородский А. М., Скопенков А. Б.* Независимость и доказательства существования в комбинаторике // Мат. просвещение. — 2015. — Т. 19. — С. 209—221.
URL: http://arxiv.org/abs/1411.3171

[J] *Jukna S.* Extremal Combinatorics. With applications in computer science. — Berlin: Springer-Verlag, 2001.

[JLR] *Janson S., Luczak T., Rucinski A.* Random graphs. — New York: John Wiley, 2000.

[KR] *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? — М.: МЦНМО, 2015.
URL: http://ilib.mccme.ru/pdf/kurant.htm

[KS] *Калужнин Л. А., Сущанский В. И.* Преобразования и перестановки. — М.: Физматлит, 1985.

[KZP] *Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В.* Введение в теорию вероятностей. — М.: МЦНМО, 2015. — (Серия «Библиотечка “Квант”»; Вып. 135).
См. также http://ilib.mccme.ru/djvu/bib-kvant/teorver.htm

[L] *Lovász L.* Combinatorial problems and exercises. — Amsterdam: North-Holland, 1993.

[Mk] *Matoušek J.* Thirty-three Miniatures: Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra. — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2010.

[Mn] *Матушкин А.* Непустота пересечения цепочки множеств // Мат. просвещение, представлено к публикации.

[MS] *Медников Л. Э., Шаповалов А. В.* Турнир городов: мир математики в задачах. — М.: МЦНМО, 2012.

[NPP] *Нилов Ф., Полянский А., Полянский Н.* Инциденции точек и прямых.
URL: http://www.turgor.ru/lktg/2014/7/index.htm

[P] *Прасолов В. В.* Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. — М.: МЦНМО, 2014.
URL: http://www.mccme.ru/prasolov

[PS] *Прасолов В. В., Скопенков М. Б.* Рамсеевская теория зацеплений // Мат. просвещение. — 2005. — Т. 9. — С. 108—115.

[R1] *Райгородский А. М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. — М.: МЦНМО, 2015.

[R2] *Райгородский А. М.* Проблема Борсука. — М.: МЦНМО, 2015.

[R3] *Райгородский А. М.* Вероятность и алгебра в комбинаторике. — М.: МЦНМО, 2015.

[R4] *Райгородский А. М.* Модели случайных графов. — М.: МЦНМО, 2016.
URL: http://ium.mccme.ru/postscript/s12/gasnikov-raigorodskii.pdf

[R5] *Райгородский А. М.* Комбинаторика и теория вероятностей. — М.: Изд-во МФТИ, 2012.

[R6] *Райгородский А. М.* Системы общих представителей в комбинаторике и их приложения в геометрии. — М.: МЦНМО, 2009.
URL: http://www.mccme.ru/free-books/dubna/raigor-2.pdf

[S1] *Скопенков А. Б.* Алгебраическая топология с геометрической точки зрения. — М.: МЦНМО, 2015.
URL: http://arxiv.org/abs/0808.1395,
http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf

[S2] *Скопенков А. Б.* Олимпиады и математика // Мат. просвещение. — 2006. — Т. 10. — С. 57—63.
URL: http://www.mccme.ru/free-books/matprosb.html

[S3] *Скопенков А. Б.* Объемлемая однородность. — М.: МЦНМО, 2012.
URL: http://arxiv.org/abs/1003.5278

[S4] *Скопенков А.* Алгоритмы распознавания реализуемости гиперграфов.
URL: http://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf

[S5] *Скопенков А. Б.* Вокруг критерия Куратовского планарности графов // Мат. просвещение. — 2005. — Т. 9. — С. 116—128; 2006. — Т. 10. — С. 276—277.
URL: http://www.mccme.ru/free-books/matprosa.html
Skopenkov A. On the Kuratowski graph planarity criterion.
URL: http://arxiv.org/abs/0802.3820, v3.

[S6] *Скопенков А. Б.* Короткое опровержение гипотезы Борсука // Мат. просвещение. — 2013. — Т. 17. — С. 88—92.
URL: http://www.mccme.ru/free-books/matpros/matprosi.html
Skopenkov A. A two-page disproof of the Borsuk partition conjecture.
URL: http://arxiv.org/abs/0712.4009, v2.

[S7] *Скопенков А. Б.* Простое доказательство теоремы Руффини—Абеля // Мат. просвещение. — 2011. — Т. 15. — С. 113—126.
URL: http://www.mccme.ru/free-books/matprosg.html
Skopenkov A. A simple proof of the Abel—Ruffini theorem.
URL: http://arxiv.org/abs/1102.2100

[S8] *Skopenkov A.* A short elementary proof of Ruffini—Abel theorem.
URL: http://arxiv.org/abs/1508.03317

[S9] *Skopenkov A.* Realizability of hypergraphs and Ramsey link theory.
URL: http://arxiv.org/abs/1402.0658

[So] *Соловьева Ф. И.* Введение в теорию кодирования. — Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т., 2006.
URL: http://tc.nsu.ru/uploads/codingtheory.pdf

[Su] *Судзуки Д.* Основы дзэн-буддизма. Наука дзэн — ум дзэн. — Киев: Преса Украіни, 1992.

[Ve] *Веснин А. Ю.* Гамильтоновы графы и остовные подграфы: задачи для исследования, материалы Московской математической конференции школьников.
URL: http://www.mccme.ru/mmks/mar08/vesnin3.pdf

[Vi] *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. — Москва—Ижевск: РХД, 2003.

[VS] *Волков М. В., Силкин Н. Н.* Кого послать на Марс? // Квант. — 1988. — № 8. — С. 51—57.
URL: http://kvant.mccme.ru/1988/08/kogo_poslat_na_mars.htm

[w1] https://www.dpmms.cam.ac.uk/~dc340/EGT3.pdf

[w2] http://www.cs.rit.edu/~spr/ElJC/ejcram14.pdf

[w3] http://www.math.upenn.edu/~wilf/website/Three%20problems.pdf

[w4] http://www.unn.ru/math/no/5/_nom5_001_ilyin.pdf

[w5] http://www.sosmath.com/calculus/sequence/stirling/stirling.html

[w6] http://www.spbstu.ru/publications/m_v/n_002/Polischook/Stirling.pdf

[w7] http://arxiv.org/pdf/1109.2546.pdf

[w8] http://dainiak.blogspot.ru

[ZSS] Элементы математики в задачах: через олимпиады к профессии / Под ред. А. А. Заславского, А. Б. Скопенкова и М. Б. Скопенкова. М.: МЦНМО, 2016. URL: http://www.mccme.ru/circles/oim/materials/sturm.pdf

Сведения об авторах

Алексей Анатольевич Глибичук: Московский физико-технический институт. Личная страница:
https://mipt.ru/education/chairs/dm/staff/glibichuk.php

Александр Борисович Дайняк: Московский физико-технический институт. Личная страница:
https://mipt.ru/education/chairs/dm/staff/dainiak.php

Дмитрий Геннадиевич Ильинский: Московский физико-технический институт, ЦЭМИ РАН. Личная страница:
https://mipt.ru/education/chairs/dm/staff/ilyinsky.php

Андрей Борисович Купавский: Московский физико-технический институт. Личная страница:
https://mipt.ru/education/chairs/dm/staff/kupavskii.php

Андрей Михайлович Райгородский: Московский физико-технический институт, Московский Государственный Университет, ООО «Яндекс». Личная страница:
https://mipt.ru/education/chairs/dm/staff/raigorodskii.php

Аркадий Борисович Скопенков: Московский физико-технический институт, Независимый Московский Университет. Личные страницы:
http://www.mccme.ru/~skopenko
https://mipt.ru/education/chairs/dm/staff/skopenkov.php

Алексей Андреевич Чернов: Московский физико-технический институт, ООО «Яндекс». Личная страница:
https://mipt.ru/education/chairs/dm/staff/chernov.php

Ведущий автор — А. Б. Скопенков; руководитель авторской группы — А. М. Райгородский.

Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (495) 745-80-31; `biblio.mccme.ru`

Книга — почтой: `biblio.mccme.ru/shop/order`

Книги в электронном виде: `www.litres.ru/mcnmo`

Мы сотрудничаем с интернет-магазинами

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; `www.umlit.ru`, `www.textbook.ru`, `абрис.рф`
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; `www.kniga.ru`

Наши партнеры в Москве и Подмосковье

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; `www.mdk-arbat.ru`
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; `www.bookmg.ru`
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; `www.biblio-globus.ru`
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; `www.arg.ru`
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; `www.uchebnik.com`
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; `www.shkolkniga.ru`
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, `www.urss.ru`
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

Наши партнеры в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; `k_i_@bk.ru`
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, `www.biblio-globus.ru`

Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; `df-al-el@bk.ru`